

非均匀弹性梁介质中的怪波

刘琴伶, 张建文*

太原理工大学数学学院, 山西 太原

收稿日期: 2024年1月21日; 录用日期: 2024年2月19日; 发布日期: 2024年2月26日

摘要

本文以非线性偏微分方程的理论为基础, 对非均匀弹性梁介质中的模型——变系数混合非线性薛定谔方程的几种非线性波进行了详细研究。首先根据方程的Lax对构建出了方程的一阶及 N 阶达布变换。利用构建的达布变换, 以零解为种子解求得了变系数混合非线性薛定谔方程的一、二阶孤子解; 选取平面波解为种子解, 得到了一、二阶呼吸子解和一、二、三阶怪波解。此外, 利用符号计算软件, 在不同的系数下, 对所求得的方程的各种非线性波解进行作图分析, 直观地描绘了它们的动力学性质。

关键词

非均匀弹性梁介质, 变系数非线性薛定谔方程, 达布变换法, 怪波解

Rogue Waves in the Non-Uniform Elastic Beam Medium

Qinling Liu, Jianwen Zhang*

School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi

Received: Jan. 21st, 2024; accepted: Feb. 19th, 2024; published: Feb. 26th, 2024

Abstract

Based on the theory of nonlinear partial differential equations, several nonlinear waves in the medium of inhomogeneous elastic beams, *i.e.*, variable coefficient mixed nonlinear Schrödinger equations, are studied in detail. Firstly, according to the Lax pair of the equations, the 1-order and N -order Darboux transformation of the equation are constructed. By the constructed Darboux transformation, the 1- and 2-order soliton solutions of the variable coefficient mixed nonlinear Schrödinger equation are obtained by using the zero solution as the seed solution; the plane wave solution is selected as

*通讯作者。

the seed solution, and the 1- and 2-order breather solutions and the 1-, 2-, and 3-order rogue wave solutions are obtained. In addition, the symbolic calculation software is used to graph and analyze the various nonlinear wave solutions of the obtained equations under different coefficients, and their dynamic properties are intuitively depicted.

Keywords

Non-Uniform Elastic Beam Structure, Variable-Coefficient Mixed Nonlinear Schrödinger Equation, Darboux Transformation, Rogue Wave Solutions

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

非线性动力学和非线性波动的研究对于解决物理学、化学、生物学和地球物理学中遇到的复杂问题有着极其重要的意义[1] [2] [3]。固体结构中的非线性波往往蕴含着极其丰富多彩的物理现象, 这些现象只有借助研究非线性波动特性, 才能得到进一步认识。因此, 开展该类研究有着十分重要的学术价值和工程应用前景[4] [5] [6]。

对于梁中的线性弯曲波, 在 Bernoulli-Euler 梁初等理论下的运动方程忽略了剪切变形的影响, 即在变形过程中横截面始终保持平面并垂直于中心轴, 并且不考虑梁的转动惯性效应的影响[7]。为了研究梁中的非线性弯曲波的传播规律, 我们需要考虑转动惯性的影响和由梁的大挠度引起的几何非线性效应的影响[8]。在本文中, 我们采用 Lagrange 物质描述, 取变形前的梁轴为 x 轴, 中性轴为 y 轴, 梁发生弯曲的方向取为 z 轴, 如图 1 所示[4]。

由于在 x 方向没有外力作用, 我们采用如下位移表达式:

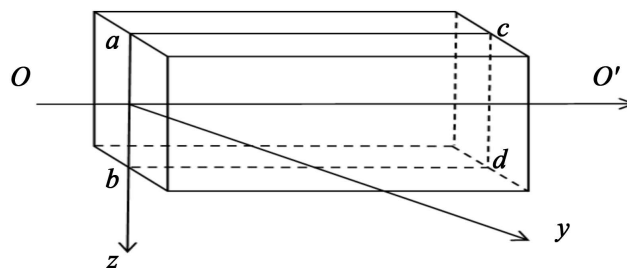


Figure 1. Bending of beams under assumption of plane section

图 1. 平截面假定下梁的弯曲

$$u_{\xi} = -z \frac{\partial W}{\partial \xi}, u_y = 0, u_z = W,$$

其中 W 为 z 方向的挠度, u_{ξ}, u_y, u_z 分别表示 ξ, y, z 方向的位移[9]。利用变分运算, 我们可以得到非线性弯曲波的波动方程:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{c_0^2}{2} \frac{\partial^2 (w^3)}{\partial \xi^2} - r_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) = 0,$$

其中 c_0 为纵向的弹性波波速, r_1 为截面对中性轴的回转半径。该方程同时包含了由梁的大挠度引起的非线性效应和梁的转动惯性引起的几何弥散效应, 当这两种效应达到平衡时, 有稳定传播的孤波或冲击波 [10] [11]。

设该方程的解为

$$w(\xi, \tau) = \varepsilon q(t, x) \exp(i(k\xi - \omega\tau)) + \text{con.}$$

其中 con. 为前一项的共轭。分别对 $O(\varepsilon \exp(i(k\xi - \omega\tau)))$, $O(\varepsilon^2 \exp(i(k\xi - \omega\tau)))$, $O(\varepsilon^3 \exp(i(k\xi - \omega\tau)))$ 近似, 可得到非线性薛定谔方程 [12]:

$$iq_x + \kappa_1 q_{tt} + \kappa_2 |q|^2 q = 0.$$

我们考虑高阶项的影响, 得到混合非线性薛定谔方程 [13]:

$$iq_x + \frac{1}{2} q_{tt} + \frac{1}{4} |q|^2 q - \frac{3i\delta}{16} (|q|^2 q)_t = 0.$$

本文进一步考虑非均匀介质下的模型, 即变系数混合非线性薛定谔方程:

$$iq_x + \frac{1}{2} f(x) q_{tt} + \frac{1}{4} f(x) |q|^2 q - \frac{3i\delta}{16} f(x) (|q|^2 q)_t = 0. \tag{1}$$

以非线性偏微分方程理论为基础, 借助符号计算软件, 完成了以下三个方面的工作: 一、从方程(1)的 Lax 对出发, 构造出一阶及 N 阶达布变换; 二、运用达布变换, 得到了方程在不同初始解下的一、二阶孤子解及呼吸子解; 三、令呼吸子的周期趋于无限大, 得到了方程的一阶及高阶怪波解。对于高阶怪波, 进一步通过改变控制函数的取值, 得到了三角型二、三阶怪波和圆型三阶怪波。

2. 变系数混合非线性薛定谔方程的达布变换

2.1. 方程的 Lax 可积性

我们可以证明方程(1)是 Lax 可积的, 并且方程对应的 Lax 对可以表示为:

$$\varphi_t = B\varphi, \tag{2a}$$

$$\varphi_x = D\varphi, \tag{2b}$$

其中

$$B = -\frac{2i}{3\delta} (\lambda^2 - 1) \sigma_3 + \frac{1}{2} \lambda Q, \tag{3a}$$

$$D = f(x) \left[\frac{4i}{9\delta^2} (\lambda^2 - 1)^2 \right] \sigma_3 - f(x) \frac{\lambda}{3\delta} (\lambda^2 - 1) Q + f(x) \frac{i\lambda}{4} \sigma_3 Q_t + f(x) \frac{i\lambda^2}{8} \sigma_3 Q^2 - f(x) \frac{3\lambda\delta}{32} Q^3, \tag{3b}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & q^*(x, t) \\ -q(x, t) & 0 \end{pmatrix},$$

这里 λ 是谱参数, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$ (T 表示矩阵的转置)。事实上, φ 满足 $\varphi_{xt} = \varphi_{tx}$, 则可得到零曲率方程:

$$D_t - B_x + [D, B] = 0, \tag{4}$$

其中 $[D, B] = DB - BD$, 由此方程可得到变系数混合非线性薛定谔方程(1)。

2.2. 一阶达布变换

经过计算, 我们得到方程(1)的一阶达布变换矩阵满足以下形式[14]:

$$T = \begin{pmatrix} -1 + a_2 \lambda^2 & b_1 \lambda \\ c_1 \lambda & -1 + d_2 \lambda^2 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

