

一类花图 $f(C_m, F_n)$ 的 Tutte 多项式

周 雪

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2023年12月19日; 录用日期: 2024年1月13日; 发布日期: 2024年1月23日

摘 要

图多项式不变量已被证实在量子化学和生物信息方面有重要的应用。著名的图多项式不变量之一是 Tutte 多项式, 它包含了关于图结构的各种有趣的信息。本文借助 Tutte 多项式的一些性质对一类花图 $f(C_m, F_n)$ 进行研究, 最终得到这类花图 Tutte 多项式的具体表达式。

关键词

花图, Tutte 多项式

The Tutte Polynomials of a Class of Flower Graph $f(C_m, F_n)$

Xue Zhou

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Dec. 19th, 2023; accepted: Jan. 13th, 2024; published: Jan. 23rd, 2024

Abstract

Polynomial graph invariants have been confirmed to have important applications in quantum chemistry and biological information. One of the famous polynomial graph invariants is the Tutte polynomial which gives multifarious interesting information about the graph structure. In this paper, with the help of some properties of Tutte polynomials, a class of flower diagrams $f(C_m, F_n)$ is studied, and finally the specific expressions of Tutte polynomials of this kind of flower diagrams are obtained.

Keywords

Flower Graph, Tutte Polynomial



1. 引言

Tutte 多项式是空间图多项式不变量的一个重要代表, Tutte 多项式[1]是色多项式的推广, 它是由 Tutte 在 1954 年提出的, 并且由 Tutte 多项式可以得到色多项式、流多项式、可靠性多项式等图的多项式不变量[2]。Tutte 多项式包含图的大量信息, 由 Tutte 多项式可以得到图的生成树数目、连通生成子图数目等[3], 从而研究一个图的 Tutte 多项式是极为重要的。近年来, 国内外学者提出了许多关于 Tutte 多项式的研究课题。2013 年, Brennan 利用生成函数的方法计算出扇图的 Tutte 多项式[4]。2016 年, Chen H 和 Deng H 利用生成子图定义计算得到几类无标度网络图的 Tutte 多项式[5]。2019 年, Chen H 和 Guo Q 利用 Tutte 多项式的删除 - 收缩性质计算出交错多边形链的的具体表达式[6]。2021 年, 徐得卿等学者主要利用转移矩阵的方法求解了两类六角系统的 Tutte 多项式[7]。近几年, 许多学者对花图这类图形展开了大量的研究。花图 $f(C_3, F_n)$ 是在 2015 年由 I. S. Kumala 和 A. N. M. Salman 所定义, 并研究了这类花图的彩虹连接数[8]; 2020 年, Pranata P Y 等学者将花图 $f(C_3, F_n)$ 中的循环图 C_3 推广到 C_m , 研究并确定了花图 $f(C_m, F_n)$ 的星数确切值[9]。

本文主要研究一类花图 $f(C_m, F_n)$ 的 Tutte 多项式, 共分为两部分, 第一部分介绍相关的基础知识, 在第二部分, 借助 Tutte 多项式的性质计算得到花图 $f(C_m, F_n)$ 的 Tutte 多项式。

2. 预备知识

2.1. 图

图 G 定义为一个偶对 (V, E) , 记作 $G = (V, E)$, 其中:

- 1) V 是一个有限的非空集合, 其元素称为顶点或点, 用 $V(G)$ 表示顶点集合;
- 2) E 是无序积 $V \times V$ 中的一个子集合, 其元素称为边, 且集合 $V \times V$ 中的元素在 E 中可以重复出现多次, 用 $E(G)$ 表示边的集合。
- 3) 一条边 x, y 被称为连接顶点 x 和 y , 用 xy 表示; 顶点 x 和 y 是这条边的末端顶点。如果 $xy \in E(G)$, 那么 x 和 y 是 G 的相邻顶点, 并且顶点 x 和 y 与边 xy 相伴。如果两条边正好有一个共同的端点, 那么它们就是相邻的[10]。

