

广义 Petersen 图的混合边邻域粘连度

段云清, 武彩萍*

太原理工大学数学学院, 山西 晋中

收稿日期: 2024年1月28日; 录用日期: 2024年2月22日; 发布日期: 2024年2月29日

摘要

已知图的混合边邻域粘连度概念以及几类基本图的参数计算公式后, 本文给出了广义 Petersen 图的混合边邻域粘连度的计算公式, 使得混合边邻域粘连度算法更为细化, 刻画某些网络的抗毁性更为精确。

关键词

广义 Petersen 图, 网络抗毁性, 混合边邻域粘连度

The Mixed Edge Neighbor Tenacity of Generalized Petersen Graphs

Yunqing Duan, Caiping Wu*

School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Jinzhong Shanxi

Received: Jan. 28th, 2024; accepted: Feb. 22nd, 2024; published: Feb. 29th, 2024

Abstract

After the concept of mixed edge neighbor tenacity of graphs and the formula for calculating parameters of some basic graphs are known, the formula for calculating mixed edge neighbor tenacity of generalized Petersen graph is given, which makes the algorithm of mixed edge neighborhood adhesion more refined and the damage resistance of some networks more accurate.

Keywords

Generalized Petersen Graph, Network Invulnerability, Mixed Edge Neighbor Tenacity

*通讯作者。



1. 引言

网络已在当今社会广泛普及, 网络抗毁性起源于计算机网络, 是通信网络连通性研究的一个重要概念。1985 年 Gunther 和 Hartnell 提出了间谍网络的概念[1], 他们通过一个图来模拟间谍网络, 其中图的顶点代表间谍或站点, 边代表通讯方式。间谍网络最重要的特性是: 如果间谍被捕, 与他们直接接触的间谍是不可靠的。2006 年, 南海地震的发生导致部分国际海底通讯电缆中断, 使得许多国家和地区通信故障, 某些地区的互联网接入和语音通话也受到影响。基于上述背景的抗毁性参数, 称为邻域抗毁性参数。

在网络抗毁性分析中, 主要考虑三个因素[2]: 1) 破坏网络的难易程度; 2) 网络被破坏的严重程度; 3) 有多少顶点仍然保持连通。因此, 邻域连通度[1] [3]、边邻域连通度[4] [5]、邻域完整度[6]、边邻域完整度[7]、邻域离散数[8]、边邻域离散数[9] [10]、邻域坚韧度[11]、边邻域坚韧度[12] [13]、邻域毁裂度[14]、边邻域毁裂度[15] [16]等参数被引入, 以衡量网络在“邻域”情形下的抗毁性。

设 $G=(V, E)$ 是一个简单图, 分别称 $N(e)=\{f|f \in E(G), \text{且 } e \text{ 和 } f \text{ 相邻}\}$ 和 $N[e]=N(e) \cup \{e\}$ 为 e 的开邻域和闭邻域。若 $X \subseteq E(G)$, 则分别称 $N(X)=\{f|X \in E(G), f \in E/X \text{ 且存在 } e \in X, \text{使得 } e \text{ 和 } f \text{ 相邻}\}$ 和 $N[X]=N(X) \cup \{X\}$ 为 X 的开邻域和闭邻域。若将 $N[X]$ 中的边和与 X 中的边关联的点均从中 G 删除, 则称 X 为 G 的一个边颠覆策略, 记剩余子图为 G/X 。对连通图 G , 设 $X \subseteq E(G)$, 若 G/X 不连通, 或孤立点或空集 \emptyset , 则称 X 为 G 的一个邻域边割集。

定义 1 [1] 设 G 是连通图, 其边邻域连通度的定义为: $\Lambda(G)=\min\{|X|:X \subseteq E(G)\}$, 其中 X 为 G 的邻域边割集。

边邻域连通度是基于(1)考虑的。

定义 2 [7] 设 G 是连通图, 其边邻域完整度的定义为: $ENI(G)=\min\{|X|+m(G/X):X \subseteq E(G)\}$, 其中 $m(G/X)$ 为 G/X 的最大连通分支的阶。

边邻域完整度是基于(1)和(3)考虑的。

定义 3 [9] 设 G 是连通图, 其边邻域离散数的定义为: $ENS(G)=\min\{\omega(G/X)-|X|:X \subseteq E(G)\}$, 其中 X 为 G 的邻域边割集, $\omega(G/X)$ 为 $G-X$ 的连通分支数。

