Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(1), 1-9
Published Online January 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.131001

两个无界线性算子乘积的共轭算子

徐宇飞，吴德玉*

内蒙古大学数学科学学院，内蒙古 呼和浩特

收稿日期：2023年12月8日；录用日期：2024年1月2日；发布日期：2024年1月8日

摘 要

本文运用乘积算子的谱的性质，研究了两个无界线性算子乘积的共轭算子。给出了$(AB)^* = B^*A^*$成立的充分条件，作为应用，刻画了无穷维Hamilton算子的辛自伴性。

关键词

共轭算子，无穷维Hamilton 算子，辛自伴性

The Adjoint Operator of the Product of Two Unbounded Linear Operators

Yufei Xu, Deyu Wu*

School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot Inner Mongolia

Received: Dec. 8^{th}, 2023; accepted: Jan. 2^{nd}, 2024; published: Jan. 8^{th}, 2024

Abstract

In this paper, the adjoint operator of the product of two unbounded linear operators

* 通讯作者。

文章引用: 徐宇飞, 吴德玉. 两个无界线性算子乘积的共轭算子[J]. 应用数学进展, 2024, 13(1): 1-9.
DOI: 10.12677/aam.2024.131001

is studied by using the spectral properties of the product operator. Some sufficient conditions for $(AB)^* = B^*A^*$ are given. As applications, the symplectic self-adjointness of infinite dimensional Hamiltonian operator is characterized.

Keywords

Adjoint Operator, Infinite-Dimensional Hamiltonian Operator, Symplectic Self-Adjointness

1. 引言

共轭算子一直以来是算子理论中重要的研究分支, 涉及数值分析、微分方程、数值线性代数、最优化、控制论等领域. 共轭算子的应用极为广泛, 它不仅可以描述自由市场经济中原材料价格和产品价格相互制约相互影响的事实, 体现市场的调价机制, 还在新兴生物医学成像 [1]中起着重要作用. Simon.R.Arridge等人在连续框架下应用PAT正向算子的共轭性给出许多PAT图像重建的算法和公式. 黄永峰等人在文献 [2]中应用共轭线性算子得到关于$\mathcal{PT}-$对称算子的一些性质. Matthew Colbrook等人在文献 [3]中应用求解算子开发了一种计算与自共轭算子相关的谱测度的平滑近似的算法. H.Y.Yau在文献 [4]中应用自共轭算子研究了以时间作为动态变量的量子场相关内容. 算子代数上的线性和非线性映射的保持问题主要是刻画保持代数中元素的某种特征或某种运算不变的映射. 近年来, 国内外诸多学者对算子乘积的保持问题进行了大量的研究. 文献 [5,6]研究了保持两个算子乘积幂零性的线性或非线性映射. 文献 [7,8]考虑了保持两个算子乘积幂等性的线性或非线性映射. 由此, 算子乘积的共轭也尤为重要. 在理论和应用中, 特别是量子力学中所涉及到的大量的线性算子都是无界的, 因而无界线性算子理论是处理近代量子力学的基本数学框架. Souheyb Dehimi在文献 [9]中给出了无界闭算子的平方以及多项式等相关理论.

对于一般的无界线性算子A, B，关系式

$$(AB)^* = B^*A^*. \tag{1}$$

不一定成立.

例 1 设X 是 Hilbert 空间, S： $D(S) \subset X \to X$ 是无界自伴算子, I是定义在全空间上的单位

算子, 取

$$A=\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} I & I \\ I & I \end{bmatrix},$$

则

$$(AB)^* \neq B^*A^*.$$

事实上, $B^*A^*=\begin{bmatrix} S & S \\ S & S \end{bmatrix}$,不是闭算子. 而$(AB)^*$是闭算子.

什么情况下能够使得等式成立, 这一问题引起了广泛关注, 许多学者对此进行了深入的研究. 2011年, M.H.Mortad在文献 [10]中给出: AB是稠定闭算子, 存在可逆算子B^{-1} 且$D(B)\supset R(A), D(B^{-1}(AB)^*)\supset D((AB)^*)$. 则关系式(1)成立. Karl Gustafson在文献 [11]中给出新的补充与改进: 只需AB稠定, $D(B)\supset R(A), R(B)\supset D(A)$, 即可使关系式(1)成立. 本文从乘积算子的谱的性质出发, 给出了关系式(1)成立的充分条件. 作为应用, 本文首先刻画了Hamilton算子的辛自伴性, 其次应用Fuglede定理新推论 [12], 证明了一定条件下两个无界正规算子的乘积仍为正规算子.