2.2. Tutte 多项式

图 G 的 Tutte 多项式[11] $T(G; x, y)$ 可以定义为:

$$T(G; x, y) = \begin{cases} 1 & \text{若 } E(G) = \varnothing \\ xT(G/e; x, y) & \text{若 } e \text{ 是割边} \\ yT(G-e; x, y) & \text{若 } e \text{ 是环} \\ T(G-e; x, y) + T(G/e; x, y) & \text{若 } e \text{ 既不是割边也不是环} \end{cases}$$

其中 $G-e$ 和 G/e 分别表示图 G 删除边 e 和收缩边 e 后得到的图。

性质 1: 设 $G \cup G'$ 是 G 和 G' 的不交并, $G * G'$ 是 $G \cap G'$ 当且仅当为一个顶点, 则有:

$$T(G \cup G') = T(G)T(G')$$

$$T(G * G') = T(G)T(G')$$

性质 2: 长为 n 的循环图 C_n 的 Tutte 多项式为:

$$T(C_n; x, y) = \sum_{i=1}^{n-1} x^i + y$$

3. 花图 $f(C_m, F_n)$ 的 Tutte 多项式

定义 3.1 设 C_m 是一个有 m 个点的循环图, $F_n = P_n + \{x\}$, 其中 $P_n = v_1, v_2, \dots, v_n$ 是一条有 n 个顶点的路径, x 与 v_i 相邻, $\forall i \in [1, n]$ 。花图 $f(C_m, F_n)$ 是通过在 C_m 的每条边接枝 $(v_i, x) \in E(F_n)$ 而形成的图, 将花图 (C_m, F_n) 记作 $f(C_m, F_n)$ [9]。花图 $f(C_m, F_n)$ 如图 1 所示。

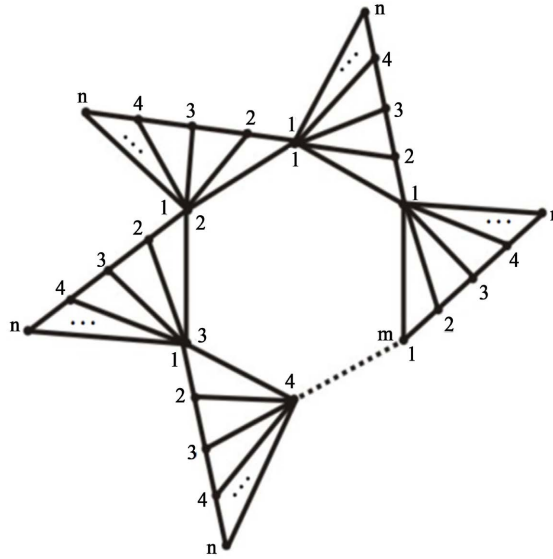


Figure 1. Flower graph $f(C_m, F_n)$

图 1. 花图 $f(C_m, F_n)$

计算花图 $f(C_m, F_n)$ 的 Tutte 多项式

定理 3.1 花图 $f(C_m, F_n)$ 的 Tutte 多项式为:

$$T(f(C_m, F_n); x, y) = \frac{[yr_1 - yT(F_n; x, y) + By]T(F_{n-1}^+; x, y) + 2AT(F_n; x, y) \left(\frac{B + T(F_n; x, y) + r_1}{2} \right)^n}{r_1(B + T(F_n; x, y) + r)} + \frac{[yr_1 + yT(F_n; x, y) - By]T(F_{n-1}^+; x, y) - 2AT(F_n; x, y) \left(\frac{B + T(F_n; x, y) - r_1}{2} \right)^n}{r_1(B + T(F_n; x, y) - r)}$$

其中:

$$A = \frac{(1 + x^2 + y - r + xr - xy)(x + y + 1 + r)}{2xr(1 - x - y - r)} \left[1 - \left(\frac{x + y + 1 + r}{2} \right)^{n-1} \right] - \frac{(1 + x^2 + y + r - xr - xy)(x + y + 1 + r)}{2xr(1 - x - y + r)} \left[1 - \left(\frac{x + y + 1 - r}{2} \right)^{n-1} \right] - y + 1$$

