Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(2), 738-743
Published Online February 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.132072

14*pq*阶的五度对称图

赵路清，凌　波[*]

云南民族大学数学与计算机科学学院，云南　昆明

收稿日期：2024年1月28日；录用日期：2024年2月22日；发布日期：2024年2月29日

摘　要

称一个图为对称图，如果它的自同构群在这个图的弧集上是传递的。丁素云、凌波、娄本功和潘江敏教授2016年在文献(Graphs and Combinatorics, 32, 2355-2366, 2016)中证明了：无平方因子阶的五度对称图要么同构于图 $\mathrm{CD}_{n,k}$、C_{390}、C_{2926}，要么这类图的全自同构群为 $\mathrm{PSL}(2,p)$ 和 $\mathrm{PGL}(2,p)$。本文的主要工作是在假定一个五度图的阶为14*pq*时，完全确定其图全自同构群为 $\mathrm{PSL}(2,p)$ 和 $\mathrm{PGL}(2,p)$ 对应的对称图，其中 $q>p>5$ 为素数。

关键词

对称图，自同构群，正规商图

Pentavalent Symmetric Graphs of Order 14*pq*

Luqing Zhao, Bo Ling[*]

School of Mathematics and Computer Sciences, Yunnan Minzu University, Kunming Yunnan

Received: Jan. 28th, 2024; accepted: Feb. 22nd, 2024; published: Feb. 29th, 2024

Abstract

A graph is said to be symmetric if its automorphism group acts transitively on its arcs. In 2016, Ding Suyun, Ling Bo, Lou Bengong and professors Pan Jiangmin published a paper in the (Graphs and Combinatorics, 32, 2355-2366, 2016), proved that: Arc-transitive pentavalent graphs of square-free order are either isomorphic to graphs $\mathrm{CD}_{n,k}$、C_{390}、C_{2926}, or the full automorphism group of such graphs is $\mathrm{PSL}(2,p)$ and $\mathrm{PGL}(2,p)$. The main work of this paper is to completely determine that

[*]通讯作者。

文章引用: 赵路清, 凌波. 14*pq* 阶的五度对称图[J]. 应用数学进展, 2024, 13(2): 738-743.
DOI: 10.12677/aam.2024.132072

the full automorphism group of a pentavalent graph as $\mathrm{PSL}(2,p)$ and $\mathrm{PGL}(2,p)$ corresponds to a symmetric graph when the order of the graph is assumed to be 14*pq*, where $q>p>5$ are primes.

Keywords

Symmetric Graph, Automorphism Group, Normal Quotient Graph

1. 引言

本文所考虑的图均为有限简单无向图。给定图Γ，分别用$V(\Gamma)$，$E(\Gamma)$和$A(\Gamma)$表示图Γ的顶点集，边集和自同构群。设s是一个正整数，称Γ中$s+1$个顶点序列$V_0V_1\cdots V_S$为一个s-弧，如果$(V_i,V_{i+1})\in E(\Gamma)$，$0\le i\le s-1$，并且对$s\ge 2$，有$V_i\ne V_{i+2}$，$0\le i\le s-2$。称$\Gamma$为$s$-弧传递图，如果$\mathrm{Aut}(\Gamma)$在$\Gamma$的所有$s$-弧上是传递的。称$\Gamma$为$s$-传递图，如果$\Gamma$是$s$-弧传递的，但不是$(s+1)$-弧传递的。特别地，1-弧是一个弧，0-弧是一个顶点。令$G\le S_\Omega$，对任意的$\alpha\in\Omega$，恒有$G_\alpha=1$，则称G是半正则的。如果群G既是半正则的又是传递的则称G是正则的。如果$\mathrm{Aut}(\Gamma)$在Γ上是正则的，则Γ被称为1-弧正则的。A在Γ的弧集上的作用是传递的当且仅当A在Γ的点集上$V(\Gamma)$上是传递的，并且任一点$v\in V(\Gamma)$在A中的稳定子群A_v在v的邻域$\Gamma_1(v)$上也是传递的。