其中

$$a_2 = \frac{\lambda_1^* \psi_1 \psi_1^* + \lambda_1 \psi_2 \psi_2^*}{\lambda_1 \lambda_1^* (\lambda_1 \psi_1 \psi_1^* + \lambda_1^* \psi_2 \psi_2^*)} = \frac{\begin{vmatrix} \psi_1 & \lambda_1 \psi_2 \\ -\psi_2^* & \lambda_1^* \psi_1^* \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1^2 \psi_1 & \lambda_1 \psi_2 \\ -\lambda_1^{*2} \psi_2^* & \lambda_1^* \psi_1^* \end{vmatrix}}, \quad (6a)$$

$$b_1 = \frac{-\lambda_1^2 \psi_1 \psi_2^* + \lambda_1^{*2} \psi_1^* \psi_2^*}{\lambda_1 \lambda_1^* (\lambda_1 \psi_1 \psi_1^* + \lambda_1^* \psi_2 \psi_2^*)} = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1^2 \psi_1 & \psi_1 \\ -\lambda_1^{*2} \psi_2^* & -\psi_2^* \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1^2 \psi_1 & \lambda_1 \psi_2 \\ -\lambda_1^{*2} \psi_2^* & \lambda_1^* \psi_1^* \end{vmatrix}}, \quad (6b)$$

$$c_1 = \frac{-\lambda_1^2 \psi_1^* \psi_2 + \lambda_1^{*2} \psi_1^* \psi_2^*}{\lambda_1 \lambda_1^* (\lambda_1^* \psi_1 \psi_1^* + \lambda_1 \psi_2 \psi_2^*)} = \frac{\begin{vmatrix} \psi_2 & \lambda_1^2 \psi_2 \\ \psi_1^* & \lambda_1^{*2} \psi_1^* \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 \psi_1 & \lambda_1^2 \psi_2 \\ -\lambda_1^* \psi_2^* & \lambda_1^{*2} \psi_1^* \end{vmatrix}}, \quad (6c)$$

$$d_2 = \frac{\lambda_1 \psi_1 \psi_1^* + \lambda_1^* \psi_2 \psi_2^*}{\lambda_1 \lambda_1^* (\lambda_1^* \psi_1 \psi_1^* + \lambda_1 \psi_2 \psi_2^*)} = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 \psi_1 & \psi_2 \\ -\lambda_1^* \psi_2^* & \psi_1^* \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 \psi_1 & \lambda_1^2 \psi_2 \\ -\lambda_1^* \psi_2^* & \lambda_1^{*2} \psi_1^* \end{vmatrix}}. \quad (6d)$$

矩阵 T 满足方程组

$$T_t + TB - B^* T = 0, \quad T_x + T\mathcal{D} - \mathcal{D}^* T = 0,$$

其中 B^* 和 \mathcal{D}^* 是将矩阵 B 和 \mathcal{D} 中的函数 $q(x, t)$ 用新函数 $q^{[1]}(x, t)$ 代替后的新矩阵。

根据上述方程组, 我们得到方程(1)的一阶达布变换:

$$q^{[1]}(x, t) = q(x, t) \frac{d_2}{a_2} + \frac{8i}{3\delta} \frac{c_1}{a_2}. \quad (7)$$

2.3. N 阶达布变换

方程(1)的 N 阶达布变换矩阵有以下形式:

$$T = \begin{pmatrix} (-1)^N + \sum_{n=1}^N a_{2n} \lambda^{2n} & \sum_{n=1}^N b_{2n-1} \lambda^{2n-1} \\ \sum_{n=1}^N c_{2n-1} \lambda^{2n-1} & (-1)^N + \sum_{n=1}^N d_{2n} \lambda^{2n} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

令

$$\Lambda_n = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 \psi_{1,1} & \cdots & \lambda_1^{2n-2} \psi_{1,1} & \lambda_1^{2n} \psi_{1,1} & \cdots & \lambda_1^{2n-3} \psi_{2,1} & \lambda_1^{2n-1} \psi_{2,1} \\ \lambda_2^2 \psi_{1,2} & \cdots & \lambda_2^{2n-2} \psi_{1,2} & \lambda_2^{2n} \psi_{1,2} & \cdots & \lambda_2^{2n-3} \psi_{2,2} & \lambda_2^{2n-1} \psi_{2,2} \\ \lambda_3^2 \psi_{1,3} & \cdots & \lambda_3^{2n-2} \psi_{1,3} & \lambda_3^{2n} \psi_{1,3} & \cdots & \lambda_3^{2n-3} \psi_{2,3} & \lambda_3^{2n-1} \psi_{2,3} \\ \lambda_4^2 \psi_{1,4} & \cdots & \lambda_4^{2n-2} \psi_{1,4} & \lambda_4^{2n} \psi_{1,4} & \cdots & \lambda_4^{2n-3} \psi_{2,4} & \lambda_4^{2n-1} \psi_{2,4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{2n-1}^2 \psi_{1,2n-1} & \cdots & \lambda_{2n-1}^{2n-2} \psi_{1,2n-1} & \lambda_{2n-1}^{2n} \psi_{1,2n-1} & \cdots & \lambda_{2n-1}^{2n-3} \psi_{2,2n-1} & \lambda_{2n-1}^{2n-1} \psi_{2,2n-1} \\ \lambda_{2n}^2 \psi_{1,2n} & \cdots & \lambda_{2n}^{2n-2} \psi_{1,2n} & \lambda_{2n}^{2n} \psi_{1,2n} & \cdots & \lambda_{2n}^{2n-3} \psi_{2,2n} & \lambda_{2n}^{2n-1} \psi_{2,2n} \end{pmatrix},$$

$$\Theta_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 \psi_{1,1} & \cdots & \lambda_1^{2n-3} \psi_{1,1} & \lambda_1^{2n-1} \psi_{1,1} & \cdots & \lambda_1^{2n-2} \psi_{2,1} & \lambda_1^{2n} \psi_{2,1} \\ \lambda_2 \psi_{1,2} & \cdots & \lambda_2^{2n-3} \psi_{1,2} & \lambda_2^{2n-1} \psi_{1,2} & \cdots & \lambda_2^{2n-2} \psi_{2,2} & \lambda_2^{2n} \psi_{2,2} \\ \lambda_3 \psi_{1,3} & \cdots & \lambda_3^{2n-3} \psi_{1,3} & \lambda_3^{2n-1} \psi_{1,3} & \cdots & \lambda_3^{2n-2} \psi_{2,3} & \lambda_3^{2n} \psi_{2,3} \\ \lambda_4 \psi_{1,4} & \cdots & \lambda_4^{2n-3} \psi_{1,4} & \lambda_4^{2n-1} \psi_{1,4} & \cdots & \lambda_4^{2n-2} \psi_{2,4} & \lambda_4^{2n} \psi_{2,4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{2n-1} \psi_{1,2n-1} & \cdots & \lambda_{2n-1}^{2n-3} \psi_{1,2n-1} & \lambda_{2n-1}^{2n-1} \psi_{1,2n-1} & \cdots & \lambda_{2n-1}^{2n-2} \psi_{2,2n-1} & \lambda_{2n-1}^{2n} \psi_{2,2n-1} \\ \lambda_{2n} \psi_{1,2n} & \cdots & \lambda_{2n}^{2n-3} \psi_{1,2n} & \lambda_{2n}^{2n-1} \psi_{1,2n} & \cdots & \lambda_{2n}^{2n-2} \psi_{2,2n} & \lambda_{2n}^{2n} \psi_{2,2n} \end{pmatrix}.$$

通过计算可得:

a_{2n} 是由将 Λ_n 的第 n 列换成 $(-(-1)^n \psi_{1,1}, -(-1)^n \psi_{1,2}, \dots, -(-1)^n \psi_{1,2n})^T$ 后的矩阵为分子和 Θ_n 为分母组成的;

b_{2n-1} 是由将 Λ_n 的第 $2n$ 列换成 $(-(-1)^n \psi_{1,1}, -(-1)^n \psi_{1,2}, \dots, -(-1)^n \psi_{1,2n})^T$ 后的矩阵为分子和 Θ_n 为分母组成的;

c_{2n-1} 是由将 Θ_n 的第 n 列换成 $(-(-1)^n \psi_{1,1}, -(-1)^n \psi_{1,2}, \dots, -(-1)^n \psi_{1,2n})^T$ 后的矩阵为分子和 Θ_n 为分母组成的;

d_{2n} 是由将 Θ_n 的第 $2n$ 列换成 $(-(-1)^n \psi_{1,1}, -(-1)^n \psi_{1,2}, \dots, -(-1)^n \psi_{1,2n})^T$ 后的矩阵为分子和 Θ_n 为分母组成的.