2. 预备知识

定义 1 [13] 设T为$D(T)$到Hilbert空间X中的稠定线性算子, T 的共轭算子T^* 定义为从$D(T^*)$到X的映射

$$T^*: D(T^*)\to X,$$

其中

$$D(T^*)=\{y\in X: \exists y^*\in X\text{使得对任意}x\in D(T),(Tx,y)=(x,y^*)\}.$$

注 1 当T稠定时, y^*是唯一的. 但是T^*不一定是稠定的, T^*是稠定的当且仅当T是可闭的.

定义 2 [13] 设$\lambda\in\mathbb{C}$, T是Hilbert 空间X 中的线性算子, 如果算子$T-\lambda I$ 单射, $R(T-\lambda I)=X$ 且$(T-\lambda I)^{-1}$ 有界, 则称$\lambda\in\mathbb{C}$ 是T 的正则点, 所有正则点的集合称为预解集, 记为$\rho(T)$. 有时称$R(T,\lambda)=(T-\lambda I)^{-1}$ 为T的预解式. 预解集$\rho(T)$的补集$\mathbb{C}\setminus\rho(T)$ 称为T的谱集, 记为$\sigma(T)$. 当$\lambda\in\sigma(T)$ 时, 有如下三种可能:

$$\sigma_p(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}: T-\lambda I\text{不是单射}\};$$

$$\sigma_r(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}: T-\lambda I\text{是单射}, \overline{R(T-\lambda T)}\neq X\};$$

$$\sigma_c(T)=\sigma(T)\setminus(\sigma_p(T)\cup\sigma_r(T)).$$

此外, 根据值域的稠定性以及闭性, 对于X中稠定闭线性算子T的点谱和剩余谱还可以进一步细分:

$$\sigma_{p,1}(T)=\{\lambda\in\sigma_p(T):R(T-\lambda I)=X\};$$
$$\sigma_{p,2}(T)=\{\lambda\in\sigma_p(T):\overline{R(T-\lambda I)}=X,R(T-\lambda I)\text{不是闭集}\};$$
$$\sigma_{p,3}(T)=\{\lambda\in\sigma_p(T):\overline{R(T-\lambda I)}\neq X,R(T-\lambda I)\text{是闭集}\};$$
$$\sigma_{p,4}(T)=\{\lambda\in\sigma_p(T):\overline{R(T-\lambda I)}\neq X,R(T-\lambda I)\text{不是闭集}\};$$
$$\sigma_{r,1}(T)=\{\lambda\in\sigma_r(T):R(T-\lambda I)\text{是闭集}\};$$
$$\sigma_{r,2}(T)=\{\lambda\in\sigma_r(T):R(T-\lambda I)\text{不是闭集}\}.$$

注 2 如果T是稠定闭算子, 则$\lambda\in\rho(T)$当且仅当$T-\lambda I$ 双射（单射且满射）; $\lambda\in\sigma_c(T)$当且仅当$T-\lambda I$单射, $\overline{R(T-\lambda T)}=X$, 且$R(T-\lambda I)\neq X$, 这与有界线性算子的情形类似. 此外, 稠定闭算子的下方有界性以及近似点谱的定义与有界线性算子类似.

引理 1 [13] 设T为Hilbert空间H_1中到Hilbert空间H_2中的闭线性算子, 如果存在常数$m>0$ 使得

$$\parallel Tx\parallel_2\geq m\parallel x\parallel_1, \tag{2}$$

则T存在定义在$R(T)$上的有界逆算子T^{-1}, 即T^{-1}有界. 反之, 如果定义在$R(T)$ 上的有界逆算子T^{-1}存在且连续, 那么存在常数$m>0$使得(2)式成立.

注 3 如果线性算子满足关系式(2)时, 称为下方有界.

定义 3 [13] 设T是Hilbert空间H_1中到Hilbert空间H_2中的闭线性算子.
(i)如果$TT^*=T^*T$, 则称T为正规算子;
(ii)如果$T^*=T$, 则称T为自伴算子.

定义 4 [14] 设X为Hilbert空间, $H=\begin{bmatrix}A & B\\ C & -A^*\end{bmatrix}:D(H)\subseteq X\times X\to X\times X$是稠定线性算子, 且$A$为$X$中的稠定闭线性算子, B,C均为自伴算子，则称H为无穷维Hamilton 算子. 如果无穷维Hamilton 算子满足$(JH)^*=JH$, 则称无穷维Hamilton算子是辛自伴的, 其中$J=\begin{bmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{bmatrix}$.

引理 2 [15] 设A,B是Hilbert空间中无界稠定线性算子, 有
(i)$A\subset B$, 则$B^*\subset A^*$;
(ii)$A+B$稠定,则$(A+B)^*\supset A^*+B^*$;
(iii)AB稠定, 则$(AB)^*\supset B^*A^*$.

