

# 一类花图对应链环的Jones多项式

周 雪

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2023年8月12日; 录用日期: 2023年9月6日; 发布日期: 2023年9月14日

## 摘 要

本文研究了各边均为正号的花图  $F_{3 \times n}$  对应链环的Jones多项式。Tutte和Jones多项式之间有一个显著的联系, 首先计算得到花图  $F_{3 \times n}$  的Tutte多项式, 再根据Tutte多项式与Jones多项式之间的关系计算得到这类花图对应链环的Jones多项式。

## 关键词

Tutte多项式, Jones多项式

# Jones Polynomial of Links Corresponding to a Class of Flower Graph

Xue Zhou

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Aug. 12<sup>th</sup>, 2023; accepted: Sep. 6<sup>th</sup>, 2023; published: Sep. 14<sup>th</sup>, 2023

## Abstract

In this paper, the Jones polynomial of the flower graph  $F_{3 \times n}$  corresponding to the chain link with a positive sign on all sides is studied. There is a significant connection between Tutte and Jones polynomials, first calculating the Tutte polynomial of the flower graph  $F_{3 \times n}$ , and then calculating the Jones polynomial corresponding to the chain link of this type of flower graph according to the relationship between the Tutte polynomial and the Jones polynomial.

## Keywords

Tutte Polynomial, Jones Polynomial



## 1. 引言

Tutte 多项式是由 Tutte [1] 在 1954 年提出, 是著名的图多项式不变量之一, 它提供了关于图结构的各种有趣的信息, 能很好地反映图的一些性质及特征。Tutte 多项式的应用十分广泛, 并且与许多学科存在紧密的联系, 例如在计算机科学、工程、优化、物理、化学、生物学和纽结理论等, 也是求解图参数的一个重要工具。1985 年, Jones [2] 通过冯 - 诺依曼数组将 Jones 多项式定义为纽结不变量。目前计算 Jones 多项式有多种方法, 其中利用拆接关系去计算纽结和链环的方法较为常见, 但是针对交叉点数较多的纽结和链环来说计算较为复杂, 于是众多学者开始探索更简便的方法去计算 Jones 多项式。1987 年 Kauffman 在 [3] 中介绍了 Jones 多项式的状态和模型, 提出了 Jones 多项式与尖括号多项式、拧数的等式关系。陶志雄利用二项式的知识研究了特殊环面结的 Jones 多项式 [4], Kwun Y C 等学者通过 Tutte 多项式与 Jones 多项式之间的关系计算了各边均为正号的  $(3, n)$  图对应链环的 Jones 多项式 [5]。

本文的组织结构为: 在第 2 节中, 我们给出一些关于图和纽结的基本概念, 以及 Tutte 和 Jones 多项式的定义。此外, 在这一节中, 我们给出了图和纽结之间的关系, 以及 Tutte 和 Jones 多项式之间的关系, 在第 3 节给出主要结果。

## 2. 预备知识

### 2.1. 图

图  $G$  定义为一个偶对  $(V, E)$ , 记作  $G = (V, E)$ , 其中:

- 1)  $V$  是一个有限的非空集合, 其元素称为顶点或点, 用  $V(G)$  表示顶点集合;
- 2)  $E$  是无序积  $V \times V$  中的一个子集合, 其元素称为边, 且集合  $V \times V$  中的元素在  $E$  中可以重复出现多次, 用  $E(G)$  表示边的集合。
- 3) 一条边  $x, y$  被称为连接顶点  $x$  和  $y$ , 用  $xy$  表示; 顶点  $x$  和  $y$  是这条边的末端顶点。如果  $xy \in E(G)$ , 那么  $x$  和  $y$  是  $G$  的相邻顶点, 并且顶点  $x$  和  $y$  与边  $xy$  相伴。如果两条边正好有一个共同的端点, 那么它们就是相邻的 [6]。

### 2.2. 对偶图

设图  $G$  的对偶图为  $G^*$ , 则  $G^*$  满足以下两点:

- 1)  $G^*$  的每一个顶点对应  $G$  的每个面;
- 2) 如果图  $G$  有一条边把两个面隔开, 则  $G^*$  在图中代表图的两个面的点之间有一边相连, 同一个面被一条边隔开, 则这个面对应的点有一个自环(如图 1 所示)。