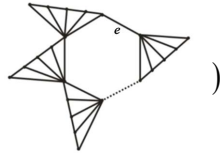
$$\begin{aligned}
 B &= \frac{(y+x^2+x-xy^2+y^2r+yr+xr-y^3)}{r(1-x-y-r)} \left[1 - \left(\frac{x+y+1+r}{2} \right)^{n-1} \right] \\
 &\quad - \frac{(y+x^2+x-xy^2-y^2r-yr-xr-y^3)}{r(1-x-y+r)} \left[1 - \left(\frac{x+y+1-r}{2} \right)^{n-1} \right] - y^2 + 1 \\
 T(F_n; x, y) &= \left(\frac{1+x^2+y-r+xr-xy}{2xr} \right) \left(\frac{x+y+1+r}{2} \right)^n - \left(\frac{1+x^2+y+r-xr-xy}{2xr} \right) \left(\frac{x+y+1-r}{2} \right)^n \\
 T(F_n^+; x, y) &= \frac{y+x^2+x-xy^2+y^2r+yr+xr-y^3}{r(x+y+1+r)} \left(\frac{x+y+1+r}{2} \right)^n \\
 &\quad - \frac{y+x^2+x-xy^2-y^2r-yr-xr-y^3}{r(x+y+1-r)} \left(\frac{x+y+1-r}{2} \right)^n \\
 r &= \sqrt{(x+y+1)^2 - 4xy} ; \quad r_1 = \sqrt{[B+T(F_n; x, y)]^2 - 4BT(F_n; x, y)} .
 \end{aligned}$$

证明：根据 Tutte 多项式的删除 - 收缩性质可得：

$$\begin{aligned}
 T(f(C_m, F_n); x, y) &= T(\text{Diagram 1}) + T(\text{Diagram 2}) \\
 &= T(\text{Diagram 3}) + T(\text{Diagram 4}) + T(\text{Diagram 5}) \\
 &= T(\text{Diagram 6}) + T(F_{n-1}^+; x, y) T(f(C_{m-1}, F_n); x, y) \\
 &= T(F_{n-1}; x, y) [T(F_n; x, y)]^{m-1} + T(\text{Diagram 7}) + T(F_{n-1}^+; x, y) T(f(C_{m-1}, F_n); x, y) \\
 &= T(F_{n-1}; x, y) [T(F_n; x, y)]^{m-1} + T(\text{Diagram 8}) + [T(F_{n-1}^+; x, y) + T(F_{n-2}^+; x, y)] T(f(C_{m-1}, F_n); x, y) \\
 &= [T(F_{n-1}; x, y) + T(F_{n-2}; x, y)] [T(F_n; x, y)]^{m-1} + T(\text{Diagram 9})
 \end{aligned}$$

$$+ [T(F_{n-1}^+; x, y) + T(F_{n-2}^+; x, y)] T(f(C_{m-1}, F_n); x, y)$$

一直这样作下去得到:

$$= [T(F_{n-1}; x, y) + \dots + T(F_2; x, y) + x] [T(F_n; x, y)]^{m-1} + T(\text{Diagram})$$


$$+ [T(F_{n-1}^+; x, y) + \dots + T(F_2^+; x, y) + x + y] T(f(C_{m-1}, F_n); x, y)$$

$$= [T(F_{n-1}; x, y) + \dots + T(F_2; x, y) + x + 1] [T(F_n; x, y)]^{m-1} + [T(F_{n-1}^+; x, y) + \dots + T(F_2^+; x, y) + x + y + 1] T(f(C_{m-1}, F_n); x, y)$$

设:

$$A = T(F_{n-1}; x, y) + \dots + T(F_2; x, y) + x + 1$$

$$B = T(F_{n-1}^+; x, y) + \dots + T(F_2^+; x, y) + x + y + 1$$

已知[12] $T(F_n; x, y) = \left(\frac{1+x^2+y-r+xr-xy}{2xr} \right) \left(\frac{x+y+1+r}{2} \right)^n - \left(\frac{1+x^2+y+r-xr-xy}{2xr} \right) \left(\frac{x+y+1-r}{2} \right)^n$