引理 3 [13] 设T是Hilbert空间H上的自伴算子, 则$\sigma_r(T)=\emptyset$

引理 4 [14] 设A,B是Hilbert空间中无界稠定线性算子, 如果算子AB稠定且B^{-1}在全空间上有界, 则$(AB)^*=B^*A^*$.

引理 5 [15] 设A,B是Hilbert空间中无界稠定线性算子, 若A,B满足下列条件之一, 则AB是闭算子:

(i)A可逆;

(ii)B有界.

引理 6 [12] 设A是Hilbert空间中无界稠定闭线性算子, M, N是Hilbert空间中无界正规算子, 如果$D(N) \subset D(AN) \subset D(A)$, 且$AN \subset MA$ 则

$$AN^* \subset M^*A.$$

3. 主要结果及其证明

下面的结论说明, 当无界线性算子A, B的谱具有一定的性质时, 关系式(1)成立.

定理 1 设A, B是Hilbert空间X中的两个无界稠定线性算子且$\rho(AB) \neq \emptyset$, 如果算子AB是稠定算子,算子B^*A^*是稠定闭算子, 且满足$\sigma_{r,1}(B^*A^*) = \emptyset$, 则关系式

$$(AB)^* = B^*A^*$$

成立.

证明: 由引理2知, 关系式$(AB)^* \supset B^*A^*$显然. 下证$(AB)^* \subset B^*A^*$. 由于$\rho(AB) \neq \emptyset$, 故$\rho((AB)^*) \neq \emptyset$. 令$\lambda \in \rho((AB)^*)$, 事实上, $\lambda \notin \sigma_p(B^*A^*)$显然. 否则, 考虑到$(AB)^* \supset B^*A^*$, 与$\lambda \in \rho((AB)^*)$矛盾.

假定$\lambda \in \sigma_c(B^*A^*)$, 考虑到$B^*A^*$是闭算子, 则$(B^*A^* - \lambda)^{-1}$无界, 另一方面, 由于$\lambda \in \rho((AB)^*)$, 于是存在$M > 0$,使得对任意$x \in D((AB)^*)$, 有

$$\| ((AB)^* - \lambda)x \| \geq M \| x \| .$$

由于$(AB)^* |_{D(B^*A^*)} = B^*A^*$, 于是存在$M > 0$使得

$$\| (B^*A^* - \lambda)x \| \geq M \| x \| .$$

对全体$x \in D(B^*A^*)$, 这蕴含$((B^*A^*) - \lambda)^{-1}$有界, 与无界矛盾, 故$\lambda \notin \sigma_c(B^*A^*)$, 考虑到$\sigma_{r,1}(B^*A^*) = \emptyset$, 即得$\lambda \in \rho(B^*A^*)$.

任取$x^* \in D((AB)^*)$, 考虑$B^*A^* - \lambda$是满射, 存在$x \in D(B^*A^*)$ 使得

$$((AB)^* - \lambda)x^* = (B^*A^* - \lambda)x,$$

由于$(AB)^* |_{D(B^*A^*)} = B^*A^*$, 于是有

$$((AB)^* - \lambda)(x - x^*) = 0,$$

由于$\lambda \in \rho((AB)^*)$, 故$x - x^* = 0$, 这蕴含$x^* = x \in D(B^*A^*)$. 即$(AB)^* \subset B^*A^*$. □

推论 1 令$H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix} : D(H) \subset X \times X \to X \times X$ 是无穷维Hamilton 算子, 如果$\rho(JH) \neq \emptyset$, 则$(JH)^* = JH \Leftrightarrow \sigma_{r,1}(JH) = \emptyset$.

证明： "$\Rightarrow$": $(JH)^* = JH$, 则JH是自伴算子, 由引理3知$\sigma_r(JH) = \emptyset$, 即$\sigma_{r,1}(JH) = \emptyset$.
"$\Leftarrow$":

$$H^* = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix}^*.$$

$$JHJ = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* & C \\ B & -A \end{bmatrix}.$$

显然$H^* \supset JHJ$, 则$(JH)^* = H^*J^* \supset JH$. 下证$(JH)^* \subset JH$.

令$\lambda \in \rho(JH)^*$, 由定理1证明过程可得$\lambda \in \rho(JH)$, 再由$JH-\lambda$满射与$(JH)^* \supset JH$可得$(JH)^* \subset JH$. $\square$

定理 2 设A, B是Hilbert空间X中的两个无界稠定线性算子, AB, B^*A^*是稠定算子, 若$\rho(AB) \cap (\rho(B^*A^*))^* \neq \emptyset$, 则关系式

$$(AB)^* = B^*A^*$$

成立. 其中$(\rho(B^*A^*))^* = \{\overline{\lambda} \in \mathbb{C} : \lambda \in \rho(B^*A^*)\}$.