### 2.3. 链环

将若干个互不相交的圆  $S_i^1 (1 \leq i \leq n, n > 1)$  嵌入三维欧式空间  $R^3$  中或球面  $S^3$  中, 由这些圆形成的空间图形称为链环, 记为  $L = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_n$ 。在此之中  $n$  为链环  $L$  的分支数,  $K_i (i = 1, 2, \dots, n)$  称为  $L$  的一个分支。若通过合痕后所有的  $K_i$  都是平凡纽结, 则此时称  $L$  为平凡链环, 若给定每个分支一个方向, 便可得到一个定向链环, 当  $i = 1$  时, 链环只有一个分支, 称为纽结 [6]。

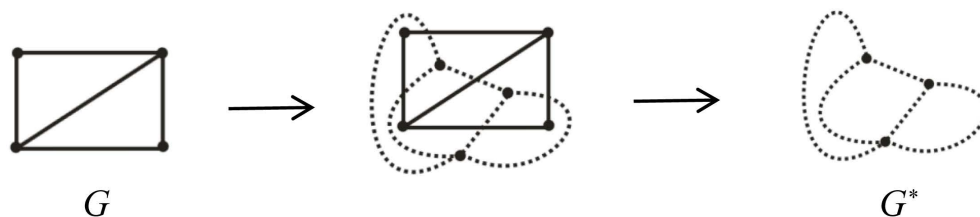


Figure 1. The move process from Figure  $G$  to dual figure  $G^*$

图 1. 图  $G$  到对偶图  $G^*$  的变换过程

## 2.4. 纽结和图之间的联系

每个链环投影图，我们可以找到一个对应的有符号平面图，反之亦然。这个过程如下：

1) 假设  $K$  是一个纽结， $K'$  是它的投影。投影  $K'$  将平面划分为几个区域。从最外层的区域开始，我们可以将这些区域染成白色或黑色。使边缘两侧的颜色永远不会一致。

2) 若我们把最外层的区域染成白色，在每个黑色区域选择一个顶点。如果两个黑色区域  $R$  和  $R'$  有共同的交叉点  $c_1, c_2, \dots, c_n$  那么我们用边连接  $R$  和  $R'$  的选定顶点，这些边穿过  $c_1, c_2, \dots, c_n$  并位于这两个黑色区域中。这样，我们从  $K'$  得到一个平面图  $G$  [7]，如图 2 所示。