研究群与图里面的对称性，也就是图的自同构群作用在图的顶点集，边集，弧集等上面的传递性，而图的弧传递图的分类一直是一个比较热门的话题。近年来，给定阶的对称图的分类得到了广泛的关注。Chao在文献[1]中分类了p阶的对称图，Conder [2]等分类了所有阶小于或等于768个点的3度对称图。冯等[3]分类阶为$8p$，$8p^2$的三度对称图。对于四度对称图的阶的分类的一些结果可以参考[4] [5]。而对于五度对称图的分类有许多显著的结果，只有一个素因子阶的五度对称图的分类可以参考文献[6] [7] [8] [9]，一个素因子阶的五度对称图大多数被分类完全，接下来对于两个素因子阶的五度对称图的分类可以参考文献[10] [11]。本文的主要目的是对14pq阶的五度对称图进行分类，主要采用的方法是取正规商图。

本文的主要结果是下面的定理。

定理1.1 设Γ是一个阶为14pq的连通五度对称图，其中$p>q>5$是素数，所以下列表述之一成立。

(1) $\Gamma\cong\mathrm{CD}_{14pq,k}$，其中$5\mid p-1$和$q-1$。

(2) 当$p=139,q=23$时，在同构意义下，存在图$\Gamma\cong C_{44758}$，进一步地，$\mathrm{Aut}(\Gamma)=\mathrm{PGL}(2,139)$，$\mathrm{A}_\alpha=\mathrm{A}_5$，其中$\alpha\in V(\Gamma)$。

2. 预备知识

在这一节中我们将引用一些基本的结果，方便后面的讨论。

以下定理在文献([12]，定理1.2)中得到证明。

定理2.1 令Γ是一个阶为n的连通弧传递五度图，其中n是一个无平方因子阶的整数，且至少有四个素因子。下列之一成立。

(1) $\Gamma\cong\mathrm{CD}_{n,k},n=2\cdot5^t p_1p_2\cdots p_s$和$\mathrm{Aut}(\Gamma)\cong D_n:Z_5$，其中$0\le t\le 1,s\ge 2$，$p_1p_2\cdots p_s$是不同的素数，当

$i=1,2,\cdots,s$ 时，$5\mid p_i-1$，在同构的情况下恰好有 4^{s-1} 个这样的 n 阶图。

(2) $\mathrm{Aut}(\Gamma)\cong \mathrm{PSL}(2,p)$ 或 $\mathrm{PGL}(2,p)$，$p\geq 29$ 为一个素数。

(3) 三元组 $(\Gamma,n,\mathrm{Aut}(\Gamma))$ 见表 1。

Table 1. Pentavalent symmetric graphs of square-free order
表 1. 无平方因子阶的五度对称图

序号	Γ	n	$\mathrm{Aut}(\Gamma)$	$(\mathrm{Aut}\Gamma)_\alpha$	传递性
1	C_{390}	390	$\mathrm{PSL}(2,25)$	F_{20}	2-传递
2	C_{2926}	2926	J_1	A_5	2-传递

$\mathrm{PSL}(2,q)$ 的极大子群是已知的，参见文献([13]，第 239 章节)。

引理 2.2 设 $T\cong \mathrm{PSL}(2,q)$，其中 $q=p^n\geq 5$，p 是素数。那么 T 的极大子群同构于下列群之一，其中 $d=(2,q-1)$。

(1) $D_{2(p-1)/d}$，其中 $q\neq 5,7,9,11$；

(2) $D_{2(p-1)/d}$，其中 $q\neq 7,9$；

(3) $Z_q:Z_{(q-1)/d}$；

(4) A_4，其中 $q=p=5$ 或者 $q=p\equiv 3,13,27,37 \pmod{40}$；

(5) S_4，其中 $q=p\equiv \pm 1 \pmod 8$；

(6) A_5，其中 $q=p\equiv \pm 1 \pmod 5$，或者 $q=p^2\equiv -1 \pmod 5$，p 为一个奇素数；

(7) $\mathrm{PSL}(2,p^m)$，n/m 为一个奇整数；

(8) $\mathrm{PGL}(2,P^{n/2})$，n 为偶整数。

根据文献[14] [15]得到五度弧传递图的点稳定子的结构。

引理 2.4 设 Γ 是一个连通的五度 (G,s)-传递图，其中 $G\leq \mathrm{Aut}(\Gamma)$，$s\geq 1$，设 $\alpha\in V(\Gamma)$，则下列表述之一成立：