定义 4 [12] 设 G 是连通图, 其边邻域坚韧度的定义为: $t_{EN}(G)=\min\left\{\frac{|X|}{\omega(G/X)}:X \subseteq E(G)\right\}$, 其中 X 为 G 的邻域边割集, $\omega(G/X)$ 为 $G-X$ 的连通分支数。

边邻域离散数和边邻域坚韧度是基于(1)和(2)考虑的。边邻域坚韧度是边邻域离散数的除法形式, 尽管这两个参数在定义上有一些相似之处, 但在衡量网络的抗毁性方面作用不同。

定义 5 [15] 设 G 是连通图, 其边邻域毁裂度的定义为:

$ENR(G)=\min\{\omega(G/X)-|X|-m(G/X):X \subseteq E(G)\}$, 其中 X 为 G 的邻域边割集, $m(G/X)$ 和 $\omega(G/X)$ 为 G/X 的最大连通分支的阶和连通分支数。

边邻域毁裂度是基于(1)、(2)和(3)考虑的, 是视角较为全面的抗毁性参数。

为了更好地刻画边失效情形下的网络抗毁性, 闫伟等人提出图的混合边邻域粘连度的概念。

定义 6 [17] 设 G 是连通图, 其混合边邻域粘连度定义为 $MENT(G)=\min\left\{\frac{|X|+m(G/X)}{\omega(G/X)}:X \subseteq E(G)\right\}$,

其中 X 为 G 的邻域边割集, $m(G/X)$ 和 $\omega(G/X)$ 为 G/X 的最大连通分支的阶和连通分支数。若有 X^* , 使得 $MENT(G) = \min \left\{ \frac{|X^*| + m(G/X^*)}{\omega(G/X^*)} \right\}$, 则称 X^* 为 G 的一个混合边邻域粘连集, 简记为 $MENT$ -集。显然,

混合边邻域粘连度越大, 网络抗毁性越好。

混合边邻域粘连度和边邻域毁裂度在衡量网络的抗毁性方面作用不同。目前已经研究了 $P_n (n \geq 3)$ 、 $C_n (n \geq 3)$ 、 $T_{n,k} (2 \leq k \leq n-3)$ 、 $S_{1,n-1} (n \geq 4)$ 、 $DS(m,n)$ 、 $K_n (n \geq 3)$ 、 $K_{m,n}$ 、 K_{n_1, n_2, \dots, n_p} 等(当 p 比较大时, 完全 p 部分图的最大匹配需通过算法解决[18])基本图的混合边邻域粘连度计算公式, 下文我们将研究广义 Petersen 图的混合边邻域粘连度计算公式。

本文所讨论的图均是简单无向图, 未定义的概念和术语参见文献[19] [20]。

2. 广义 Petersen 图的混合边邻域粘连度

考虑广义 Petersen 图的混合边邻域坚韧度, 先了解其定义及其部分性质, 具体如下:

定义 2.1

对于正整数 n 和 t 满足 $n \geq 3$, $1 \leq t \leq n-1$, 且 $2t \neq n$, 定义广义 Petersen 图 $P(n,t)$ 为:

$V(P(n,t)) = \{u_1, u_2, \dots, u_n; v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E(P(n,t)) = \{(u_i, u_{i+1}), (u_i, v_i), (v_i, v_{i+t})\}$, 其中下标关于模 n 同余。

Watkins 等人证明了 $P(n,t)$ 与 $P(n,n-t)$ 同构。图 1 所示为广义 Petersen 图 $P(5,2)$, 由于该图在各种图论文献中经常出现, 人们习惯上称之为 Petersen 图。

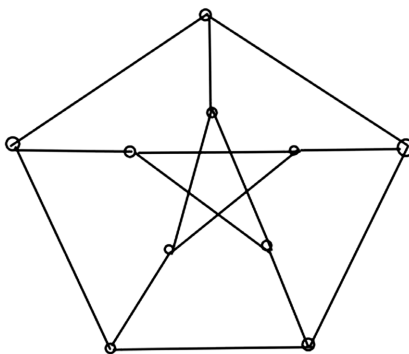


Figure 1. Petersen graph

图 1. Petersen 图

定理 2.2

对广义 Petersen 图 $P(n,1)$ 有 $MENT(P(n,1)) = \begin{cases} \frac{4k+1}{4k}, n=6k, k \neq 0 \\ \frac{2k+1}{2k}, n=6k+1, k \neq 0 \\ \frac{4k+3}{4k+1}, n=6k+2, k \neq 0 \\ \frac{4k+3}{4k+2}, n=6k+3 \\ \frac{2k+2}{2k+1}, n=6k+4 \\ \frac{4k+5}{4k+3}, n=6k+5 \end{cases}$, 其中 $k \in \mathbb{Z}^+$ 。

