Advances in Education 教育进展, 2021, 11(5), 1507-1512
Published Online September 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2021.115231

小概率事件的教学研究

高发宝

扬州大学数学科学学院，江苏 扬州
Email: gaofabao@sina.com

收稿日期：2021年7月25日；录用日期：2021年8月20日；发布日期：2021年8月27日

摘 要

本文通过介绍同学们学习和生活中遇到或了解到的意外性事件，激发大家的好奇心和探索知识以及解决问题的欲望。借助Chebyshev不等式和弱大数定律揭示小概率现象背后所隐藏的统计规律性，让同学们从科学理论的角度意识到世间万事万物皆充满变数，要以积极健康的心态去面对学习中突如其来的打击，从而在教学过程中达到融入课程思政元素的目标。

关键词

小概率事件，教学研究，Chebyshev不等式，弱大数定律，课程思政

Teaching Research on Rare Events

Fabao Gao

School of Mathematical Science, Yangzhou University, Yangzhou Jiangsu
Email: gaofabao@sina.com

Received: Jul. 25th, 2021; accepted: Aug. 20th, 2021; published: Aug. 27th, 2021

Abstract

This paper introduces the unexpected events that students encounter or understand in their study and life to stimulate their curiosity and desire to explore knowledge and solve problems. With the help of Chebyshev's inequality and weak law of large numbers, this paper reveals the statistical regularity hidden behind the phenomenon of rare events and makes students realize that everything in the world is full of variables from the perspective of scientific theory. They should face the sudden attack in learning with a positive and healthy attitude, to achieve the goal of integrating the elements of Ideological and political education in the teaching process.

文章引用：高发宝. 小概率事件的教学研究[J]. 教育进展, 2021, 11(5): 1507-1512. DOI: 10.12677/ae.2021.115231

Keywords

Rare Event, Teaching Research, Chebyshev's Inequality, Weak Law of Large Numbers, Ideological and Political Education

1. 引言

十九世纪德国哲学家 Friedrich Engels 指出“在表面偶然性起作用的地方，这种偶然性始终是受内部隐藏的规律支配的，而我们的问题只是在于发现这些规律”。法国数学家 Pierre-Simon Laplace 也曾说：“生活中最重要的问题，其中绝大多数在实质上只是概率问题”。小概率事件理论不仅是大学数学专业、统计专业以及金融和经济等专业《概率论》课程的教学内容组成部分之一，也与我们的日常生活息息相关[1]-[7]，广泛存在于工程、金融、经济、医学、教育教学等各行各业[8] [9] [10] [11] [12]。譬如，下面日常生活中常见的意外性事件：

1) 2019 年，距今已有 850 多年历史的世界著名建筑——法国巴黎圣母院的顶部塔楼发生火灾。这座经历了战争年代洗礼的艺术品，却令人惋惜地毁在了和平年代，虽然这事件发生的次数或者频率极小，但它在历史的长河中还是发生了。

2) 天气预报说：“降水概率是 0，但是下雨了”；首先可以肯定的是这样的事件也是偶然的，很不常见的，发生的频率也是极低的，不然天气预报存在的价值会大打折扣。

3) 1912 年，被称为“永不沉没的梦幻客轮”泰塔尼克号在初次航行的第四个夜晚撞上了冰山而沉没；2018 年，川航机长刘传健万米高空“史诗迫降”；这些令人乍舌的几乎不可能的事件却确确实实发生了。

4) ……。

由此可见，小概率事件的发生均带有意外性，发生的频次极其罕见，但它发生时往往会对我们的生活产生重大影响。比如，美国著名安全工程师 Herbert William Heinrich 通过分析工伤事故的发生概率，为保险公司的经营提出过 Heinrich 法则，或称 1:29:300 法则，即在 1 件重大的事故背后除了有 29 件轻度的事故，还有 300 件潜在的隐患的事故。

2. 小概率事件

2.1. 小概率事件的含义

顾名思义小概率事件就是指概率非常小的事件，它同时又具有另外一个别称——“黑天鹅”事件，即指虽然根据以往相关的信息表明该事件具有发生的可能性，但是其实际发生的可能性微乎其微，甚至可以忽略不计，但是又不是绝对不发生的事件。在数学领域，我们通常将小概率事件概括为发生的可能性非常接近于 0 的事件。

2.2. 小概率事件的原理

本节主要通过引入 Chebyshev 不等式和 Bernoulli 大数定律，从本质上帮助同学们理解小概率事件发生的原理。

2.2.1. Chebyshev 不等式

设随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $Var(X)$ 均存在，则对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{Var(X)}{\varepsilon^2},$$

或

$$P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{Var(X)}{\varepsilon^2}.$$