(1) 如果 G_α 是可解的，则 $|G_\alpha|\mid 80$，且 $s\leq 3$。此外，(G_α,s) 如表 2 所示。

Table 2. Soluble vertex-stabilizers
表 2. 可解的点稳定子

s	1	2	3
G_α	Z_5,D_{10},D_{20}	$F_{20},F_{20}\times Z_2$	$F_{20}\times Z_4$

(2) 如果 G_α 是不可解的，则 $|G_\alpha|\mid 2^9\cdot 3^2\cdot 5$ 且 $2\leq s\leq 5$。此外，(G_α,s) 如表 3 所示。

Table 3. Insoluble vertex-stabilizers
表 3. 非可解的点稳定子

s	2	3	4	5
G_α	A_5,S_5	$\mathrm{A}_5\times S_5,(\mathrm{A}_5\times S_5):\mathrm{A}_2,S_4\times S_5$	$\mathrm{ASL}(2,4),\mathrm{AGL}(2,4),$ $\mathrm{A\Sigma L}(2,4),\mathrm{A\Gamma L}(2,4)$	$Z_6:\Gamma\mathrm{L}(2,4)$
$\lvert G_\alpha\rvert$	60,120	720,1440,2880	960,2880,1920,5760	23040

研究顶点传递图的一种典型方法是取正规商图。设 Γ 是一个 G-顶点传递图，其中 $G\le \mathrm{Aut}(\Gamma)$，令 $N \lhd G$，且 N 在 $V(\Gamma)$ 上是不传递的。称商图 Γ_N 是 G-正规的，如果 $V(\Gamma_N)$ 是 G 的某个正规子群 N 的轨道的集合。由 N 诱导的正规商图 Γ_N 定义为顶点集 $V(\Gamma_N)$ 的图。在商图 Γ_N 中 $(B_1,B_2)\in E(\Gamma_N)$ 当且仅当 $x\in B_1$ 和 $y\in B_2$，使得 $(x,y)\in E(\Gamma)$。如果原图的度数 $\mathrm{Val}(\Gamma)$ 与块图的度数 $\mathrm{Val}(\Gamma_N)$ 相等，那么 Γ 被叫做 Γ_N 的正规覆盖(参见文献([16]引理 2.5)和([17]，定理 4.1)。

定理 2.5 设 Γ 是奇数度的 G-弧传递图，令 $N\lhd G$ 在 $V(\Gamma)$ 上至少有三个轨道。那么下列的陈述成立。

(1) N 是 $V(\Gamma)$ 上的半正则，$G/N\le \mathrm{Aut}(\Gamma_N)$，$\Gamma$ 是的正规覆盖。

(2) $G_\alpha \cong (G/N)_\delta$，其中 $\alpha\in V(\Gamma)$，$\delta\in V(\Gamma_N)$。

(3) Γ 是 (G,s)-传递的当且仅当 Γ_N 是 $(G/N,s)$-传递。

3. 定理 1.1 的证明

不设 Γ 是阶为 $14pq$ 的连通五度对称图，其中 $5<q<p$ 是素数。令 $\mathrm{A}=\mathrm{Aut}(\Gamma)$，$\alpha\in V(\Gamma)$。