T 仍然满足以下条件:

$$T_i + TB - B^T T = 0, \quad T_x + T\mathcal{D} - \mathcal{D}^T T = 0,$$

其中 $B, B', \mathcal{D}, \mathcal{D}'$ 仍然保持原来的形式, 但 $q(x, t)$ 已经变成 $q^{[N]}(x, t)$, 因此得到方程(2)的 N 阶达布变换:

$$q^{[N]}(x, t) = q(x, t) \frac{d_{2N}}{a_{2N}} + \frac{8i}{3\delta} \frac{c_{2N-1}}{a_{2N}}. \tag{9}$$

3. 变系数混合非线性薛定谔方程的孤子解

3.1. 一阶孤子解

本节我们选取变系数混合非线性薛定谔方程的零种子解 $q = 0$, 将其代入到 Lax 对中, 系数矩阵变为:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{2i(\lambda^2 - 1)}{3\delta} & 0 \\ 0 & \frac{2i(\lambda^2 - 1)}{3\delta} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D} = \begin{pmatrix} \frac{4i(\lambda^2 - 1)^2 \mathcal{F}(x)}{9\delta^2} & 0 \\ 0 & -\frac{4i(\lambda^2 - 1)^2 \mathcal{F}(x)}{9\delta^2} \end{pmatrix}.$$

设 $\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ 是方程组(2)当 $\lambda = \lambda_1$ 时的解, 则 $\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ 的具体表达式可通过求解方程组(2)求得:

$$\begin{cases} \psi_1 = h_1 e^{-\frac{4i(\lambda_1^2-1)^2}{9\delta^2} \int f(x) dx - \frac{2i(\lambda_1^2-1)}{3\delta} t} \\ \psi_2 = h_2 e^{\frac{4i(\lambda_1^2-1)^2}{9\delta^2} \int f(x) dx + \frac{2i(\lambda_1^2-1)}{3\delta} t} \end{cases}, \quad (10)$$

其中 h_1, h_2 为常数。其共轭的具体形式为:

$$\begin{cases} \psi_1^* = h_1^* e^{\frac{4i(\lambda_1^{*2}-1)^2}{9\delta^2} \int f(x) dx + \frac{2i(\lambda_1^{*2}-1)}{3\delta} t} \\ \psi_2^* = h_2^* e^{-\frac{4i(\lambda_1^{*2}-1)^2}{9\delta^2} \int f(x) dx - \frac{2i(\lambda_1^{*2}-1)}{3\delta} t} \end{cases}. \quad (11)$$

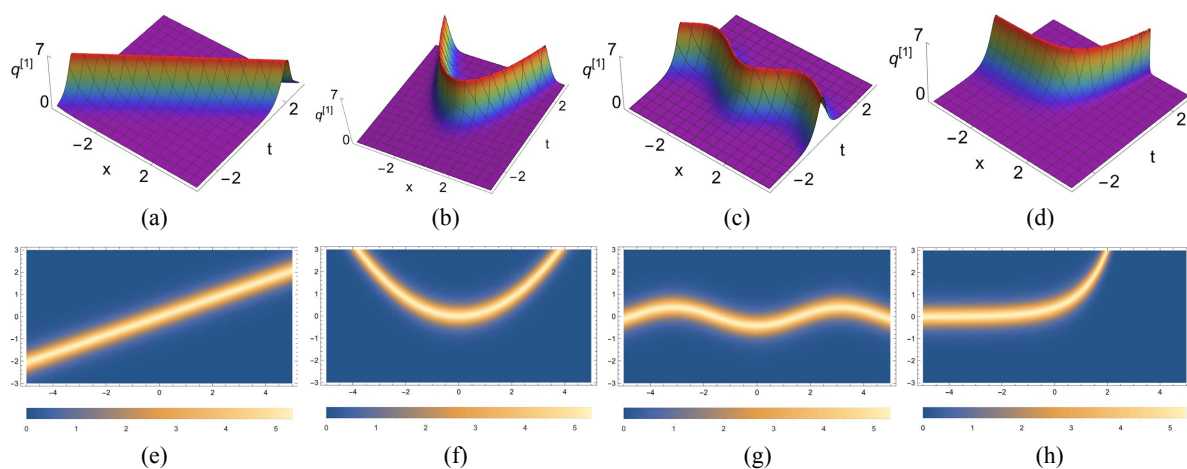
此时方程(2)的一阶达布变换 $q^{[1]}(x, t)$ 的具体表达式为:

$$q^{[1]}(x, t) = \frac{(\lambda_1 \psi_1 \psi_1^* + \lambda_1^* \psi_2 \psi_2^*) [-8i(\lambda_1^2 - \lambda_1^{*2}) \psi_2 \psi_1^* + 3\delta q (\lambda_1 \psi_1 \psi_1^* + \lambda_1^* \psi_2 \psi_2^*)]}{3\delta (\lambda_1^* \psi_1 \psi_1^* + \lambda_1 \psi_2 \psi_2^*)^2}. \quad (12)$$

将表达式(10)和(11)代入(12)中, 并对参数赋值, 可以得到方程(1)的一阶孤子解。其动力学特征如图 2 所示。

3.2. 二阶孤子解

我们仍然选取变系数混合非线性薛定谔方程的零种子解 $q = 0$ 来构造二阶孤子解。我们需要构造 Lax 对(2)的两组解: $\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$, 分别对应 $\lambda = \lambda_1$ 和 λ_2 。类似于 3.1 节, 这两组解的具体形式如下:



- (a) $f(x)=1, \lambda_1=1.3+i, c=c'=0, \delta=1$; (b) $f(x)=x, \lambda_1=1.3+i, c=c'=0, \delta=1$;
(c) $f(x)=\sin x, \lambda_1=1.3+i, c=c'=0, \delta=1$; (d) $f(x)=e^x, \lambda_1=1.3+i, c=c'=0, \delta=1$.

Figure 2. The first-order soliton solution of Eq. (1). (a)~(d) are 3D plots, and (e)~(h) are density plots corresponding to (a)~(d)

图 2. 方程(1)的一阶孤子解。(a)~(d)为 3D 图, (e)~(h)为(a)~(d)对应的密度图

$$\begin{cases} \psi_1 = h_1 e^{-\frac{4i(\lambda_1^2-1)^2}{9\delta^2} \int f(x) dx - \frac{2i(\lambda_1^2-1)}{3\delta} t} \\ \psi_2 = h_2 e^{-\frac{4i(\lambda_2^2-1)^2}{9\delta^2} \int f(x) dx + \frac{2i(\lambda_2^2-1)}{3\delta} t} \end{cases}, \quad (13)$$

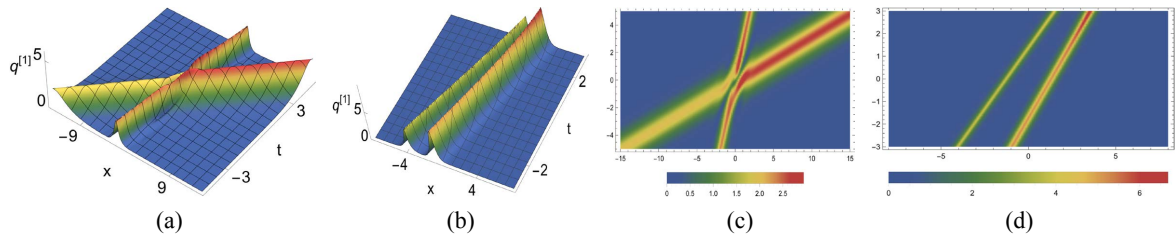
$$\begin{cases} \eta_1 = h_3 e^{-\frac{4i(\lambda_1^2-1)^2}{9\delta^2} \int f(x) dx - \frac{2i(\lambda_1^2-1)}{3\delta} t} \\ \eta_2 = h_4 e^{-\frac{4i(\lambda_2^2-1)^2}{9\delta^2} \int f(x) dx + \frac{2i(\lambda_2^2-1)}{3\delta} t} \end{cases}. \quad (14)$$