其中 $r = \sqrt{(x+y+1)^2 - 4xy}$

那么就有:

$$T(F_{n-1}; x, y) + \dots + T(F_2; x, y) + T(F_1; x, y)$$


$$= \frac{(1+x^2+y-r+xr-xy)(x+y+1+r)}{2xr(1-x-y-r)} \left[1 - \left(\frac{x+y+1+r}{2} \right)^{n-1} \right]$$


$$- \frac{(1+x^2+y+r-xr-xy)(x+y+1-r)}{2xr(1-x-y+r)} \left[1 - \left(\frac{x+y+1-r}{2} \right)^{n-1} \right]$$

$$A = \frac{(1+x^2+y-r+xr-xy)(x+y+1+r)}{2xr(1-x-y-r)} \left[1 - \left(\frac{x+y+1+r}{2} \right)^{n-1} \right]$$

$$- \frac{(1+x^2+y+r-xr-xy)(x+y+1+r)}{2xr(1-x-y+r)} \left[1 - \left(\frac{x+y+1-r}{2} \right)^{n-1} \right] - y + 1$$

接下来计算 F_n^+ 的 Tutte 多项式。

$$T(F_n^+; x, y) = T(\text{Diagram})$$


$$= xT(F_{n-1}^+; x, y) + T(\text{Diagram})$$


$$= (x+y+1)T(F_{n-1}^+; x, y) - xyT(F_{n-2}^+; x, y)$$

于是: $T(F_n^+; x, y) = (x+y+1)T(F_{n-1}^+; x, y) - xyT(F_{n-2}^+; x, y)$, 这是一个具有恒定系数的 2 阶线性递归

关系，从中我们可以得到一个特征多项式：

$$\lambda^2 - (x + y + 1)\lambda + xy = 0$$

$$\text{那么, } \lambda_1 \text{ 和 } \lambda_2 = \frac{x + y + 1 \pm r}{2}, \quad r = \sqrt{(x + y + 1)^2 - 4xy}$$

解下列方程组：

$$\begin{cases} T(F_1^+; x, y) = a_1 \left(\frac{x + y + 1 + r}{2} \right) + a_2 \left(\frac{x + y + 1 - r}{2} \right) \\ T(F_2^+; x, y) = a_1 \left(\frac{x + y + 1 + r}{2} \right)^2 + a_2 \left(\frac{x + y + 1 - r}{2} \right)^2 \end{cases}$$

$$\text{其中: } T(F_1^+; x, y) = y^2 + y + x, \quad T(F_2^+; x, y) = y^2 + y + x^2 + x + xy$$

解得：

$$\begin{cases} a_1 = \frac{y + x^2 + x - xy^2 + y^2r + yr + xr - y^3}{r(x + y + 1 + r)} \\ a_2 = \frac{y + x^2 + x - xy^2 - y^2r - yr - xr - y^3}{-r(x + y + 1 - r)} \end{cases}$$

那么， F_n^+ 的 Tutte 多项式就为：

$$\begin{aligned} T(F_n^+; x, y) &= \frac{y + x^2 + x - xy^2 + y^2r + yr + xr - y^3}{r(x + y + 1 + r)} \left(\frac{x + y + 1 + r}{2} \right)^n \\ &\quad - \frac{y + x^2 + x - xy^2 - y^2r - yr - xr - y^3}{r(x + y + 1 - r)} \left(\frac{x + y + 1 - r}{2} \right)^n \end{aligned}$$

$$\text{其中 } r = \sqrt{(x + y + 1)^2 - 4xy}$$

于是，就有：

$$\begin{aligned} &T(F_{n-1}^+; x, y) + \cdots + T(F_2^+; x, y) + T(F_1^+; x, y) \\ &= \frac{(y + x^2 + x - xy^2 + y^2r + yr + xr - y^3)}{r(1 - x - y - r)} \left[1 - \left(\frac{x + y + 1 + r}{2} \right)^{n-1} \right] \\ &\quad - \frac{(y + x^2 + x - xy^2 - y^2r - yr - xr - y^3)}{r(1 - x - y + r)} \left[1 - \left(\frac{x + y + 1 - r}{2} \right)^{n-1} \right] \end{aligned}$$