为了在教学过程中激发同学们的思维，这里我们给出两种不同的证明方法。

证明方法 1：定义示性函数

$$I_{\{X\in A\}}=\begin{cases}1, & X\in A\\ 0, & X\notin A\end{cases}$$

则有示性函数的数学期望等于它下标事件 $\{X\in A\}$ 发生的概率，即 $P\{X\in A\}$。这是因为

$$E\left[I_{\{X\in A\}}\right]=1\cdot P\{X\in A\}+0\cdot P\{X\notin A\}=P\{X\in A\}.$$

考虑随机变量 X 和其数学期望 $E(X)$ 之间出现大偏差事件 $\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}$，则

$$\begin{aligned}P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}\cdot\varepsilon^2&=E\left[I_{\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}}\right]\cdot\varepsilon^2=E\left[I_{\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}}\cdot\varepsilon^2\right]\\&\leq E\left[\varepsilon^2\right]\leq E\left[(X-E(X))^2\right]=Var(X),\end{aligned}$$

故 $P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$，得证。

证明方法 2：考虑随机变量 X 为连续型(离散型随机变量类似)，且其概率密度函数为 $p(x)$，则有

$$\begin{aligned}P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}&=\int\limits_{\{x:|X-E(X)|\geq\varepsilon\}}p(x)\mathrm{d}x\\&\leq\int\limits_{\{x:|X-E(X)|\geq\varepsilon\}}\frac{(X-E(X))^2}{\varepsilon^2}p(x)\mathrm{d}x\\&\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(X-E(X))^2p(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{Var(X)}{\varepsilon^2},\end{aligned}$$

即 $P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$，得证。

2.2.2. Bernoulli 大数定律

在 n 次独立重复的试验中，假定事件 A 发生的概率为 p，发生的次数为 S_n，则对任意正数 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right\}=0,$$

或

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{S_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

证明：由 Chebyshev 不等式，我们有

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{n}-E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\geq\varepsilon\right\}\leq\frac{Var\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2},$$

即

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{n}\cdot E\left(S_n\right)\right|\geq\varepsilon\right\}\leq\frac{1}{n^2}\cdot\frac{Var\left(S_n\right)}{\varepsilon^2}.$$

又 $S_n \sim B(n,p)$，则 $E(S_n)=np$， $Var(S_n)=np(1-p)$，因此

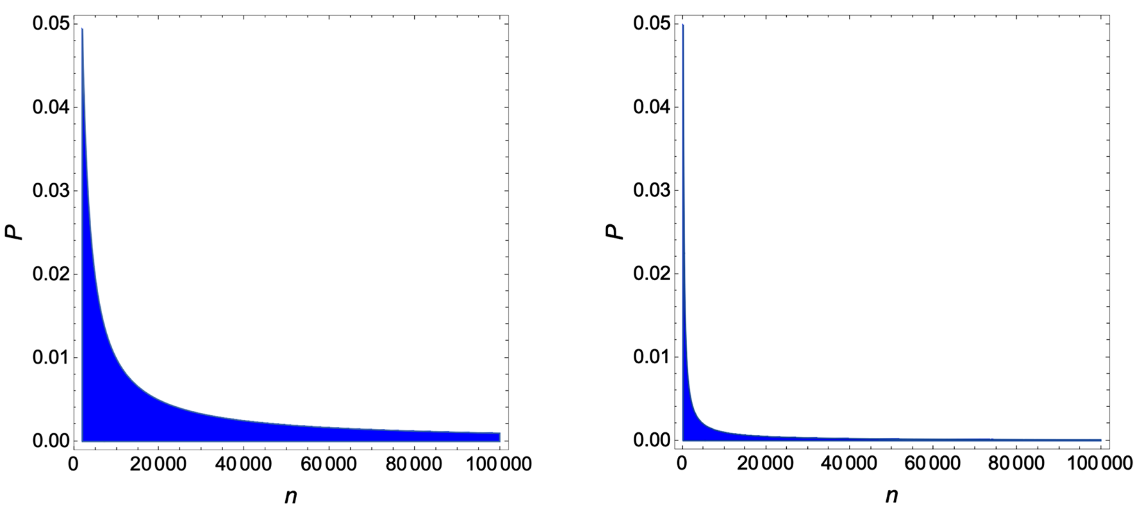
$$P\left\{\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right\}\leq\frac{1}{n}\cdot\frac{p(1-p)}{\varepsilon^2}.$$