如果 A 是可解的，根据定理 2.1，$\Gamma\cong \mathrm{CD}_{14pq,k}$ 且 $5\,|\,p-1$ 和 $5\,|\,q-1$，定理 1.1 第一部分成立，假设 A 是不可解的，定理 2.1 表明，A 是几乎单的 $T:=\mathrm{soc}(\mathrm{A})\cong \mathrm{PSL}(2,r)$，其中 $r\ge 29$ 是素数。因为 $|\mathrm{PSL}(2,r)|$ 不整除 $|V(\Gamma)|=14pq$，根据定理 2.5(1)，T 在 $V(\Gamma)$ 上最多有两个轨道，$|T:T_\alpha|=7pq$ 或 $14pq$。因为 $T\le \mathrm{A}\le \mathrm{PGL}(2,r)$，我们有 $|\mathrm{A}_\alpha:T_\alpha|\le 2$，所以 $5\,|\,T_\alpha$，由于 $|T|=|T_\alpha|n$，于是 $35pq\,\big|\,|T|=|\mathrm{PSL}(2,r)|$。此外，根据引理 2.4，$|\mathrm{A}_\alpha|\,\big|\,2^9\cdot 3^2\cdot 5$，所以 $|T|\,\big|\,2^{10}\cdot 3^3\cdot 5pq$。因此 $r=p$。

我们现在确定了 p 的所有可能。如果 $3\,\big|\,|\mathrm{A}_\alpha|$，根据引理 2.4，$\mathrm{A}_\alpha$ 是不可解的，所以当 $A_\alpha\le T_\alpha.Z_2$，因为 $T_\alpha\le \mathrm{PSL}(2,p)$，根据引理 2.2 我们进一步有 $T_\alpha\cong \mathrm{A}_5$。如果 3 不整除 $|\mathrm{A}_\alpha|$，根据引理 2.4，A_α 是可解的，则 $|T_\alpha|\,\big|\,80$。因此 $|T|\,\big|\,840pq$ 或 $1120pq$。$|T|=p(p-1)(p+1)/2$ 且 $((p+1)/2,(p-1)/2)=1$。如果 q 整除 $(p+1)/2$，则 $p-1\,|\,840$ 或 1120，其中 $p\ge 29$ 并且 p 是一个素数。我们有 $p=31,41,43,61,71,113,281,421$。进一步地，我们的 p 还需要满足下列两个条件：

(1) $35pq\,\big|\,|T|=|\mathrm{PSL}(2,p)|=p(p-1)(p+1)/2$。

(2) $|T|=|\mathrm{PSL}(2,p)|\,\big|\,840pq$ 或 $1120pq$，其中 $p>q>5$ 是素数。

① 当 $p=31$ 时，由 q 整除 $(p+1)/2=16$，与 $p>q>5$ 是素数矛盾。

② 当 $p=41$ 时，我们有 $|\mathrm{PSL}(2,p)|=p(p-1)(p+1)=2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 41$，由 q 需要整除 $(p+1)/2=21$，且 $p>q>5$ 是素数，可得 $q=7$。接下来，将 p,q 的值代入条件(1)，此时 $35\cdot 7\cdot 41$ 不整除 $|T|=|\mathrm{PSL}(2,p)|=2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 41$，矛盾。

③ 当 $p=43$ 时，我们有 $|\mathrm{PSL}(2,p)|=p(p-1)(p+1)=2^2\cdot 3\cdot 7\cdot 11\cdot 43$，由 q 需要整除 $(p+1)/2=22$，且 $p>q>5$ 是素数，可得 $q=11$。接下来，将 p,q 的值代入条件(1)，此时 $35\cdot 11\cdot 43$ 不整除 $|T|=|\mathrm{PSL}(2,p)|=2^2\cdot 3\cdot 7\cdot 11\cdot 43$，矛盾。

④ 当 $p=61$ 时，我们有 $|\mathrm{PSL}(2,p)|=p(p-1)(p+1)=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 31\cdot 61$，由 q 需要整除 $(p+1)/2=31$，可得 $q=31$。接下来，将 p,q 的值代入条件(1)，此时 $35\cdot 31\cdot 61$ 不整除 $|T|=|\mathrm{PSL}(2,p)|=2^2\cdot 3\cdot 7\cdot 11\cdot 43$，矛盾。