则：

$$\begin{aligned} B &= T(F_{n-1}^+; x, y) + \cdots + T(F_2^+; x, y) + x + y + 1 \\ &= T(F_{n-1}^+; x, y) + \cdots + T(F_2^+; x, y) + T(F_1^+; x, y) - T(F_1^+; x, y) + x + y + 1 \\ &= \frac{(y + x^2 + x - xy^2 + y^2r + yr + xr - y^3)}{r(1 - x - y - r)} \left[1 - \left(\frac{x + y + 1 + r}{2} \right)^{n-1} \right] \\ &\quad - \frac{(y + x^2 + x - xy^2 - y^2r - yr - xr - y^3)}{r(1 - x - y + r)} \left[1 - \left(\frac{x + y + 1 - r}{2} \right)^{n-1} \right] - y^2 + 1 \end{aligned}$$

由上可知:

$$T(f(C_m, F_n); x, y) = A[T(F_n; x, y)]^{m-1} + BT(f(C_{m-1}, F_n); x, y)$$

那么就有:

$$T(f(C_{m-1}, F_n); x, y) = A[T(F_n; x, y)]^{m-2} + BT(f(C_{m-2}, F_n); x, y)$$

所以:

$$T(f(C_m, F_n); x, y) = [B + T(F_n; x, y)]T(f(C_{m-1}, F_n); x, y) - BT(F_n; x, y)T(f(C_{m-2}, F_n); x, y)$$

从中我们可以得到一个特征多项式:

$$\lambda^2 - [B + T(F_n; x, y)]\lambda + BT(F_n; x, y) = 0$$

解得:

$$\lambda_1 \text{ 和 } \lambda_2 = \frac{B + T(F_n; x, y) \pm r}{2}$$

$$\text{其中 } r_1 = \sqrt{[B + T(F_n; x, y)]^2 - 4BT(F_n; x, y)}$$

解下列方程组:

$$\begin{cases} T(f(C_1, F_n); x, y) = a_1 \left[\frac{B + T(F_n; x, y) + r_1}{2} \right] + a_2 \left[\frac{B + T(F_n; x, y) - r_1}{2} \right] \\ T(f(C_2, F_n); x, y) = a_1 \left[\frac{B + T(F_n; x, y) + r_1}{2} \right]^2 + a_2 \left[\frac{B + T(F_n; x, y) - r_1}{2} \right]^2 \end{cases}$$

其中:

$$T(f(C_1, F_n); x, y) = yT(F_{n-1}^+; x, y)$$

$$T(f(C_2, F_n); x, y) = AT(F_n; x, y) + ByT(F_{n-1}^+; x, y)$$

解得:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{[yr_1 - yT(F_n; x, y) + By]T(F_{n-1}^+; x, y) + 2AT(F_n; x, y)}{r_1(B + T(F_n; x, y) + r)} \\ a_2 = \frac{[yr_1 + yT(F_n; x, y) - By]T(F_{n-1}^+; x, y) - 2AT(F_n; x, y)}{r_1(B + T(F_n; x, y) - r)} \end{cases}$$

综上所述, 花图 $f(C_m, F_n)$ 的 Tutte 多项式可以写为:

$$\begin{aligned} T(f(C_m, F_n); x, y) &= \frac{[yr_1 - yT(F_n; x, y) + By]T(F_{n-1}^+; x, y) + 2AT(F_n; x, y)}{r_1(B + T(F_n; x, y) + r)} \left(\frac{B + T(F_n; x, y) + r_1}{2} \right)^n \\ &+ \frac{[yr_1 + yT(F_n; x, y) - By]T(F_{n-1}^+; x, y) - 2AT(F_n; x, y)}{r_1(B + T(F_n; x, y) - r)} \left(\frac{B + T(F_n; x, y) - r_1}{2} \right)^n \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{(1+x^2+y-r+xr-xy)(x+y+1+r)}{2xr(1-x-y-r)} \left[1 - \left(\frac{x+y+1+r}{2} \right)^{n-1} \right] \\
&\quad - \frac{(1+x^2+y+r-xr-xy)(x+y+1+r)}{2xr(1-x-y+r)} \left[1 - \left(\frac{x+y+1-r}{2} \right)^{n-1} \right] - y + 1 ; \\
B &= \frac{(y+x^2+x-xy^2+y^2r+yr+xr-y^3)}{r(1-x-y-r)} \left[1 - \left(\frac{x+y+1+r}{2} \right)^{n-1} \right] \\
&\quad - \frac{(y+x^2+x-xy^2-y^2r-yr-xr-y^3)}{r(1-x-y+r)} \left[1 - \left(\frac{x+y+1-r}{2} \right)^{n-1} \right] - y^2 + 1 \\
T(F_n; x, y) &= \left(\frac{1+x^2+y-r+xr-xy}{2xr} \right) \left(\frac{x+y+1+r}{2} \right)^n - \left(\frac{1+x^2+y+r-xr-xy}{2xr} \right) \left(\frac{x+y+1-r}{2} \right)^n \\
T(F_n^+; x, y) &= \frac{y+x^2+x-xy^2+y^2r+yr+xr-y^3}{r(x+y+1+r)} \left(\frac{x+y+1+r}{2} \right)^n \\
&\quad - \frac{y+x^2+x-xy^2-y^2r-yr-xr-y^3}{r(x+y+1-r)} \left(\frac{x+y+1-r}{2} \right)^n \\
r &= \sqrt{(x+y+1)^2 - 4xy} ; \quad r_1 = \sqrt{[B+T(F_n; x, y)]^2 - 4BT(F_n; x, y)}
\end{aligned}$$