根据 2.3 节, 方程(1)二阶达布变换为:

$$q^{[2]}(x,t) = q(x,t) \frac{d_4}{a_4} + \frac{8i}{3\delta} \frac{c_3}{a_4}. \quad (15)$$

其中 a_4 、 b_3 、 c_3 、 d_4 的具体表达形式可根据 2.3 节求得。

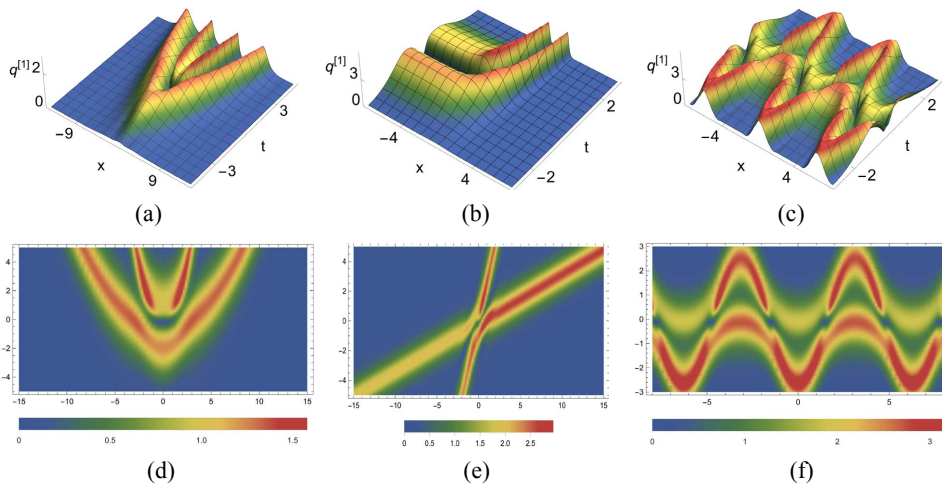
通过对参数的赋值, 我们可以得到方程(1)的二阶孤子解。其动力学特征如图 3、图 4 所示:



(a) $f(x)=1, \lambda_1=1-0.5i, \lambda_2=0.3-i, c=c'=0, \delta=1$; (b) $f(x)=1, \lambda_1=1-i, \lambda_2=1-0.9i, c=c'=0, \delta=1$.

Figure 3. 2-order soliton solutions of Eq. (1). (a) and (b) are 3D plots, and (c) and (d) are density plots corresponding to (a) and (b)

图 3. 方程(1)的二阶孤子解。(a)和(b)为 3D 图, (c)和(d)为(a)和(b)对应的密度图



(a) $f(x)=x, \lambda_1=1-0.5i, \lambda_2=0.5-i, c=c'=0, \delta=2$; (b) $f(x)=e^x, \lambda_1=1-0.5i, \lambda_2=0.5-i, c=c'=0, \delta=1$;
(c) $f(x)=\sin x, \lambda_1=1-0.5i, \lambda_2=0.5-i, c=c'=0, \delta=1$.

Figure 4. 2-order soliton solutions of Eq. (1). (a)~(c) are 3D plots, and (d)~(f) are density plots corresponding to (a)~(c)

图 4. 方程(1)的二阶孤子解。(a)~(c)为 3D 图, (d)~(f)为(a)~(c)对应的密度图

4. 变系数混合非线性薛定谔方程的呼吸子解

在本节中, 我们将应用达布变换来讨论变系数混合非线性薛定谔方程的呼吸子解。设方程(1)的种子解为:

$$q(x, t) = ae^{ik(x)}, \quad q^*(x, t) = ae^{-ik(x)},$$

其中 $a \in R$ 且 $a \neq 0$, $k(x)$ 是实函数。将其代入到方程(1)中, 可得到色散关系:

$$k(x) = \int \frac{a^2}{4} f(x) dx. \quad (16)$$

由

$$\varphi_t = B\varphi,$$

其中 $B = \begin{pmatrix} -\frac{2i(-1+\lambda^2)}{3\delta} & \frac{1}{2}a\lambda e^{-ik(x)} \\ -\frac{1}{2}a\lambda e^{ik(x)} & \frac{2i(-1+\lambda^2)}{3\delta} \end{pmatrix}$, 可得到

$$\begin{cases} \varphi_{1t} = -\frac{2i(-1+\lambda^2)}{3\delta}\varphi_1 + \frac{1}{2}a\lambda e^{-ik(x)}\varphi_2 \\ \varphi_{2t} = -\frac{1}{2}a\lambda e^{ik(x)}\varphi_1 + \frac{2i(-1+\lambda^2)}{3\delta}\varphi_2 \end{cases}. \quad (17)$$

设

$$\begin{cases} \varphi_1(x, t) = f_1(x, t)e^{-\frac{i}{2}k(x)} \\ \varphi_2(x, t) = f_2(x, t)e^{\frac{i}{2}k(x)} \end{cases},$$

将其代入方程组(17)中求解可得:

$$\begin{pmatrix} f_1(x, t) \\ f_2(x, t) \end{pmatrix} = e^A \left[\alpha \begin{pmatrix} 3a\delta\lambda i \\ \theta + 4 - 4\lambda^2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \theta - 4 + 4\lambda^2 \\ -3a\delta\lambda i \end{pmatrix} \right] + e^{-A} \left[\alpha \begin{pmatrix} \theta + 4 - 4\lambda^2 \\ 3a\delta\lambda i \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3a\delta\lambda i \\ \theta - 4 + 4\lambda^2 \end{pmatrix} \right], \quad (18)$$

其中 $\theta = \sqrt{16 - (32 - 9a^2\delta^2)\lambda^2 + 16\lambda^4}$, $A = \int \frac{i\theta(-9a^2\delta^2 + 32(\lambda^2 - 1))}{288\delta^2} f(x) dx - \frac{i\theta}{6\delta} t$.

4.1. 一阶呼吸子

设 $\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ 是方程组(2)当 $\lambda = \lambda_1$ 时的解, 则

$$\begin{cases} \psi_1(x, t) = \rho_1(x, t)e^{-\frac{i}{2}k(x)} \\ \psi_2(x, t) = \rho_2(x, t)e^{\frac{i}{2}k(x)} \end{cases}, \quad (19)$$

其中

$$\rho_1(x, t) = e^A \left[\beta(\theta_1 - 4 + 4\lambda_1^2) + 3a\delta\lambda_1 i\alpha \right] + e^{-A} \left[\alpha(\theta_1 + 4 - 4\lambda_1^2) - 3a\delta\lambda_1 i\beta \right],$$

$$\rho_2(x,t) = e^{-A_1} \left[\alpha(\theta_1 + 4 - 4\lambda_1^2) - 3a\delta\lambda_1 i\beta \right] + e^{-A_1} \left[\beta(\theta_1 - 4 + 4\lambda_1^2) + 3a\delta\lambda_1 i\alpha \right],$$

$$A_1 = \int \frac{i\theta_1(-9a^2\delta^2 + 32(\lambda_1^2 - 1))}{288\delta^2} f(x) dx - \frac{i\theta_1}{6\delta} t, \quad \theta_1 = \sqrt{16 - (32 - 9a^2\delta^2)\lambda_1^2 + 16\lambda_1^4}.$$

其共轭的具体形式为:

$$\begin{cases} \psi_1^*(x,t) = \rho_1^*(x,t) e^{\frac{i}{2}k(x)} \\ \psi_2^*(x,t) = \rho_2^*(x,t) e^{-\frac{i}{2}k(x)} \end{cases} \quad (20)$$