⑤ 当 $p=71$ 时，由 q 整除 $(p+1)/2=36$，与 $p>q>5$ 是素数矛盾。

⑥ 当 $p=113$ 时，我们有 $|\mathrm{PSL}(2,p)|=p(p-1)(p+1)=2^4\cdot 3\cdot 7\cdot 19\cdot 113$，由 q 需要整除 $(p+1)/2=57$，可得 $q=19$。接下来，将 p,q 的值代入条件(1)，此时 $35\cdot 19\cdot 113$ 不整除 $|T|=|\mathrm{PSL}(2,p)|=2^2\cdot 3\cdot 7\cdot 11\cdot 43$，矛盾。

⑦ 当 $p=421$ 时，我们有 $|\mathrm{PSL}(2,p)|=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 13\cdot 17\cdot 421$。由 q 需要整除 $(p+1)/2=211$，且 $p>q>5$ 是素数，可得 $q=13$ 或 17。于是对 q 分情况讨论：

对于 $q=13$，我们把 p,q 的值代入条件(1)，此时 $35\cdot 421\cdot 13$ 不整除 $|T|=|\mathrm{PSL}(2,p)|=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 13\cdot 17\cdot 421$，矛盾。

对于 $q=13$，我们把 p,q 的值代入条件(1)，此时 $35\cdot 421\cdot 17$ 不整除 $|T|=|\mathrm{PSL}(2,p)|=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 13\cdot 17\cdot 421$，矛盾。

因此通过条件(1)和条件(2)的简单计算，我们可以排除 $p=31,41,43,61,71,113,421$，最后得到 $p=281$。

类似地，如果 q 整除 $(p-1)/2$，则 $p+1\,|\,840$ 或 1120，其中 $p\geq 29$ 并且 p 是一个素数，我们有 $p=29,31,41,59,79,83,139,167,223,419,839$。更进一步地，计算还需要满足两个条件：

(1) $15pq\,\big|\,|T|=|\mathrm{PSL}(2,p)|=p(p-1)(p+1)/2$。

(2) $|T|=|\mathrm{PSL}(2,p)|\,\big|\,840pq$ 或 $1120pq$，其中 $p>q>5$ 是素数。

① 当 $p=29$ 时，我们有 $|\mathrm{PSL}(2,p)|=p(p-1)(p+1)/2=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 29$，由 q 需要整除 $(p-1)/2=14$，且 $p>q>5$ 是素数，可得 $q=7$。接下来，将 p,q 的值代入条件(1)，此时 $35\cdot 7\cdot 29$ 不整除 $|T|=|\mathrm{PSL}(2,p)|=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 29$，矛盾。

② 当 $p=31$ 时，由 q 需要整除 $(p-1)/2=15$，与 $p>q>5$ 是素数矛盾。

③ 当 $p=41$ 时，由 q 需要整除 $(p-1)/2=15$，与 $p>q>5$ 是素数矛盾。

④ 当 $p=59$ 时，我们有 $|\mathrm{PSL}(2,p)|=p(p-1)(p+1)/2=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 29\cdot 59$，由 q 需要整除 $(p-1)/2=29$，且 $p>q>5$ 是素数，可得 $q=29$。接下来，将 p,q 的值代入条件(1)，此时 $35\cdot 29\cdot 59$ 不整除 $|T|=|\mathrm{PSL}(2,p)|=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 29\cdot 59$，矛盾。

⑤ 当 $p=79$ 时，我们有 $|\mathrm{PSL}(2,p)|=p(p-1)(p+1)/2=2^4\cdot 3\cdot 5\cdot 13\cdot 79$，由 q 需要整除 $(p-1)/2=39$，且 $p>q>5$ 是素数，可得 $q=13$。接下来，将 p,q 的值代入条件(1)，此时 $35\cdot 13\cdot 79$ 不整除 $|T|=|\mathrm{PSL}(2,p)|=2^4\cdot 3\cdot 5\cdot 13\cdot 79$，矛盾。