证明： 只需证明关系式$(AB)^* \subset B^*A^*$即可.

任取$\lambda \in \rho(AB) \cap (\rho(B^*A^*))^*$, 则$\overline{\lambda} \in \rho((AB)^*) \cap \rho(B^*A^*)$,即$(AB)^* - \overline{\lambda}$是双射, $B^*A^* - \overline{\lambda}$是双射. 任取$x^* \in D((AB)^*)$, 由于$B^*A^* - \overline{\lambda}$ 是满射, 存在$x \in D(B^*A^*)$使得

$$((AB)^* - \overline{\lambda})x^* = (B^*A^* - \overline{\lambda})x.$$

由于$(AB)^* |_{D(B^*A^*)} = B^*A^*$. 于是有

$$((AB)^* - \overline{\lambda})(x - x^*) = 0.$$

由于$\overline{\lambda} \in \rho((AB)^*)$, 故$x - x^* = 0$, 这蕴含$x^* = x \in D(B^*A^*)$. 即$(AB)^* \subset B^*A^*$. $\square$

推论 2 设A, B是Hilbert空间X中的两个无界稠定线性算子, 如果存在$\lambda \in \mathbb{R}$ 使得$\lambda \in \rho(AB) \cap \rho(B^*A^*)$, 则关系式

$$(AB)^* = B^*A^*$$

成立.

证明： 存在$\lambda \in \mathbb{R}$, 使得$\lambda \in \rho(AB) \cap \rho(B^*A^*)$成立, 则$\lambda \in \rho((AB)^*) \cap \rho(B^*A^*)$, 由定理2可证得结论成立. $\square$

定理 3 设A, B是Hilbert空间X中的无界稠定闭线性算子, AB稠定且$0 \in \rho(A)$, 如果$R(B) \subset D(A)$, 则$(AB)^* = B^*A^*$.

证明： $0 \in \rho(A)$, $R(B) \subset D(A)$, 则

$$A^{-1}AB = B,$$

两边取共轭, 可得

$$(A^{-1}AB)^* = B^*,$$

由A^{-1}有界可得

$$(A^{-1}AB)^* = (AB)^*(A^{-1})^*.$$

故

$$(AB)^*(A^{-1})^* = B^*.$$

两边同时作用A^*, 可得

$$(AB)^* = B^*A^*.$$

结论证毕. □

作为无界算子乘积的共轭的应用，下面我们将给出两个算子的乘积为正规算子的条件.

定理 4 设A是Hilbert空间X中的无界正规算子, B为X中的无界自伴算子, $0 \in \rho(B)$, $AB = BA$且$D(A) = D(B) = D(AB)$, 则AB, BA是正规算子.

证明： $0 \in \rho(B)$, 由引理4可知

$$(AB)^* = B^*A^*,$$

由引理5可知AB, BA都是闭线性算子. 由引理6可得

$$BA \subset AB \Rightarrow BA^* \subset A^*B.$$

$$AB \subset BA \Rightarrow AB^* \subset B^*A.$$

又算子的正规性与自伴性可得

$$AB(AB)^* = ABB^*A^* = AB^*BA^* \subset B^*AA^*B = B^*A^*AB = (AB)^*(AB).$$

$$(AB)^*AB = B^*A^*AB = BAA^*B^* \subset AB(BA)^* = AB(AB)^*.$$

故

$$(AB)^*(AB) = AB(AB)^*.$$

即AB正规, 又$AB = BA$. 故BA正规. □

定理 5 设B是Hilbert空间X中的无界正规算子, A是Hilbert空间X中的无界自伴算子, $0 \in \rho(A)$, $AB = BA$ 且$D(A) = D(B) = D(AB)$, 则AB, BA是无界正规算子.

证明： 证明方法同定理4. □

下面将举例说明定理的有效性.

例 2 令$X = L^2(0,1)$, 微分算子$B = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}$, $D(B) = \{u \in X : u'$是绝对连续函数$, u', u'' \in X, u(0) = u(1) = 0\}$,

对任意的$u \in L^2(0,1)$, 由边界条件得

$$(Bu,u) = (u',u') \geq 0,$$

即B是非负自伴算子且$0 \in \rho(B)$.