证毕。

4. 总结

本文主要研究了一类花图 $f(C_m, F_n)$ 的 Tutte 多项式，通过利用 Tutte 多项式的一些性质计算得到了花图 $f(C_m, F_n)$ Tutte 多项式的具体表达式。由于 Tutte 多项式包含图的大量信息，未来还可以通过 Tutte 多项式去研究花图的生成树数目、连通生成子图数目等。

参考文献

- [1] Tutte, W.T. (1954) A Contribution to the Theory of Chromatic Polynomials. *Canadian Journal of Mathematics*, **6**, 80-91. <https://doi.org/10.4153/CJM-1954-010-9>
- [2] Jaeger, F. (1988) Tutte Polynomials and Link Polynomials. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **103**, 647-654.
- [3] Ellis-Monaghan, A.J. and Merino, C. (2008) Graph Polynomials and Their Applications I: The Tutte Polynomial. In: Dehmer, M., Ed., *Structural Analysis of Complex Networks*, Birkhäuser, Boston, 219-255. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4789-6_9
- [4] Brennan, C., Mansour, T. and Mphako-Banda, E. (2013) Tutte Polynomials of Wheels via Generating Functions. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, **39**, 881-891.
- [5] Chen, H. and Deng, H. (2016) Tutte Polynomial of Scale-Free Networks. *Journal of Statistical Physics*, **163**, 714-732. <https://doi.org/10.1007/s10955-016-1465-4>
- [6] Chen, H. and Guo, Q. (2019) Tutte Polynomials of Alternating Polycyclic Chains. *Journal of Mathematical Chemistry*, **57**, 2248-2260. <https://doi.org/10.1007/s10910-019-01069-2>
- [7] Ren, H.Z., Xu, D.Q. and Yang, W.L. (2021) The Tutte Polynomial of Catacondensed Benzenoid Systems. *Journal of Mathematical Chemistry*, **59**, 529-541. <https://doi.org/10.1007/s10910-020-01205-3>
- [8] Kumala, I.S. and Salman, A.N.M. (2015) The Rainbow Connection Number of a Flower (C_m, K_n) and a Flower (C_3, F_n) Graph. *Procedia Computer Science*, **74**, 168-172. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2015.12.094>
- [9] Pranata, P.Y., Kiftiah, M. and Fran, F. (2020) Star Number of Flower Graphs. *AIP Conference Proceedings*, **2268**,

405-415. <https://doi.org/10.1063/5.0018116>

- [10] Bolloba, B. (1998) *Modern Graph Theory*. Springer, Berlin.
- [11] Kung, J.P.S., Noy, M. and Welsh, D. (2004) Special Issue on the Tutte Polynomial. *Advances in Applied Mathematics*, **32**, 1-2. [https://doi.org/10.1016/S0196-8858\(03\)00073-3](https://doi.org/10.1016/S0196-8858(03)00073-3)
- [12] Hall, A. (2014) The Tutte Polynomial Formula for the Class of Twisted Wheel Graphs.