⑥ 当 $p=83$ 时，我们有 $|\mathrm{PSL}(2,p)|=p(p-1)(p+1)/2=2^2\cdot 3\cdot 7\cdot 41\cdot 83$，由 q 需要整除 $(p-1)/2=41$，且 $p>q>5$ 是素数，可得 $q=41$。接下来，将 p,q 的值代入条件(1)，此时 $35\cdot 41\cdot 83$ 不整除 $|T|=|\mathrm{PSL}(2,p)|=2^2\cdot 3\cdot 7\cdot 41\cdot 83$，矛盾。

⑦ 当 $p=167$ 时，我们有 $|\mathrm{PSL}(2,p)|=p(p-1)(p+1)/2=2^3\cdot 3\cdot 7\cdot 83\cdot 167$，由 q 需要整除 $(p-1)/2=83$，且 $p>q>5$ 是素数，可得 $q=83$。接下来，将 p,q 的值代入条件(1)，此时 $35\cdot 41\cdot 83$ 不整除 $|T|=|\mathrm{PSL}(2,p)|=2^3\cdot 3\cdot 7\cdot 83\cdot 167$，矛盾。

⑧ 当 $p=223$ 时，我们有 $|\mathrm{PSL}(2,p)|=p(p-1)(p+1)/2=2^5\cdot 3\cdot 7\cdot 37\cdot 223$，由 q 需要整除 $(p-1)/2=111$，且 $p>q>5$ 是素数，可得 $q=37$。接下来，将 p,q 的值代入条件(1)，此时 $35\cdot 111\cdot 223$ 不整除 $|T|=|\mathrm{PSL}(2,p)|=2^5\cdot 3\cdot 7\cdot 37\cdot 223$，矛盾。

⑨ 当 $p=419$ 时，我们有 $|\mathrm{PSL}(2,p)|=p(p-1)(p+1)/2=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 19\cdot 419$。由 q 需要整除 $(p-1)/2=209$，且 $p>q>5$ 是素数，可得 $q=11$ 或 19。将 p,q 的值代入条件(2)，此时矛盾。

因此通过条件(1)和条件(2)的简单计算，我们可以排除 $p=29,31,41,59,79,83,167,223,419$。最后得到 $p=139,839$。

综上在这种情况下，我们有 $p=139,281,839$。因此，T 的唯一可能是以下的单群：$\mathrm{PSL}(2,139)$，$\mathrm{PSL}(2,81)$，$\mathrm{PSL}(2,839)$。

假设 $T\cong \mathrm{PSL}(2,139)$，我们有 $q=23$，$p=139$，则 $V(\Gamma)=14pq=44758$，如果 T 在 $V(\Gamma)$ 上传递，则 Γ 是 T-弧传递的，所以 $|T_\alpha|=|T|/44758=30$，根据引理 2.4，这是不可能的。因此，T 在 $V(\Gamma)$ 上恰好有两个轨道，当 $\mathrm{Out}(\mathrm{PSL}(2,139))\cong Z_2$ 时，我们有 $\mathrm{A}\cong \mathrm{PGL}(2,139)$，则 $|\mathrm{A}_\alpha|=|\mathrm{A}|/44758=60$。通过 Magma [18]直接计算，$\Gamma\cong C_{44758}$。

假设 $T \cong \mathrm{PSL}(2,281)$，我们有 $q=47$，$p=281$，则 $V(\Gamma)=184898$，当 $\mathrm{Out}(\mathrm{PSL}(2,281)) \cong Z_2$ 时，$\mathrm{A} \cong \mathrm{PSL}(2,281)$ 或 $\mathrm{PGL}(2,281)$，于是 $|\mathrm{A}_\alpha| = |\mathrm{A}|/184898 = 60$ 或 120，由 Magma [18]计算，在这种情况下没有五度对称图。

假设 $T \cong \mathrm{PSL}(2,839)$，我们有 $q=419$，$p=839$，则 $V(\Gamma)=14pq=4921574$，当 $\mathrm{Out}(\mathrm{PSL}(2,839)) \cong Z_2$ 时，$\mathrm{A} \cong \mathrm{PSL}(2,839)$ 或 $\mathrm{PGL}(2,839)$，于是 $|\mathrm{A}_\alpha| = |\mathrm{A}|/14pq = 60$ 或 120，由 Magma [18]计算，在这种情况下没有五度对称图。定理 1.1 的证明完成。

参考文献

[1] Chao, C.Y. (1971) On the Classification of Symmetric Graphs with a Prime Number of Vertices. *Transactions of the American Mathematical Society*, **158**, 247-256. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1971-0279000-7

[2] Conder, M. and Dobcsányi, P. (2002) Trivalent Symmetric Graphs on Up to 768 Vertices. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, **40**, 41-63.