令$A = B^{\frac{1}{2}}$, 同理可证A是自伴算子且$0 \in \rho(A)$.

$$AB = B^{\frac{1}{2}}B = B^{\frac{3}{2}}.$$

$$B^*A^* = BB^{\frac{1}{2}} = B^{\frac{3}{2}}.$$

同理可证$0 \in \rho(AB) \cap (\rho(B^*A^*))^*$. 则$AB$满足定理2的条件.故$(AB)^* = B^*A^*$.

经计算可得

$$(AB)^* = (B^{\frac{3}{2}})^* = B^{\frac{3}{2}}.$$

$$B^*A^* = BB^{\frac{1}{2}} = B^{\frac{3}{2}}.$$

即

$$(AB)^* = B^*A^*.$$

这说明了定理2的有效性.

不同于部分文献从算子的可逆性与值域等方面给出关系式(1)成立的条件, 本文由乘积算子的谱的性质给出了关系式(1)成立的条件, 应用其刻画了Hamilton算子的辛自伴性, 又应用Fuglede定理新推论, 将“两个正规算子乘积(至少一个有界)为正规算子” 推广为“两个无界正规算子的乘积为正规算子”. 这一推广中仍存在部分较强条件, 后续研究可寻求较弱条件.

基金项目

国家自然科学基金项目(11561048, 11761029)，内蒙古自然科学基金项目(2023MS01011, 2022ZD05)资助。

参考文献

[1] Arridge, S.R., Betcke, M.M., Cox, B.T., Lucka, F. and Treeby, B.E. (2016) On the Adjoint Operator in Photoacoustic Tomography. *Inverse Problems*, **32**, Article 115012. https://doi.org/10.1088/0266-5611/32/11/115012

[2] 黄永峰, 曹怀信, 王文华. 共轭线性对称性及其对$\mathcal{PT}$-对称量子理论的应用[J]. 物理学报, 2020, 69(3): 1-10.

[3] Colbrook, M., Horning, A. and Townsend, A. (2021) Computing Spectral Measures of Self-Adjoint Operators. *SIAM Review*, **63**, 489-524. https://doi.org/10.1137/20M1330944

[4] Yau, H.Y. (2020) Self-Adjoint Time Operator of a Quantum Field. *International Journal of Quantum Information*, **18**, Article 1941016. https://doi.org/10.1142/S0219749919410168

[5] Li, C.-K., Šemrl, P. and Sze, N.-S. (2007) Maps Preserving the Nilpotency of Products Operators. *Linear Algebra and Its Applications*, **424**, 222-239. https://doi.org/10.1016/j.laa.2006.11.013

[6] Kuzma, B., Dobovišek, M., Lešnjak, G., Li, C.K. and Petek, T. (2007) Mappings That Preserve Pairs of Operators with Zero Tripie Jordan Product. *Linear Algebra and Its Applications*, **426**, 255-279. https://doi.org/10.1016/j.laa.2007.04.017

[7] Fang, L., Ji, G. and Pang, Y. (2007) Maps Preserving the Idempotency of Products of Operators. *Linear Algebra and Its Applications*, **426**, 40-52. https://doi.org/10.1016/j.laa.2007.03.030

[8] Wang, M., Fang, L. and Ji, G. (2008) Linear Maps Preserving Idempotency of Products or Triple Jordan Products of Operators. *Linear Algebra and Its Applications*, **429**, 181-189. https://doi.org/10.1016/j.laa.2008.02.013

[9] Dehimi, S. and Mortad, M.H. (2023) Unbounded Operators Having Self-Adjoint, Subnormal, or Hyponormal Powers. *Mathematische Nachrichten*, **296**, 3915-3928. https://doi.org/10.1002/mana.202100390

[10] Gustafson, K. (2000) A Composition Adjoint Lemma. Stochastic Processes, Physics and Geometry. *New Interplays*, **2**, 253-258.

[11] Gustafson, K. (2011) On Operator Sum and Product Adjoints and Closures. *Canadian Mathematical Bulletin*, **54**, 456-463. https://doi.org/10.4153/CMB-2011-074-3

[12] Mortad, M.H. (2012) An All-Unbounded-Operator Version of the Fuglede-Putnam Theorem. *Complex Analysis and Operator Theory*, **6**, 1269-1273. https://doi.org/10.1007/s11785-011-0133-6

[13] 吴德玉, 阿拉坦仓. 分块算子矩阵谱理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2013.

[14] 阿拉坦仓, 吴德玉, 黄俊杰, 侯国林. 无穷维Hamilton 算子谱分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2023.

[15] Mortad, M.H. (2012) The Sum of Two Unbounded Linear Operators: Closedness, Self-Adjointness and Normality and Much MORE. arXiv preprint arXiv: 1203.2545.