证明 显然 $MENT(P(3,1)) = \frac{3}{2}$, $MENT(P(4,1)) = 2$, $MENT(P(5,1)) = \frac{5}{3}$ 。根据 n 被 6 除的余数, 分以下六种情形讨论(其中 $k \in \mathbb{Z}^+$)。

情形 1 $n = 6k, k \neq 0$ 。

令 $X = \{u_1u_2, u_4u_5, \dots, u_{6k-2}u_{6k-1}\} \cup \{v_2v_3, v_5v_6, \dots, v_{6k-1}v_{6k}\}$, 结合图 $P(6k,1)$ 结构(如图 2 所示)可知, X 为 $P(6k,1)$ 的一个 $MENT$ -集, 容易知道 $|X| = 4k$, $m(P(6k,1)/X) = 1$ 且 $\omega(P(6k,1)/X) = 4k$, 则 $MENT(P(6k,1)) = \frac{4k+1}{4k}$ 。

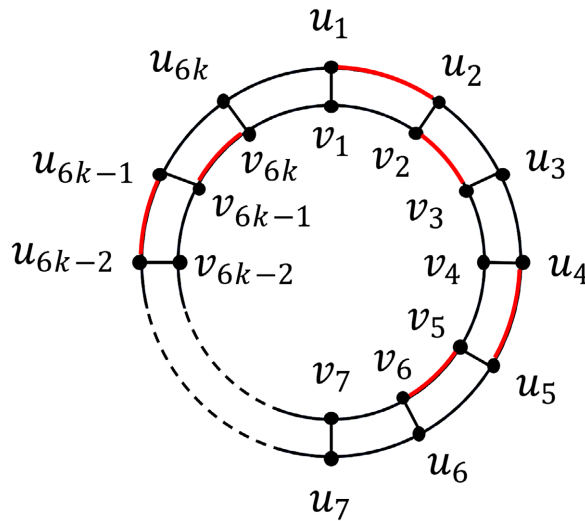


Figure 2. $P(6k, 1)$ and a $MENT$ -set of $P(6k, 1)$
图 2. $P(6k, 1)$ 及其一个 $MENT$ -集

情形 2 $n = 6k + 1, k \neq 0$ 。

令 $X = \{u_1u_2, u_4u_5, \dots, u_{6k-2}u_{6k-1}\} \cup \{v_2v_3, v_5v_6, \dots, v_{6k-1}v_{6k}\} \cup \{u_{6k+1}v_{6k+1}\}$, 结合图 $P(6k+1,1)$ 结构可知, X 为 $P(6k+1,1)$ 的一个 $MENT$ -集, 容易知道 $|X| = 4k + 1$, $m(P(6k+1,1)/X) = 1$ 且 $\omega(P(6k+1,1)/X) = 4k$, 则 $MENT(P(6k+1,1)) = \frac{2k+1}{2k}$ 。

情形 3 $n = 6k + 2, k \neq 0$ 。

令 $X = \{u_1u_2, u_4u_5, \dots, u_{6k-2}u_{6k-1}, u_{6k+1}u_{6k+2}\} \cup \{v_2v_3, v_5v_6, \dots, v_{6k-1}v_{6k}\} \cup \{u_{6k+2}v_{6k+2}\}$, 结合图 $P(6k+2,1)$ 结构可知, X 为 $P(6k+2,1)$ 的一个 $MENT$ -集, 容易知道 $|X| = 4k + 2$, $m(P(6k+2,1)/X) = 1$ 且 $\omega(P(6k+2,1)/X) = 4k + 1$, 则 $MENT(P(6k+2,1)) = \frac{4k+3}{4k+1}$ 。

情形 4 $n = 6k + 3$ 。

令 $X = \{u_1u_2, u_4u_5, \dots, u_{6k-2}u_{6k-1}, u_{6k+1}u_{6k+2}\} \cup \{v_2v_3, v_5v_6, \dots, v_{6k+2}v_{6k+3}\}$, 结合图 $P(6k+3,1)$ 结构可知, X 为 $P(6k+3,1)$ 的一个 $MENT$ -集, 容易知道 $|X| = 4k + 2$, $m(P(6k+3,1)/X) = 1$ 且 $\omega(P(6k+3,1)/X) = 4k + 2$, 则 $MENT(P(6k+3,1)) = \frac{4k+3}{4k+2}$ 。