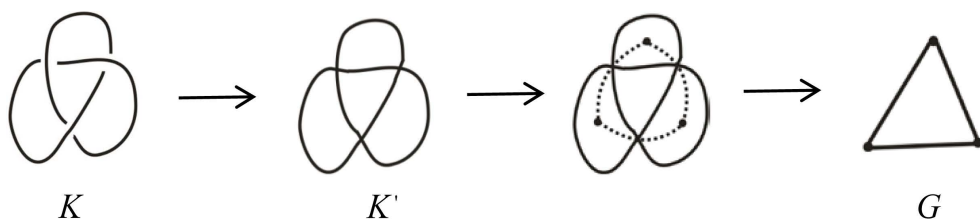


Figure 2. Figure  $G$  corresponding to the knot projection  $K'$

图 2. 与纽结投影图  $K'$  相对应的图  $G$

我们给图  $G$  的每条边分配符号+或-，如图 3 所示。

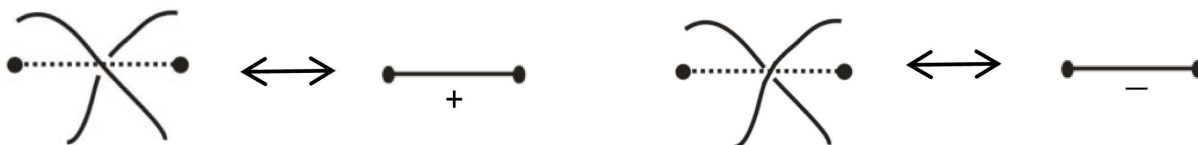


Figure 3. Marking rules for edges

图 3. 边的标记规则

通过上述过程形成的图被称为纽结  $K$  所对应的有符号平面图，如图 4 所示。

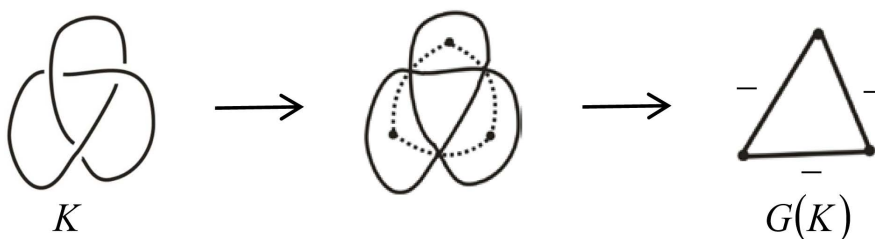


Figure 4. Symbol diagram corresponding to the knot diagram

图 4. 与纽结图相对应的符号图

反之，任一符号图，我们可以找到对应的链环图。从图 5 中可以清楚地看到这个构造。

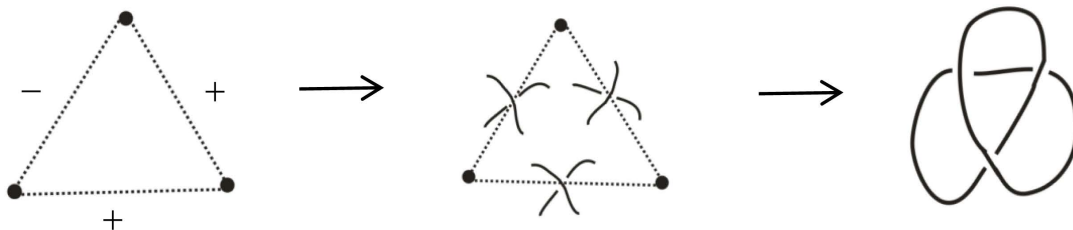


Figure 5. Link diagram corresponding to symbol diagram  
图 5. 符号图对应的链环图

### 2.5. Tutte 多项式

[8]图  $G$  的 Tutte 多项式  $T(G; x, y)$  可以定义为：

$$T(G; x, y) = \begin{cases} 1 & \text{若 } E(G) = \phi \\ xT(G/e; x, y) & \text{若 } e \text{ 是割边} \\ yT(G-e; x, y) & \text{若 } e \text{ 是环} \\ T(G-e; x, y) + T(G/e; x, y) & \text{若 } e \text{ 既不是割边也不是环} \end{cases}$$

其中  $G-e$  和  $G/e$  分别表示图  $G$  删除边  $e$  和收缩边  $e$  后得到的图。

性质 1：设  $G \cup G'$  是  $G$  和  $G'$  的不交并， $G * G'$  是  $G \cap G'$  当且仅当为一个顶点，则有：

$$T(G \cup G') = T(G)T(G')$$

$$T(G * G') = T(G)T(G')$$

性质 2：长为  $n$  的循环图  $C_n$  的 Tutte 多项式为：

$$T(C_n; x, y) = \sum_{i=1}^{n-1} x^i + y$$

### 2.6. 拧数

一个链环  $L$  的有向投影图，对其一个交叉点，我们将上行线旋转到下行线，并找到所扫过的最小转角，若此过程为逆时针旋转，则此交叉点记为+1；若此过程为顺时针旋转，则此交叉点记为-1，称链环  $L$  全体交叉点的+1 和-1 的总和为链环  $L$  的拧数，记为  $\omega(L)$  [6]。

### 2.7. Jones 多项式

对于有向投影图  $L$  的 Jones 多项式  $V(L)$  是变元为  $t^{\frac{1}{2}}$  的 Laurent 多项式，满足如下拆接关系：

$$tV(L_+) + t^{-1}V(L_-) = \left( t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}} \right) V(L_0)$$

并且平凡结的 Jones 多项式为 1。这里  $L_+$ ， $L_-$  和  $L_0$  是三个定向链环，它们的不同之处如图 6 所示。

### 2.8. Tutte 多项式与 Jones 多项式的关系

令  $G$  是定向交错链环图  $L$  的正符号平面连通图，那么链环  $L$  的 Jones 多项式为：

$$V_L(t) = (-1)^{wr(L)} t^{\frac{b(L)-a(L)+3wr(L)}{4}} T_G(-t, -t^{-1})$$

其中  $a(L)$  是  $G$  中的顶点数,  $b(L)$  是  $G$  的对偶图中的顶点数,  $wr(L)$  是  $L$  的拧数[6]。

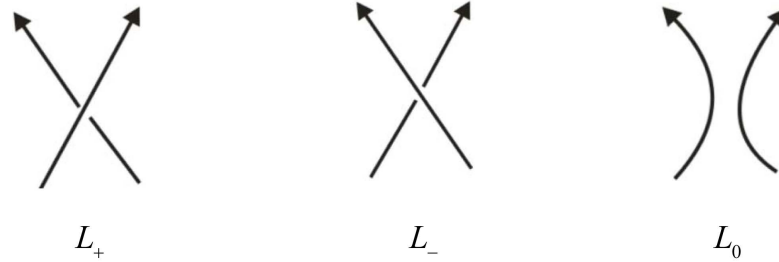


Figure 6.  $L_+$ ,  $L_-$  and  $L_0$

图 6.  $L_+$ ,  $L_-$  和  $L_0$

### 3. 花图 $F_{3 \times n}$ 对应链环的 Jones 多项式

本文研究的是一类  $F_{3 \times n}$  花图, 定义如下:

如果一个图  $G$  有 3 个顶点, 形成一个 3-圈, 有 3 个  $n-2$  顶点的集合, 这些顶点来自 3 圈周围的  $n$ -圈, 因此每个  $n$ -圈与 3-圈相交于一条边上, 则称为  $F_{3 \times n}$  花图, 其中  $n \geq 2$ 。  $F_{3 \times n}$  有  $3(n-1)$  个顶点和  $3n$  条边,  $n$ -圈被称为花瓣, 3-圈被称为  $F_{3 \times n}$  的中心, 构成中心的 3 个顶点都是 4 度, 所有其他顶点都是 2 度[9]。如图 7 所示, 其中  $n$  表示外圈的边数。

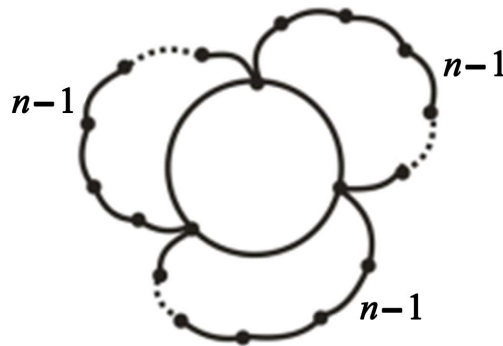


Figure 7. Flower graph  $F_{3 \times n}$

图 7. 花图  $F_{3 \times n}$

#### 3.1. $F_{3 \times n}$ 花图的 Tutte 多项式

定理 3.1  $F_{3 \times n}$  花图的 Tutte 多项式为:

$$T(F_{3 \times n}; x, y) = \sum_{i=0}^{n-2} x^i \left( \sum_{j=1}^{n-1} x^j + y \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^{n-2} x^i + y + 1 \right) \left[ (y+1) \left( \sum_{i=1}^{n-2} x^i + y \right)^2 + \sum_{i=1}^{2n-3} x^i + y \right]$$

证明:  $T(F_{3 \times n}; x, y) = T(\text{Figure 7})$

$$\begin{aligned}
 &= \left( \text{Diagram 1} \right) + T(C_{n-1}) \left( \text{Diagram 2} \right) \\
 &= x^{n-2}T(C_n^2) + x^{n-1}T(C_n^2) + \dots + xT(C_n^2) + T(\text{Diagram 3}) \\
 &\quad + T(C_{n-1}) \left( \text{Diagram 4} \right) \\
 &= \sum_{i=0}^{n-2} x^i T(C_n^2) + [T(C_{n-1}) + 1] T(\text{Diagram 5}) \\
 &= \sum_{i=0}^{n-2} x^i T(C_n^2) + [T(C_{n-1}) + 1] \left[ yT(C_{n-1}^2) + T(\text{Diagram 6}) \right] \\
 &= \sum_{i=0}^{n-2} x^i T(C_n^2) + [T(C_{n-1}) + 1] \left[ (y+1)T(C_{n-1}^2) + T(\text{Diagram 7}) \right] \\
 &= \sum_{i=0}^{n-2} x^i T(C_n^2) + [T(C_{n-1}) + 1] \left[ (y+1)T(C_{n-1}^2) + T(C_{2n-2}) \right] \\
 &= \sum_{i=0}^{n-2} x^i \left( \sum_{j=1}^{n-1} x^j + y \right)^2 + \left( \sum_{j=1}^{n-2} x^j + y + 1 \right) \left[ (y+1) \left( \sum_{j=1}^{n-2} x^j + y \right)^2 + \sum_{j=1}^{2n-3} x^j + y \right]
 \end{aligned}$$

综上,  $F_{3 \times n}$  花图的 Tutte 多项式为:

$F_{3 \times n}$  花图的 Tutte 多项式为:

$$T(F_{3 \times n}; x, y) = \sum_{i=0}^{n-2} x^i \left( \sum_{j=1}^{n-1} x^j + y \right)^2 + \left( \sum_{j=1}^{n-2} x^j + y + 1 \right) \left[ (y+1) \left( \sum_{j=1}^{n-2} x^j + y \right)^2 + \sum_{j=1}^{2n-3} x^j + y \right]$$

推论 3.1  $T_{F_{3 \times n}}(-t, -t^{-1})$  的表达式为:

$$\begin{aligned}
 T_{F_{3 \times n}}(-t, -t^{-1}) &= \frac{3t^{2n} + 3t^{2n-2} + 3t^{2n-4} + t^2 + 2t + 4 + (-1)^n (3t^{n+1} + 3t^n + 6t^{n-1} + t^{3n-1} - t^{3n-4} - t^{3n-2})}{(1+t)^3} \\
 &\quad + \frac{3t^3 + 3t^2 + t + 1}{t^4 (1+t)^3}
 \end{aligned}$$

证明: 当  $x = -t, y = -t^{-1}$  时, 有:

$$\begin{aligned}
 T_{F_{3 \times n}}(-t, -t^{-1}) &= \sum_{i=0}^{n-2} (-t)^i \left( \sum_{j=1}^{n-1} (-t)^j - t^{-1} \right)^2 + \left( \sum_{j=1}^{n-2} (-t)^j - t^{-1} + 1 \right) \left[ (1-t^{-1}) \left( \sum_{j=1}^{n-2} (-t)^j - t^{-1} \right)^2 + \sum_{j=1}^{2n-3} (-t)^j - t^{-1} \right] \\
 &= \frac{1 + (-1)^n t^{n-1}}{1+t} \left[ \frac{-t - (-1)^n t^n}{1+t} - t^{-1} \right]^2 + \left[ \frac{-t + (-1)^n t^{n-1}}{1+t} - t^{-1} + 1 \right] \\
 &\quad \cdot \left[ (1-t^{-1}) \left( \frac{-t + (-1)^n t^{n-1}}{1+t} - t^{-1} \right)^2 + \frac{-t - t^{2n-2}}{1+t} - t^{-1} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{1+(-1)^n t^{n-1}}{1+t} \right) \left( \frac{t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 2t + 2(-1)^n (t^{n+3} + t^{n+2} + t^{n+1}) + t^{2n+2} + 1}{t^2(1+t)^2} \right) \\
&+ \left( \frac{-1+(-1)^n t^n}{t(1+t)} \right) \left[ \frac{t-1}{t} \cdot \left( \frac{t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 2t - 2(-1)^n (t^{n+2} + t^{n+1} + t^n) + t^{2n} + 1}{t^2(1+t)^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{-t - t^{2n-2}}{1+t} - \frac{1}{t} \right] \\
&= \frac{1}{t^2(1+t)^3} \cdot \left\{ t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 2t + (-1)^n (3t^{n+3} + 4t^{n+2} + 5t^{n+1} + t^{3n+1} + t^{n-1} + 2t^n) \right. \\
&\quad \left. + 2(t^{2n+2} + t^{2n+1} + t^{2n}) + t^{2n+2} + 1 \right\} + \left( \frac{(-1)^n t^n - 1}{t(1+t)} \right) \left[ \frac{1}{t^3(1+t)^2} (-t^4 - t^3 - 2t^2 - t \right. \\
&\quad \left. - 2(-1)^n t^{n+3} + 2(-1)^n t^n - t^{2n+2} - t^{2n} - 1) \right] \\
&= \frac{3t^{2n} + 3t^{2n-2} + 3t^{2n-4} + t^2 + 2t + 4 + (-1)^n (3t^{n+1} + 3t^n + 6t^{n-1} + t^{3n-1} - t^{3n-4} - t^{3n-2})}{(1+t)^3} \\
&\quad + \frac{3t^3 + 3t^2 + t + 1}{t^4(1+t)^3}
\end{aligned}$$







### 3.2. 花图 $F_{3 \times n}$ 对应链环的拧数

$F_{3 \times n}$  花图对应链环  $L$  可分为两种情况进行讨论, 当  $n$  为奇数时,  $L$  为二分支链环; 当  $n$  为偶数时,  $L$  为三分支链环。

1) 当  $n$  为奇数且  $L$  的两个分支反向时, 分析  $G$ ,  $L$ ,  $a(L)$ ,  $b(L)$ ,  $wr(L)$ , 如表 1 所示。

**Table 1.**  $n$  shows odd numbers and the two branches of  $L$  are reversed

**表 1.**  $n$  为奇数且  $L$  的两个分支反向





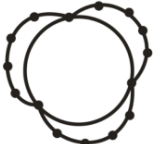

$n$	$G$	$L$	$a(L)$	$b(L)$	$wr(L)$
3			6	5	-9
5			12	5	-15
7			18	5	-21
...	...	...	...	...	...