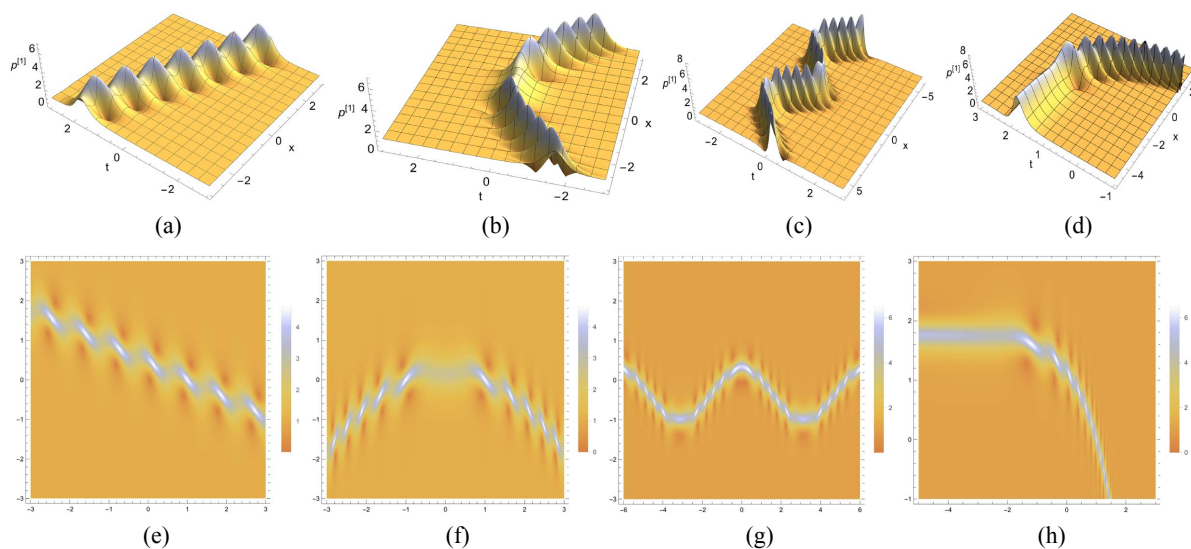
其中

$$\rho_1^*(x,t) = e^{A_1^*} \left[\beta(\theta_1^* - 4 + 4\lambda_1^{*2}) - 3a\delta\lambda_1^* i\alpha \right] + e^{-A_1^*} \left[\alpha(\theta_1^* + 4 - 4\lambda_1^{*2}) + 3a\delta\lambda_1^* i\beta \right],$$

$$\rho_2^*(x,t) = e^{-A_1^*} \left[\alpha(\theta_1^* + 4 - 4\lambda_1^{*2}) + 3a\delta\lambda_1^* i\beta \right] + e^{A_1^*} \left[\beta(\theta_1^* - 4 + 4\lambda_1^{*2}) - 3a\delta\lambda_1^* i\alpha \right],$$

$$\theta_1^* = \sqrt{16 - (32 - 9a^2\delta^2)\lambda_1^{*2} + 16\lambda_1^{*4}}, \quad A_1^* = \int \frac{i\theta_1^*(-9a^2\delta^2 + 32(\lambda_1^{*2} - 1))}{288\delta^2} f(x) dx + \frac{i\theta_1^*}{6\delta} t.$$

将表达式(19)和(20)代入一阶达布变换(7)中, 可以求出方程(1)在平面波背景下的一阶呼吸子解, 如图5所示。



- (a) $f(x)=1, \lambda_1 = 2.05 + 2.05i, a=1, \delta=3, \alpha=\beta=1, h_1=h_2=1$;
- (b) $f(x)=x, \lambda_1 = 2.05 + 2.05i, a=1, \delta=3, \alpha=\beta=1, h_1=h_2=1$;
- (c) $f(x)=x, \lambda_1 = 2.05 + 2.05i, a=1, \delta=3, \alpha=\beta=1, h_1=h_2=1$;
- (d) $f(x)=e^x, \lambda_1 = 2.05 + 2.05i, a=1, \delta=2, \alpha=\beta=1, h_1=h_2=1$.

Figure 5. 1-order breather solutions of Eq. (1). (a)~(d) are 3D plots, and (e)~(h) are density plots corresponding to (a)~(d)
图 5. 方程(1)的一阶呼吸子解。(a)~(d)为 3D 图, (e)~(h)为(a)~(d)对应的密度图

4.2. 二阶呼吸子

设 $\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$ 分别为 $\lambda = \lambda_1$ 和 λ_2 时方程组(2)的解, 则

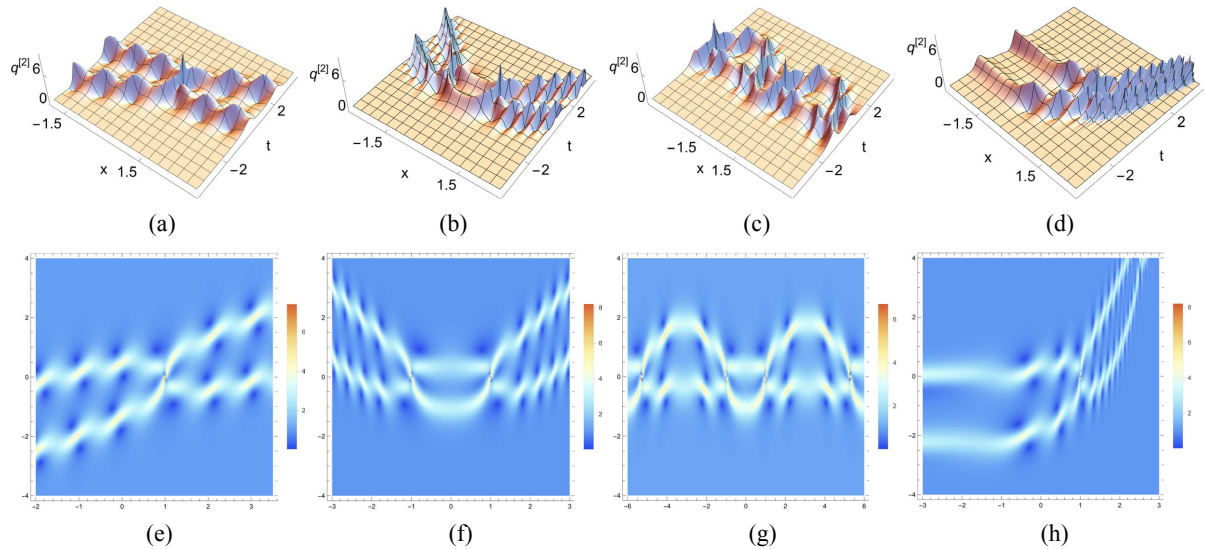
$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}k(x)} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}k(x)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1(x,t) \\ \rho_2(x,t) \end{pmatrix}, \tag{21a}$$

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}k(x)} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}k(x)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_3(x,t) \\ \rho_4(x,t) \end{pmatrix}, \tag{21b}$$

其中

$$\begin{aligned} \rho_1(x,t) &= e^{A_1} [\beta(\theta_1 - 4 + 4\lambda_1^2) + 3a\delta\lambda_1 i\alpha] + e^{-A_1} [\alpha(\theta_1 + 4 - 4\lambda_1^2) - 3a\delta\lambda_1 i\beta], \\ \rho_2(x,t) &= e^{A_1} [\alpha(\theta_1 + 4 - 4\lambda_1^2) - 3a\delta\lambda_1 i\beta] + e^{-A_1} [\beta(\theta_1 - 4 + 4\lambda_1^2) + 3a\delta\lambda_1 i\alpha], \\ \rho_3(x,t) &= e^{A_2} [\beta(\theta_2 - 4 + 4\lambda_2^2) + 3a\delta\lambda_2 i\alpha] + e^{-A_2} [\alpha(\theta_2 + 4 - 4\lambda_2^2) - 3a\delta\lambda_2 i\beta], \\ \rho_4(x,t) &= e^{A_2} [\alpha(\theta_2 + 4 - 4\lambda_2^2) - 3a\delta\lambda_2 i\beta] + e^{-A_2} [\beta(\theta_2 - 4 + 4\lambda_2^2) + 3a\delta\lambda_2 i\alpha], \\ A_1 &= \int \frac{i\theta_1(-9a^2\delta^2 + 32(\lambda_1^2 - 1))}{288\delta^2} f(x) dx - \frac{i\theta_1}{6\delta} t, \quad \theta_1 = \sqrt{16 - (32 - 9a^2\delta^2)\lambda_1^2 + 16\lambda_1^4}, \\ A_2 &= \int \frac{i\theta_2(-9a^2\delta^2 + 32(\lambda_2^2 - 1))}{288\delta^2} f(x) dx - \frac{i\theta_2}{6\delta} t, \quad \theta_2 = \sqrt{16 - (32 - 9a^2\delta^2)\lambda_2^2 + 16\lambda_2^4}. \end{aligned}$$

将表达式(2)代入高阶达布变换(9)并取 $N = 2$ ，我们可以得到平面波背景下的二阶呼吸子解，如图 6 所示。



$\lambda_1 = 2.05 + 2.05i, \lambda_2 = 2 + 2i, a = 1, \delta = 3, \alpha = \beta = 1, h_j = 1, j = 1, 2, 3, 4$;
 (a) $f(x) = 1$; (b) $f(x) = x$; (c) $f(x) = \sin x$; (d) $f(x) = e^x$.