从而结合概率的非负性可知

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right\}=0.$$

得证。

根据 Bernoulli 大数定理，在经过大量重复试验后，事件出现的频率和发生的概率之间出现较大偏差的可能性近乎于 0，也就是说事件出现的频率和发生的概率是基本相等的，无限接近的。如图 1 和表 1 所示，若独立重复的试验中某两种小概率事件在 n 次试验中的某一次发生的概率分别为 $p_1=0.01$ 和 $p_2=0.001$，取 Bernoulli 大数定理中 $\varepsilon=0.01$，则小概率事件出现的频率和相应发生的概率出现较大偏差的可能性 P 均随着试验次数 n 的增加而急剧降低，而且概率 p 越小，出现较大偏差的可能性 P 随着试验次数 n 的增加而急剧降低的速率越快，并明显呈现出趋于 0 的趋势。根据日常生活中小概率事件发生是极其罕见的或者说其发生的频率是极低的这一事实，可知小概率事件发生的概率也是极低或极小的。这从侧面揭示了小概率事件发生的原理——即该类事件发生的可能性是非常非常小的，几乎不会发生，但不是绝对不发生。



(a) $p_1=0.01$　　(b) $p_2=0.001$

Figure 1. The relationship between the number of trials *n* and the probability *P*, which *P* is the probability of a large deviation between the frequency of occurrence of a rare event and its probability

图 1. 小概率事件出现的频率和发生的概率出现较大偏差的可能性 P 与试验次数 n 之间的关系

Table 1. The possibility of large deviations between the frequency and probability of rare events
表 1. 小概率事件出现的频率和发生的概率出现较大偏差的可能性

	$p_1 = 0.01$	$p_2 = 0.001$
试验次数 n	出现较大偏差的可能性 P_1	出现较大偏差的可能性 P_2
10,000	0.099	0.000999
20,000	0.00495	0.0004995
40,000	0.002475	0.00024975
60,000	0.00165	0.0001665
80,000	0.0012375	0.000124875
100,000	0.00099	0.0000999

3. 结论

小概率事件是指发生的可能性极小，但是也有可能发生的事件，所以概率为 0 的事件要么指不可能事件，要么指发生的可能性极小的事件，几乎不发生，但是又不是绝对不发生的事件。

通过日常生活中可能遇到的异常现象，让学生感受到小概率事件与现实生活之间的联系，同时结合小概率事件带来的影响：“不要心存侥幸，不怕一万就怕万一”，“常在河边走哪能不湿鞋”，“失之毫厘，差之千里”，“千里之堤，溃于蚁穴”，……，让学生体会量变到质变的过程，从而在教学过程中培养学生的辩证唯物观，增强学生的科学素养。

自然界就是这样，处处充满了随机事件，偶然的未必都是小概率事件，小概率事件却都是偶然的。但是，在历史的长河中：小概率事件必然发生！当然，这里我们强调“小概率事件必然发生”并非给同学们造成恐慌，让同学们整天患得患失，而是希望同学们在日常学习和生活中能够明白世间万事万物皆充满变数，俗话说“一切皆有可能”也是这个道理。我们的学习和生活，充满了坏事件和好事件，小概率的坏事件与小概率的好事件也都在伴随着我们成长，我们要注重未雨绸缪、防患于未然，用积极向上的心态去面对必然发生的好事件。

基金项目

国家自然科学基金项目(Nos. 12172322 和 11672259)、国家留学基金项目(No. 201908320086)和江苏高校品牌专业建设工程资助项目(No. PPZY2015B109)资助。

参考文献

[1] 毕郁. 从概率论角度解决生活中的悖论[J]. 课程教育研究, 2019(18): 228-229.
[2] 尚海涛, 李国栋, 杨洋. 浅谈生活中的小概率事件[J]. 产业与科技论坛, 2012, 11(22): 127-128.
[3] 张洁, 杨文国. 浅谈小概率事件的内涵[J]. 科技风, 2018(25): 74+76.
[4] 嵇冉, 王健. 生活中的小概率事件——从巴黎圣母院失火说起[J]. 中国统计, 2019(7): 47-49.
[5] 任晓明. 小概率事件的原理与应用探索[J]. 数学学习与研究, 2017(13): 20.
[6] 朱瑟珍. 小概率事件原则应用事例几则[J]. 工科数学, 1987(4): 45-46.
[7] 徐长成. 小概率事情能不能遇上?[J]. 文理导航, 2020(17): 24.
[8] 胡维, 陆艳丽. 在学科教学中加强安全教育——以小概率事件的教学为例[J]. 科普童话, 2017(30): 60-61.
[9] 赵远英, 管毅, 姚廷富, 庞一成. 小概率事件原理的教学设计[J]. 教育教学论坛, 2014(26): 238-239.

[10] 李克娥, 谢朝荣. 小概率事件教学分析[J]. 现代商贸工业, 2011, 23(15): 198.

[11] 孙富强. 研究生招生工作中的小概率事件及其预防[J]. 北京航空航天大学学报(社会科学版), 2007, 20(z1): 29-32.

[12] 刘东斌, 吴雁平. 档案利用与“黑天鹅事件”——论档案利用的小概率及不可预测[J]. 档案管理, 2019(3): 55-57.