由表 1 可见：当  $n$  为奇数且  $L$  的两个分支  $L_1$  与  $L_2$  反向时， $a(L)=3n-3$ ， $b(L)=5$ ， $L$  的所有交叉点处的值均为  $-1$ ，一共有  $3n$  个交叉点，故  $wr(L)=-3n$ ；

同理可证，当  $n$  为奇数且  $L$  的两个分支  $L_1$  与  $L_2$  同向时， $a(L)=3n-3$ ， $b(L)=5$ ， $L$  的所有交叉点处的值均为  $+1$ ，一共有  $3n$  个交叉点，故  $wr(L)=3n$ 。

1) 当  $n$  为偶数且  $L$  的 3 个分支  $L_1, L_2, L_3$  同向时，分析  $G, L, a(L), b(L), wr(L)$ ，如表 2 所示。




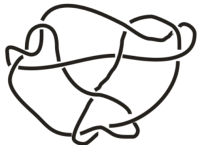
**Table 2.**  $n$  shows even numbers and the three branches of  $L$  are in the same direction  
**表 2.**  $n$  为偶数且  $L$  的三个分支同向

$n$	$G$	$L$	$a(L)$	$b(L)$	$wr(L)$
2			3	5	6
4			9	5	12
6			15	5	18
...	...	...	...	...	...

由表 2 可知：当  $n$  为偶数且  $L$  的 3 个分支  $L_1, L_2, L_3$  同向时， $a(L)=3n-3$ ， $b(L)=5$ ， $L$  的所有交叉点处的值均为  $+1$ ，一共有  $3n$  个交叉点，故  $wr(L)=3n$ ；

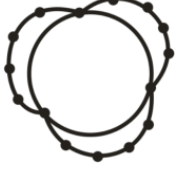

当  $n$  为偶数且  $L$  的 3 个分支  $L_1$  与  $L_2$  同向， $L_3$  与  $L_1, L_2$  反向时，分析  $G, L, a(L), b(L), wr(L)$ ，如表 3 所示。

**Table 3.**  $n$  is even and the three branches of  $L, L_1, L_2$  and  $L_3$  are reversed  
**表 3.**  $n$  为偶数且  $L$  的 3 个分支  $L_1, L_2$  与  $L_3$  反向

$n$	$G$	$L$	$a(L)$	$b(L)$	$wr(L)$
2			3	5	-2
4			9	5	-4



Continued

6			15	5	-6
...	...	...	...	...	...

由表 3 可知: 当  $n$  为偶数且  $L$  的 3 个分支  $L_1$  与  $L_2$  同向,  $L_3$  与  $L_1, L_2$  反向时,  $a(L)=3n-3$ ,  $b(L)=5$ ,  $L$  有  $2n$  个-1 的交叉点, 有  $n$  个+1 的交叉点, 故  $wr(L)=-n$ ;

同理可证, 当  $L_1$  与  $L_3$  同向,  $L_2$  与  $L_1, L_3$  反向;  $L_2$  与  $L_3$  同向,  $L_1$  与  $L_2, L_3$  反向时, 也是  $a(L)=3n-3$ ,  $b(L)=5$ ,  $L$  有  $2n$  个-1 的交叉点, 有  $n$  个+1 的交叉点, 故  $wr(L)=-n$ 。

### 3.3. 花图 $F_{3 \times n}$ 对应链环 $L$ 的 Jones 多项式

定理 3.2 当  $n$  为奇数时, 花图  $F_{3 \times n}$  对应链环  $L$  的 Jones 多项式为:

1) 当链环  $L$  的两个分支反向时:

$$V_L(t) = -t^{2-3n} \left[ \frac{3t^{2n} + 3t^{2n-2} + 3t^{2n-4} + t^2 + 2t + 4 - 3t^{n+1} - 3t^n - 6t^{n-1} - t^{3n-1} + t^{3n-4} + t^{3n-2}}{(1+t)^3} + \frac{3t^3 + 3t^2 + t + 1}{t^4(1+t)^3} \right]$$