Figure 6. 2-order breather solutions of Eq. (1). (a)~(d) are 3D plots, and (e)~(h) are density plots corresponding to (a)~(d)
图 6. 方程(1)的二阶呼吸子解。(a)~(d)为 3D 图，(e)~(h)为(a)~(d)对应的密度图

5. 变系数混合非线性薛定谔方程的怪波解

在本节中, 我们研究变系数混合非线性薛定谔方程的怪波解。首先将呼吸子的周期变为无限大, 即频率趋于零:

$$\theta = \sqrt{(4 + 3m\delta)^2 - (32 + 24m\delta - 9a^2\delta^2)\lambda^2 + 16\lambda^4} \rightarrow 0.$$

因为当 $\alpha = \frac{1}{8}\sqrt{64 - 9a^2\delta^2}$, $\beta = \frac{3a\delta}{8}$, $\lambda = \alpha + i\beta$ 时, $\theta = 0$ 。所以, 为了使频率趋于 0, 我们取 $\lambda_1 = \alpha + i\beta + g$, 其中 g 是一个小实参数。

设方程(1)的种子解为:

$$q(x, t) = ae^{ik(x)}, \quad q^*(x, t) = ae^{-ik(x)}.$$

取 $\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ 是方程组(2)当 $\lambda = \lambda_1$ 时的解, 其可表示为:

$$\begin{cases} \psi_1 = (D_1W_{11} + D_2W_{21} + D_3W'_{12} + D_4W'_{22})e^{\frac{i}{2}k(x)} \\ \psi_2 = (D_1W_{12} + D_2W_{22} + D_3W'_{11} + D_4W'_{21})e^{\frac{i}{2}k(x)} \end{cases} \quad (22)$$

其中

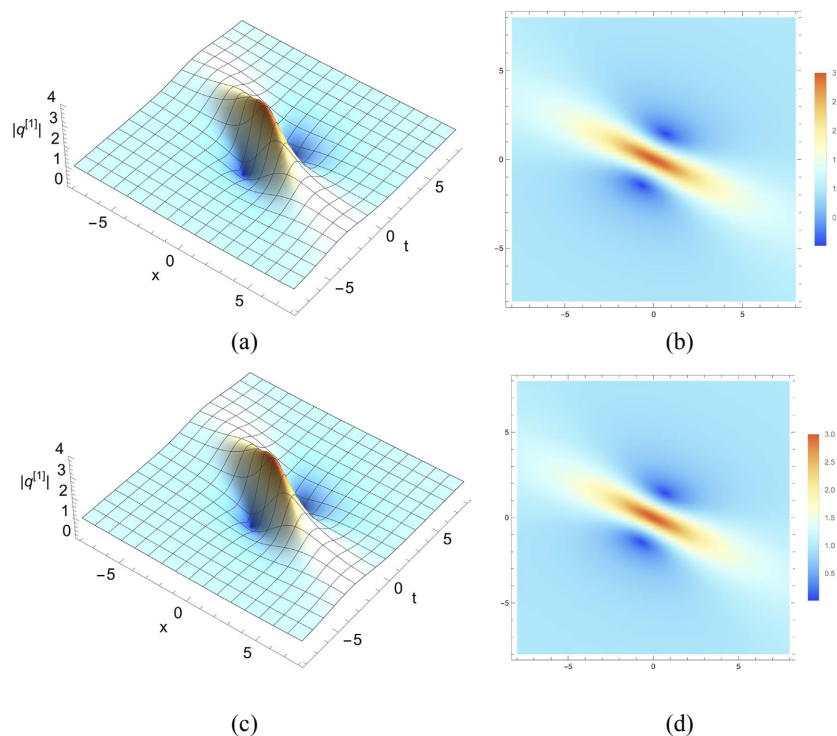
$$\begin{aligned} S_0 &= 0, \quad S_1 = 0, \quad S_2 = 0, \quad S_0^* = 0, \quad S_1^* = 0, \quad S_2^* = 0, \\ D_1 &= e^{-i\theta_1 \sum_{j=0}^2 S_j g^j}, \quad D_2 = e^{i\theta_1 \sum_{j=0}^2 S_j g^j}, \quad D_3 = e^{i\theta_1^* \sum_{j=0}^2 S_j^* g^j}, \quad D_4 = e^{-i\theta_1^* \sum_{j=0}^2 S_j^* g^j}, \\ W_{11} &= -3a\delta\lambda_1 e^{-A_1}, \quad W_{21} = 3a\delta\lambda_1 e^{-A_1}, \quad W'_{11} = 3a\delta\lambda_1 e^{A_1}, \quad W'_{21} = -3a\delta\lambda_1 e^{-A_1}, \\ W_{12} &= (\theta_1 - 4 + 4\lambda_1^2)e^{A_1}, \quad W_{22} = (\theta_1 + 4 - 4\lambda_1^2)e^{-A_1}, \\ W'_{12} &= (\theta_1 + 4 - 4\lambda_1^2)e^{A_1}, \quad W'_{22} = (\theta_1 - 4 + 4\lambda_1^2)e^{-A_1}. \end{aligned}$$

5.1. 一阶怪波解

将表达式(22)代入一阶达布变换(7)中, 对矩阵中的每一项在 $g = 0$ 处进行泰勒展开, 并提出 $g^{\frac{1}{2}}$ 的系数进行行列式计算, 如:

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} \psi_1 & \lambda_1 \psi_2 \\ -\psi_2^* & \lambda_1^* \psi_1^* \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1^2 \psi_1 & \lambda_1 \psi_2 \\ -\lambda_1^{*2} \psi_2^* & \lambda_1^* \psi_1^* \end{vmatrix}} \rightarrow \frac{\begin{vmatrix} a_{11}g^{\frac{1}{2}} + o\left(g^{\frac{3}{2}}\right) & a_{12}g^{\frac{1}{2}} + o\left(g^{\frac{3}{2}}\right) \\ a_{21}g^{\frac{1}{2}} + o\left(g^{\frac{3}{2}}\right) & a_{22}g^{\frac{1}{2}} + o\left(g^{\frac{3}{2}}\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{11}g^{\frac{1}{2}} + o\left(g^{\frac{3}{2}}\right) & b_{12}g^{\frac{1}{2}} + o\left(g^{\frac{3}{2}}\right) \\ b_{21}g^{\frac{1}{2}} + o\left(g^{\frac{3}{2}}\right) & b_{22}g^{\frac{1}{2}} + o\left(g^{\frac{3}{2}}\right) \end{vmatrix}} \rightarrow \frac{\begin{vmatrix} a_{11} + o(g) & a_{12} + o(g) \\ a_{21} + o(g) & a_{22} + o(g) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{11} + o(g) & b_{12} + o(g) \\ b_{21} + o(g) & b_{22} + o(g) \end{vmatrix}} \rightarrow \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}}.$$

同理可求得 b_1 , c_1 , d_2 , 最后再将其代入一阶达布变换 $q^{[1]}(x,t) = q(x,t) \frac{d_2}{a_2} + \frac{8i}{3\delta} \frac{c_1}{a_2}$, 我们可以得到一阶怪波解的具体表达式, 其动力学行为如图 7 所示。在图 7 中, 我们可以观察到怪波是由一个峰和两个谷组成的, 它们在时间和空间上都是局域的, 这正好说明了怪波的特征——突然出现又凭空消失[15]。



(a) $f(x)=1$, $\lambda_1 = \frac{\sqrt{55}}{8} + \frac{3}{8}i$, $a=1$, $\delta=1$, $\alpha=\beta=1$, $h_1=h_2=1$;

(c) $f(x)=x$, $\lambda_1 = \frac{\sqrt{55}}{8} + \frac{3}{8}i$, $a=1$, $\delta=1$, $\alpha=\beta=1$, $h_1=h_2=1$.