[3] Feng, Y.Q., Kwak, J.H. and Wang, K. (2005) Classifying Cubic Symmetric Graphs of Order 8p or 8p^2. *European Journal of Combinatorics*, **26**, 1033-1052. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2004.06.015

[4] Gardiner, A. and Praeger, C.E. (1994) On 4-Valent Symmetric Graphs. *European Journal of Combinatorics*, **15**, 375-381. https://doi.org/10.1006/eujc.1994.1041

[5] Zhou, J.X. and Feng, Y.Q. (2010) Tetravalent *s*-Transitive Graphs of Order Twice a Prime Power. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **88**, 277-288. https://doi.org/10.1017/S1446788710000066

[6] Hua, X. and Feng, Y. (2011) Pentavalent Symmetric Graphs of Order 8p. *Journal of Beijing Jiaotong University*, **35**, 132-135+141.

[7] Guo, S.T., Zhou, J.X. and Feng, Y.Q. (2011) Pentavalent Symmetric Graphs of Order 12p. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **18**, Article No. P233. https://doi.org/10.37236/720

[8] Guo, S.T., Hou, H.-L. and Shi, J.T. (2017) Pentavalent Symmetric Graphs of Order 16p. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, **33**, 115-124. https://doi.org/10.1007/s10255-017-0642-9

[9] Ling, B., Wu, C.X. and Lou, B.G. (2014) Pentavalent Symmetric Graphs of Order 30p. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **90**, 353-362. https://doi.org/10.1017/S0004972714000616

[10] Hua, X.H., Feng, Y.Q. and Lee, J. (2011) Pentavalent Symmetric Graphs of Order 2pq. *Discrete Mathematics*, **311**, 2259-2267. https://doi.org/10.1016/j.disc.2011.07.007

[11] Pan, J., Lou, B. and Liu, C. (2013) Arc-Transitive Pentavalent Graphs of Order 4pq. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **20**, Article No. P36. https://doi.org/10.37236/2373

[12] Ding, S.Y., Ling, B., Lou, B.G. and Pan, J.M. (2016) Arc-Transitive Pentavalent Graphs of Square-Free Order. *Graphs and Combinatorics*, **32**, 2355-2366. https://doi.org/10.1007/s00373-016-1717-8

[13] Dickson, L.E. (1958) Linear Groups: With an Exposition of the Galois Field Theory. Dover, Mineola.

[14] Guo, S.T. and Feng, Y.Q. (2012) A Note on Pentavalent *s*-Transitive Graphs, *Discrete Mathematics*, **312**, 2214-2216. https://doi.org/10.1016/j.disc.2012.04.015

[15] Zhou, J.X. and Feng, Y.Q. (2010) On Symmetric Graphs of Valency Five. *Discrete Mathematics*, **310**, 1725-1732. https://doi.org/10.1016/j.disc.2009.11.019

[16] Li, C.H. and Pan, J.M. (2008) Finite 2-Arc-Transitive Abelian Cayley Graphs. *European Journal of Combinatorics*, **29**, 148-158. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2006.12.001

[17] Praeger, C.E. (1993) An O'Nan-Scott Theorem for Finite Quasiprimitive Permutation Groups and an Application to 2-Arc Transitive Graphs. *Journal of the London Mathematical Society*, **s2-47**, 227-239. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-47.2.227

[18] Bosma, W., Cannon, C. and Playoust, C. (1997) The Magma Algebra System I: The User Language. *Journal of Symbolic Computation*, **24**, 235-265. https://doi.org/10.1006/jsco.1996.0125