2) 当链环  $L$  的两个分支同向时:

$$V_L(t) = -t^{2+\frac{3}{2}n} \left[ \frac{3t^{2n} + 3t^{2n-2} + 3t^{2n-4} + t^2 + 2t + 4 - 3t^{n+1} - 3t^n - 6t^{n-1} - t^{3n-1} + t^{3n-4} + t^{3n-2}}{(1+t)^3} + \frac{3t^3 + 3t^2 + t + 1}{t^4(1+t)^3} \right]$$

证明: 当  $n$  为奇数且  $L$  的两个分支反向时,  $a(L)=3n-3$ ,  $b(L)=5$ ,  $wr(L)=-3n$ 。根据 Jones 多项式与 Tutte 多项式:  $V_L(t) = (-1)^{wr(L)} t^{\frac{b(L)-a(L)+3wr(L)}{4}} T_G(-t, -t^{-1})$ , 将各个参数代入计算得到:

$$\begin{aligned} V_L(t) &= (-1)^{-3n} t^{\frac{5-3n+3-9n}{4}} T_{F_{3 \times n}}(-t, -t^{-1}) \\ &= -t^{2-3n} T_{F_{3 \times n}}(-t, -t^{-1}) \\ &= -t^{2-3n} \left[ \frac{3t^{2n} + 3t^{2n-2} + 3t^{2n-4} + t^2 + 2t + 4 - 3t^{n+1} - 3t^n - 6t^{n-1} - t^{3n-1} + t^{3n-4} + t^{3n-2}}{(1+t)^3} + \frac{3t^3 + 3t^2 + t + 1}{t^4(1+t)^3} \right] \end{aligned}$$

当  $n$  为奇数且  $L$  的两个分支同向时,  $a(L)=3n-3$ ,  $b(L)=5$ ,  $wr(L)=3n$ , 将各参数代入

$V_L(t) = (-1)^{wr(L)} t^{\frac{b(L)-a(L)+3wr(L)}{4}} T_G(-t, -t^{-1})$  得到:

$$\begin{aligned} V_L(t) &= (-1)^{3n} t^{\frac{5-3n+3+9n}{4}} T_{F_{3 \times n}}(-t, -t^{-1}) \\ &= -t^{2+\frac{3}{2}n} T_{F_{3 \times n}}(-t, -t^{-1}) \\ &= -t^{2+\frac{3}{2}n} \left[ \frac{3t^{2n} + 3t^{2n-2} + 3t^{2n-4} + t^2 + 2t + 4 - 3t^{n+1} - 3t^n - 6t^{n-1} - t^{3n-1} + t^{3n-4} + t^{3n-2}}{(1+t)^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3t^3 + 3t^2 + t + 1}{t^4(1+t)^3} \right] \end{aligned}$$

定理 3.3 当  $n$  为偶数时, 花图  $F_{3 \times n}$  对应链环  $L$  的 Jones 多项式为:

1) 当链环  $L$  的三个分支  $L_1$ 、 $L_2$  与  $L_3$  同向时:

$$\begin{aligned} V_L(t) &= t^{2+\frac{3}{2}n} \left[ \frac{3t^{2n} + 3t^{2n-2} + 3t^{2n-4} + t^2 + 2t + 4 + 3t^{n+1} + 3t^n + 6t^{n-1} + t^{3n-1} - t^{3n-4} - t^{3n-2}}{(1+t)^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3t^3 + 3t^2 + t + 1}{t^4(1+t)^3} \right] \end{aligned}$$

2) 当  $L_1$  与  $L_2$  同向,  $L_3$  与  $L_1$ 、 $L_2$  反向;  $L_1$  与  $L_3$  同向,  $L_2$  与  $L_1$ 、 $L_3$  反向;  $L_2$  与  $L_3$  同向,  $L_1$  与  $L_2$ 、 $L_3$  反向时:

$$\begin{aligned} V_L(t) &= t^{2-\frac{3}{2}n} \left[ \frac{3t^{2n} + 3t^{2n-2} + 3t^{2n-4} + t^2 + 2t + 4 + 3t^{n+1} + 3t^n + 6t^{n-1} + t^{3n-1} - t^{3n-4} + t^{3n-2}}{(1+t)^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3t^3 + 3t^2 + t + 1}{t^4(1+t)^3} \right] \end{aligned}$$