情形 5 $n = 6k + 4$ 。

令 $X = \{u_1u_2, u_4u_5, \dots, u_{6k-2}u_{6k-1}, u_{6k+1}u_{6k+2}\} \cup \{v_2v_3, v_5v_6, \dots, v_{6k+2}v_{6k+3}\} \cup \{u_{6k+4}v_{6k+4}\}$, 结合图 $P(6k+4,1)$ 结构可知, X 为 $P(6k+4,1)$ 的一个 $MENT$ -集, 容易知道 $|X| = 4k + 3$, $m(P(6k+4,1)/X) = 1$ 且

$\omega(P(6k+4,1)/X) = 4k+2$, 则 $MENT(P(6k+4,1)) = \frac{2k+2}{2k+1}$ 。

情形 6 $n = 6k+5$ 。

令 $X = \{u_1u_2, u_4u_5, \dots, u_{6k-2}u_{6k-1}, u_{6k+1}u_{6k+2}\} \cup \{v_2v_3, v_5v_6, \dots, v_{6k+2}v_{6k+3}\} \cup \{u_{6k+5}v_{6k+5}\}$, 结合图 $P(6k+5,1)$ 结构可知, X 为 $P(6k+5,1)$ 的一个 $MENT$ -集, 容易知道 $|X| = 4k+4$, $m(P(6k+5,1)/X) = 1$ 且

$\omega(P(6k+5,1)/X) = 4k+3$, 则 $MENT(P(6k+5,1)) = \frac{4k+5}{4k+3}$ 。

综上所述, 定理得证。

定理 2.3

对于广义 Petersen 图 $P(n,2)$ 有 $MENT(P(n,2)) = MENT(P(n,1)) = \begin{cases} \frac{4k+1}{4k}, n=6k, k \neq 0 \\ \frac{2k+1}{2k}, n=6k+1, k \neq 0 \\ \frac{4k+3}{4k+1}, n=6k+2, k \neq 0 \\ \frac{4k+3}{4k+2}, n=6k+3 \\ \frac{2k+2}{2k+1}, n=6k+4 \\ \frac{4k+5}{4k+3}, n=6k+5 \end{cases}$, 其中

$k \in \mathbb{Z}^+$ 。

证明 显然 $MENT(P(3,2)) = MENT(P(3,1)) = \frac{3}{2}$, $MENT(P(4,2)) = 2$, $MENT(P(5,2)) = \frac{5}{3}$ 。

根据 n 被 6 除的余数, 分以下六种情形讨论(其中 $k \in \mathbb{Z}^+$)。

情形 1 $n = 6k, k \neq 0$ 。

令 $X = \{u_1u_2, u_4u_5, \dots, u_{6k-2}u_{6k-1}\} \cup \{v_3v_5, v_6v_8, \dots, v_{6k}v_2\}$, 结合图 $P(6k,2)$ 结构(如图 3 所示)可知, X 为 $P(6k,2)$ 的一个 $MENT$ -集, 容易知道 $|X| = 4k$, $m(P(6k,2)/X) = 1$ 且 $\omega(P(6k,2)/X) = 4k$, 则 $MENT(P(6k,2)) = \frac{4k+1}{4k}$ 。

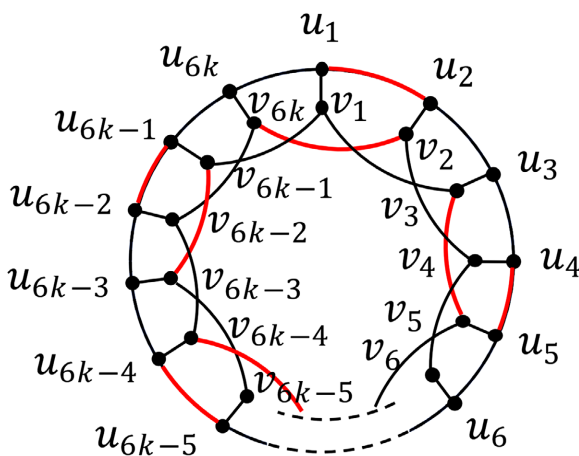


Figure 3. $P(6k, 2)$ and a $MENT$ -set of $P(6k, 2)$

图 3. $P(6k, 2)$ 及其一个 $MENT$ -集

情形 2 $n = 6k + 1, k \neq 0$ 。

令 $X = \{u_1u_2, u_4u_5, \dots, u_{6k-2}u_{6k-1}\} \cup \{v_3v_5, v_6v_8, \dots, v_{6k-3}v_{6k-1}, v_{6k+1}v_2\} \cup \{u_{6k}v_{6k}\}$, 结合图 $P(6k+1, 2)$ 结构可知, X 为 $P(6k+1, 2)$ 的一个 $MENT$ -集, 容易知道 $|X| = 4k + 1$, $m(P(6k+1, 2)/X) = 1$ 且