Figure 7. 1-order rogue wave solution of Eq. (1). (a) and (c) are 3D plots, and (b) and (d) are density plots corresponding to (a) and (c)

图 7. 方程(1)的一阶怪波解。(a)和(c)为 3D 图, (b)和(d)为(a)和(c)对应的密度

5.2. 二阶怪波解

将表达式(22)代入达布变换(9)中, 对矩阵中的每一项在 $g=0$ 处进行泰勒展开, 并提出 $g^{\frac{1}{2}}$, $g^{\frac{3}{2}}$ 的系数进行行列式计算, 可以求得 a_4 , c_3 , d_4 , 最后将其代入二阶达布变换 $q^{[2]}(x,t) = q(x,t) \frac{d_4}{a_4} + \frac{8i}{3\delta} \frac{c_3}{a_4}$, 可

以得到基础型二阶怪波解的具体表达式, 其动力学行为如图 8 所示。

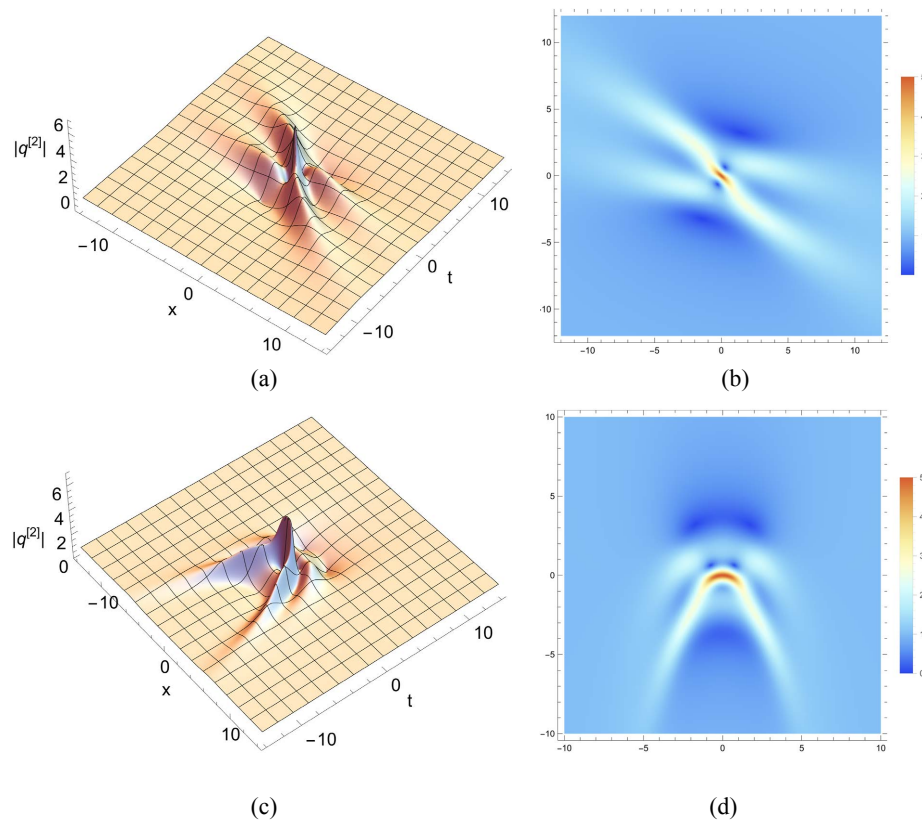
通过改变 S_1 与 S_1^* 的取值, 我们可进一步改变怪波的组合方式。如令 $S_1 = 20$, $S_1^* = 20$, 我们可以得到三角型二阶怪波, 其动力学行为如图 9 所示。

5.3. 高阶怪波解

将表达式(22)代入达布变换(9)中, 同样将矩阵中的每一项在 $g=0$ 处进行泰勒展开, 并提出 $g^{\frac{1}{2}}$, $g^{\frac{3}{2}}$,

$g^{\frac{5}{2}}$ 的系数进行行列式计算, 可以求得 a_6, c_5, d_6 , 再将其代入三阶达布变换 $q^{[3]}(x,t) = q(x,t) \frac{d_6}{a_6} + \frac{8i c_5}{3\delta a_6}$

中, 最终得到基础型三阶怪波解的具体表达式。通过改变 S_j 与 S_j^* , $j=1,2$ 的取值, 我们可得到多种怪波的组合方式。令, $S_1=8, S_1^*=8$ 可以得到三角型三阶怪波解; 令 $S_2=100, S_2^*=100$, 可以得到圆型三阶怪波解。以上三种类型的三阶怪波的动力学行为如图 10 所示。

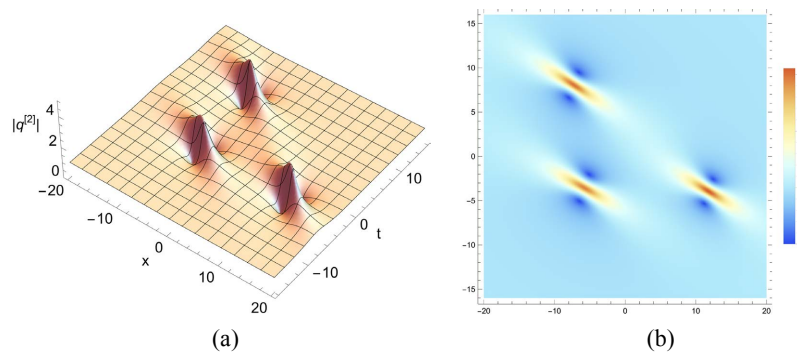


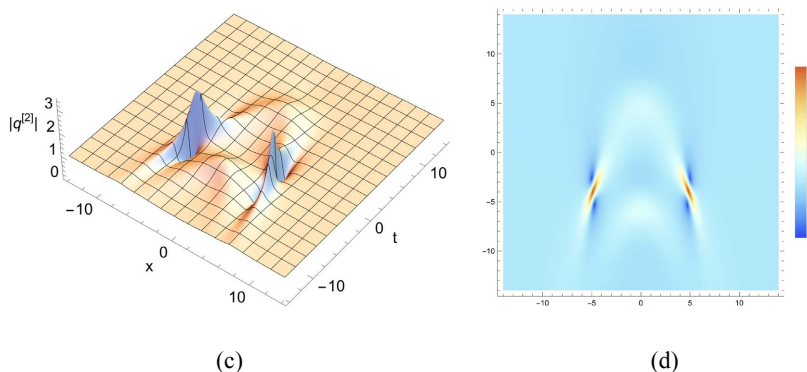
(a) $f(x)=1, \lambda_1 = \frac{\sqrt{55}}{8} + \frac{3}{8}i, a=1, \delta=1, \alpha=\beta=1, h_1=h_2=1;$

(c) $f(x)=x, \lambda_1 = \frac{\sqrt{55}}{8} + \frac{3}{8}i, a=1, \delta=1, \alpha=\beta=1, h_1=h_2=1.$

Figure 8. Fundamental 2-order rogue wave solution of Eq. (1). (a) and (c) are 3D plots, and (b) and (d) are density plots corresponding to (a) and (c)