证明: 当  $n$  为偶数且  $L$  的 3 个分支  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  同向时,  $a(L) = 3n - 3$ ,  $b(L) = 5$ ,  $wr(L) = 3n$ , 将各参数代入  $V_L(t) = (-1)^{wr(L)} t^{\frac{b(L)-a(L)+3wr(L)}{4}} T_G(-t, -t^{-1})$  得:

$$\begin{aligned} V_L(t) &= (-1)^{3n} t^{\frac{5-3n+3+9n}{4}} T_{F_{3 \times n}}(-t, -t^{-1}) \\ &= t^{2+\frac{3}{2}n} T_{F_{3 \times n}}(-t, -t^{-1}) \\ &= t^{2+\frac{3}{2}n} \left[ \frac{3t^{2n} + 3t^{2n-2} + 3t^{2n-4} + t^2 + 2t + 4 + 3t^{n+1} + 3t^n + 6t^{n-1} + t^{3n-1} - t^{3n-4} - t^{3n-2}}{(1+t)^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3t^3 + 3t^2 + t + 1}{t^4(1+t)^3} \right] \end{aligned}$$

当  $n$  为偶数且  $L$  的三个分支分别为  $L_1$  与  $L_2$  同向,  $L_3$  与  $L_1$ 、 $L_2$  反向;  $L_1$  与  $L_3$  同向,  $L_2$  与  $L_1$ 、 $L_3$  反向;  $L_2$  与  $L_3$  同向,  $L_1$  与  $L_2$ 、 $L_3$  反向时,  $a(L) = 3n - 3$ ,  $b(L) = 5$ ,  $wr(L) = -n$ , 将各参数代入

$V_L(t) = (-1)^{wr(L)} t^{\frac{b(L)-a(L)+3wr(L)}{4}} T_G(-t, -t^{-1})$  得:

$$\begin{aligned}
V_L(t) &= (-1)^{-n} t^{\frac{5-3n+3-3n}{4}} T_{F_{3 \times n}}(-t, -t^{-1}) \\
&= t^{2-\frac{3}{2}n} T_{F_{3 \times n}}(-t, -t^{-1}) \\
&= t^{2-\frac{3}{2}n} \left[ \frac{3t^{2n} + 3t^{2n-2} + 3t^{2n-4} + t^2 + 2t + 4 + 3t^{n+1} + 3t^n + 6t^{n-1} + t^{3n-1} - t^{3n-4} - t^{3n-2}}{(1+t)^3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{3t^3 + 3t^2 + t + 1}{t^4(1+t)^3} \right]
\end{aligned}$$

#### 4. 结语

本文主要研究了一类花图  $F_{3 \times n}$  的 Tutte 多项式, 根据 Tutte 多项式与 Jones 多项式之间的关系讨论了参数  $a(L)$ 、 $b(L)$ 、 $wr(L)$  在不同情况下的变化规律, 最后计算得到对应于各边均为正号的花图  $F_{3 \times n}$  的链环  $L$  的 Jones 多项式。

#### 参考文献

- [1] Tutte, W.T. (1954) A Contribution to the Theory of Chromatic Polynomials. *Canadian Journal of Mathematics*, **6**, 80-91. <https://doi.org/10.4153/CJM-1954-010-9>
- [2] Jones, V.F.R. (1985) A Polynomial Invariant for Knots via Von Neumann Algebras. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **12**, 103-111. <https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1985-15304-2>
- [3] Kauffman, L.H. (1987) State Models and the Jones Polynomial. *Topology*, **26**, 395-407. [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(87\)90009-7](https://doi.org/10.1016/0040-9383(87)90009-7)
- [4] 陶志雄. 环面链环的多项式[J]. 浙江科技学院学报, 2013, 25(6): 405-408.
- [5] Kwun, Y.C., Nizami, A.R., Nazeer, W., et al. (2018) The Jones Polynomial of Graph Links via the Tutte Polynomial. *Journal of Computational Analysis and Applications*.
- [6] Bolloba, B. (1998) *Modern Graph Theory*. Springer, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0619-4>
- [7] Murasugi, K. (1996) *Knot Theory and Its Applications*. Birkhauser, Basel.
- [8] Kung, J.P.S., Noy, M. and Welsh, D. (2004) Special Issue on the Tutte Polynomial. *Advances in Applied Mathematics*, **32**, 1-2. [https://doi.org/10.1016/S0196-8858\(03\)00073-3](https://doi.org/10.1016/S0196-8858(03)00073-3)
- [9] Mphako-Banda, E. (2007) Some Polynomials of Flower Graphs. *International Mathematical Forum*, **2**, 2511-2518. <https://doi.org/10.12988/imf.2007.07221>