$$\omega(P(6k+1, 2)/X) = 4k, \text{ 则 } MENT(P(6k+1, 2)) = \frac{2k+1}{2k}.$$

情形 3 $n = 6k + 2, k \neq 0$ 。

令 $X = \{u_1u_2, u_4u_5, \dots, u_{6k-2}u_{6k-1}\} \cup \{v_3v_5, v_6v_8, \dots, v_{6k}v_{6k+2}, v_{6k+2}v_2\} \cup \{u_{6k+1}v_{6k+1}\}$, 结合图 $P(6k+2, 2)$ 结构可知, X 为 $P(6k+2, 2)$ 的一个 $MENT$ -集, 容易知道 $|X| = 4k + 2$, $m(P(6k+2, 2)/X) = 1$ 且

$$\omega(P(6k+2, 2)/X) = 4k + 1, \text{ 则 } MENT(P(6k+2, 2)) = \frac{4k+3}{4k+1}.$$

情形 4 $n = 6k + 3$ 。

令 $X = \{u_1u_2, u_4u_5, \dots, u_{6k+1}u_{6k+2}\} \cup \{v_3v_5, v_6v_8, \dots, v_{6k}v_{6k+2}, v_{6k+3}v_2\}$, 结合图 $P(6k+3, 2)$ 结构可知, X 为 $P(6k+3, 2)$ 的一个 $MENT$ -集, 容易知道 $|X| = 4k + 2$, $m(P(6k+3, 2)/X) = 1$ 且 $\omega(P(6k+3, 2)/X) = 4k + 2$, 则 $MENT(P(6k+3, 2)) = \frac{4k+3}{4k+2}$ 。

情形 5 $n = 6k + 4$ 。

令 $X = \{u_1u_2, u_4u_5, \dots, u_{6k+1}u_{6k+2}\} \cup \{v_3v_5, v_6v_8, \dots, v_{6k}v_{6k+2}, v_{6k+4}v_2\} \cup \{u_{6k+3}v_{6k+3}\}$, 结合图 $P(6k+4, 2)$ 结构可知, X 为 $P(6k+4, 2)$ 的一个 $MENT$ -集, 容易知道 $|X| = 4k + 3$, $m(P(6k+4, 2)/X) = 1$ 且

$$\omega(P(6k+4, 2)/X) = 4k + 2, \text{ 则 } MENT(P(6k+4, 2)) = \frac{2k+2}{2k+1}.$$

情形 6 $n = 6k + 5$ 。

令 $X = \{u_1u_2, u_4u_5, \dots, u_{6k+1}u_{6k+2}\} \cup \{v_3v_5, v_6v_8, \dots, v_{6k+3}v_{6k+5}, v_{6k+5}v_2\} \cup \{u_{6k+4}v_{6k+4}\}$, 结合图 $P(6k+5, 2)$ 结构可知, X 为 $P(6k+5, 2)$ 的一个 $MENT$ -集, 容易知道 $|X| = 4k + 4$, $m(P(6k+5, 2)/X) = 1$ 且

$$\omega(P(6k+5, 2)/X) = 4k + 3, \text{ 则 } MENT(P(6k+5, 2)) = \frac{4k+5}{4k+3}.$$

综上所述, 定理得证。

3. 结论

本文在已知混合边邻域粘连度概念的基础上给出了广义 Petersen 图的混合边邻域粘连度的计算公式。闫伟[17]已指出混合边邻域粘连度的区分度较好, 刻画某些网络的抗毁性更为精确。一般图的混合边邻域粘连度计算比较复杂, 但一些具有特殊结构的图类, 如联图、Harary 图、树等的混合边邻域粘连度算法值得深入研究。