图 8. 方程(1)的基础型二阶怪波解。(a)和(c)为 3D 图, (b)和(d)为(a)和(c)对应的密度

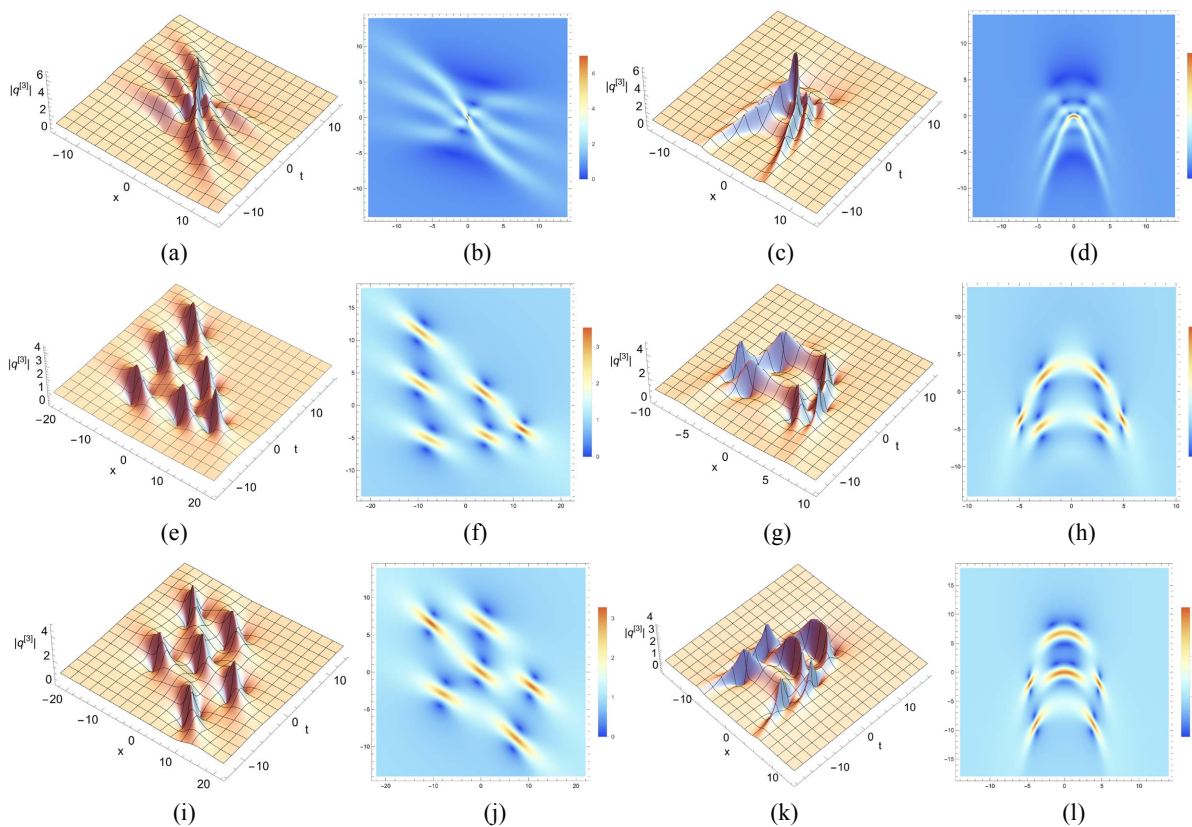




- (a) $f(x)=1, \lambda_1 = \frac{\sqrt{55}}{8} + \frac{3}{8}i, a=1, \delta=1, \alpha=\beta=1, h_1=h_2=1$;
- (b) $f(x)=x, \lambda_1 = \frac{\sqrt{55}}{8} + \frac{3}{8}i, a=1, \delta=1, \alpha=\beta=1, h_1=h_2=1$.

Figure 9. Triangular 2-order rogue wave solution of Eq. (1). (a) and (c) are 3D plots, and (b) and (d) are density plots corresponding to (a) and (c)

图 9. 方程(1)的基础型三阶怪波解。(a)和(c)为 3D 图, (b)和(d)为(a)和(c)对应的密度



- $\lambda_1 = \frac{\sqrt{55}}{8} + \frac{3}{8}i, a=1, \delta=1, \alpha=\beta=1, h_1=h_2=1$; (a), (e), (i): $f(x)=1$; (c), (g), (k): $f(x)=x$.

Figure 10. 3-order rogue wave solutions of Eq. (1). (a)~(d) are basic types, (e)~(h) are triangular types, and (i)~(l) are circular types. (a), (c), (e), (g), (i), (k) are 3D plots, (b), (d), (f), (h), (j), (l) are density plots corresponding to (a), (c), (e), (g), (i), and (k)

图 10. 方程(1)的三阶怪波解。(a)~(d)为基础型, (e)~(h)为三角形, (i)~(l)为圆型。(a), (c), (e), (g), (i), (k)为 3D 图, (b), (d), (f), (h), (j), (l)为(a), (c), (e), (g), (i), (k)所对应的密度图

6. 结论

本文主要以非均匀弹性梁介质中的变系数混合非线性薛定谔方程为研究对象, 通过达布变换方法, 求得了该方程的一、二阶孤子解、呼吸子解, 一、二、三阶怪波解, 具体如下:

1) 从变系数混合非线性薛定谔方程的 Lax 对出发, 构造出一阶达布变换, 并将其推广到 N 阶, 并得到了方程在不同系数下的一、二阶孤子解, 并借助数学软件绘制图像, 分析其动力学性质。

2) 选取方程的平面波解, 得到了色散关系, 在不同系数下求出了方程的一、二阶呼吸子解, 并利用图像描绘了其动力学性质。

3) 令呼吸子的周期趋于无限大, 得到了一阶及高阶怪波解。对于高阶怪波, 通过改变控制函数的取值, 得到了三角型二、三阶怪波和圆型三阶怪波, 并由图像观察到了怪波具有局域性的特征。

4) 论文的结果可为非均匀弹性梁介质中的怪波实验研究提供理论支撑。

基金项目

山西省国际合作基地与平台项目(202104041101019)。

参考文献

- [1] 赵希宁, 杨晓东, 张伟. 含电学边界的压电层合梁的非线性弯曲波[J]. 力学学报, 2021, 53(4): 1124-1137.
- [2] Zhang, S.Y. and Liu, Z.F. (2008) Three Kinds of Nonlinear Dispersive Waves in Elastic Rods with Finite Deformation. *Applied Mathematics and Mechanics*, **29**, 909-917. <https://doi.org/10.1007/s10483-008-0709-2>
- [3] Duan, W.S. and Zhao, J.B. (2000) Solitary Waves in a Quartic Nonlinear Elastic Rod. *Chaos, Solitons & Fractals*, **11**, 1265-1267. [https://doi.org/10.1016/S0960-0779\(99\)00014-4](https://doi.org/10.1016/S0960-0779(99)00014-4)
- [4] 刘志芳. 弹性杆波导中几类非线性演化方程及其孤波解和冲击波解[D]: [博士学位论文]. 太原: 太原理工大学, 2006.
- [5] Maugin, G.A. (2007) Nonlinear Kinematic Wave Mechanics of Elastic Solids. *Wave Motion*, **44**, 472-481. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2007.02.005>
- [6] Boardman, A.D., Bertolotti, M. and Twardowski, T. (Eds.) (2012) *Nonlinear Waves in Solid State Physics*. Springer Science & Business Media, New York and London.
- [7] Huang, K., Qu, B.N., Li, Z. and Yao, J. (2018) Nonlinear Microstructure-Dependent Bernoulli-Euler Beam Model Based on the Modified Couple Stress Theory and Finite Rotation of Section. *Micro & Nano Letters*, **13**, 490-493. <https://doi.org/10.1049/mnl.2017.0749>
- [8] 周义清, 张善元. 大挠度梁中的非线性波及其混沌行为[J]. 中北大学学报(自然科学版), 2012, 33(6): 643-648.
- [9] Wei, C.P. and Xue, C.X. (2020) Bending Waves of a Rectangular Piezoelectric Laminated Beam. *Acta Mechanica Sinica*, **36**, 1099-1108. <https://doi.org/10.1007/s10409-020-00977-w>
- [10] 杨洪升, 李玉龙, 周风华. 梯形应力脉冲在弹性杆中的传播过程和几何弥散[J]. 力学学报, 2019, 51(6): 1820-1829.
- [11] 刘志芳, 王铁锋, 张善元. 梁中非线性弯曲波传播特性的研究[J]. 力学学报, 2007(2): 238-244.
- [12] Pelinovsky, D.E. (2021) Instability of Double-Periodic Waves in the Nonlinear Schrödinger Equation. *Frontiers in Physics*, **9**, 599146. <https://doi.org/10.3389/fphy.2021.599146>
- [13] Hao, H.Q., Zhang, J.W. and Guo, R. (2014) Soliton and Breather Solutions for the Mixed Nonlinear Schrödinger Equation via N-Fold Darboux Transformation. *Journal of Applied Mathematics*, **2014**, 348796. <https://doi.org/10.1155/2014/348796>
- [14] 谷超豪. 孤立子理论中的达布变换及其几何应用[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1900.
- [15] 郭柏灵, 田立新, 闫振亚, 凌黎明. 怪波及其数学理论[M]. 北京: 科学技术出版社, 2015.