参考文献

- [1] Gunther, G. (1985) Neighbor-Connectivity in Regular Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **11**, 233-243. [https://doi.org/10.1016/0166-218X\(85\)90075-7](https://doi.org/10.1016/0166-218X(85)90075-7)
- [2] 陈忠, 李银奎. 完全 k 叉树的粘连度[J]. 纯粹数学与应用数学, 2013, 29(5): 484-488.
- [3] Gu, M.M., Pai, K.J. and Chang, J.M. (2023) Subversion Analyses of Hierarchical Networks Based on (Edge) Neighbor Connectivity. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, **171**, 54-65. <https://doi.org/10.1016/j.jpdc.2022.09.010>
- [4] Cozzens, M.B. and Wu, S.S.Y. (1995) Extreme Values of Edge-Neighbor-Connectivity. *Ars Combinatoria*, **39**, 199-210.
- [5] Zhao, X.B., Zhang, Z. and Ren, Q. (2011) Edge Neighbor Connectivity of Cartesian Product Graph $G \times K_2$. *Applied Mathematics and Computation*, **217**, 5508-5511. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2010.12.022>
- [6] Bacak, T.G. and Kirlangic, A. (2013) Neighbor Integrity of Transformation Graphs. *International Journal of Foundations of Computer Science*, **24**, 303-317. <https://doi.org/10.1142/S0129054113500056>

- [7] Cozzens, M.B. and Wu, S.S.Y. (1997) Bounds of Edge-Neighbor-Integrity of Graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*, **15**, 71-80.
- [8] Wei, Z.T., Qi, N.N. and Yue, X.K. (2016) Vertex-Neighbor-Scattering Number of Bipartite Graphs. *International Journal of Foundations of Computer Science*, **27**, 501-509. <https://doi.org/10.1142/S012905411650012X>
- [9] Wei, Z.T., Qi, N.N. and Yue, X.K. (2013) Computing the Edge-Neighbor-Scattering Number of Graphs. *Zeitschrift fur Naturforschung A*, **68**, 599-604. <https://doi.org/10.5560/zna.2013-0059>
- [10] Liu, Y., Wei, Z.T., Shi, J. and Mai, A.C. (2016) A Polynomial Algorithm of Edge-Neighbor-Scattering Number of Trees. *Applied Mathematics and Computation*, **283**, 1-5. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.02.021>
- [11] 杨静婷. 图的邻域坚韧度研究[D]: [硕士学位论文]. 西安: 西安建筑科技大学, 2017.
- [12] 杨玉成. 图的边邻域坚韧度研究[D]: [硕士学位论文]. 西安: 西安建筑科技大学, 2019.
- [13] Feng, X., Wei, Z.T. and Yang, Y.C. (2022) Edge Neighbor Toughness of Graphs. *Axiom*, **11**, Article 248. <https://doi.org/10.3390/axioms11060248>
- [14] Bacak-Turan, G. and Oz, E. (2017) Neighbor Rupture Degree of Transformation Graphs G^{xy} . *International Journal of Foundations of Computer Science*, **28**, 335-355. <https://doi.org/10.1142/S0129054117500216>
- [15] Aslan, E. (2013) Edge-Neighbor-Rupture Degree of Graphs. *Journal of Applied Mathematics*, **2013**, Article ID: 783610. <https://doi.org/10.1155/2013/783610>
- [16] Kurkcu, O.K. and Aslan, E. (2018) A Comparison between Edge Neighbor Rupture Degree and Edge Scattering Number in Graphs. *International Journal of Foundations of Computer Science*, **29**, 1119-1142. <https://doi.org/10.1142/S0129054118500247>
- [17] 闫伟, 魏宗田. 图的混合边邻域粘连度[J]. 山西大学学报(自然科学版): 1-12. https://kns.cnki.net/kcms2/article/abstract?v=f2Ae6OvU-JLJXPf5CLFWKeeFdu2cPA_nGciw2tR-goYvPPefp1-MjlsU Uw-LCN2UFNVZdRrah1WeBktQMr6JJApMG5hy3rqWVhzHIOJ65LG_bUcLSBA2Qj0lToTToSBppxTXc4Ph71U=&uniplatform=NZKPT&language=CHS, 2023-10-28.
- [18] 毛华, 赵小娜, 史田敏. 多部图的最大匹配算法[J]. 郑州大学学报(理学版), 2013, 45(1): 27-29, 37.
- [19] Bondy, A. and Murty, U.S.R.M. (2008) Graph Theory. Springer, London.
- [20] 魏宗田, 刘勇, 杨威, 等. 网络抗毁性[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2015.