

# 基于“两性一度”的“数学分析”教学设计探索 ——以“格林公式”为例

石少广, 郭政, 吴艳, 吴越

临沂大学数学与统计学院, 山东 临沂

Email: shishaoguang@lyu.edu.cn, guozheng@lyu.edu.cn, wuyan@lyu.edu.cn, wuyue@lyu.edu.cn

收稿日期: 2021年8月11日; 录用日期: 2021年9月7日; 发布日期: 2021年9月14日

---

## 摘要

“数学分析”是数学类专业的学科基础课程, 是所有数学类后续课程的基础。本文以“格林公式”为例, 从科研成果促进教学、教改项目引领教学和数学文化融入教学三个方面, 探索基于“两性一度”标准的教学设计, 为数学类专业其它课程和理工科专业高等数学类课程建设提供参考。

## 关键词

两性一度, 教学设计, 格林公式

---

# Exploration on the Teaching Design of “Mathematical Analysis” Based on “High-Level, Innovative and Challenging” —Taking “Green’s Formula” as an Example

Shaoguang Shi, Zheng Guo, Yan Wu, Yue Wu

School of Mathematics and Statistics, Linyi University, Linyi Shandong

Email: shishaoguang@lyu.edu.cn, guozheng@lyu.edu.cn, wuyan@lyu.edu.cn, wuyue@lyu.edu.cn

Received: Aug. 11<sup>th</sup>, 2021; accepted: Sep. 7<sup>th</sup>, 2021; published: Sep. 14<sup>th</sup>, 2021

---

## Abstract

“Mathematical Analysis” is the basic course of mathematics specialty and the basis of all subsequent mathematics courses. Taking “Green’s Formula” as an example, this paper explores the

teaching design based on “High-level, Innovative and Challenging” principle from three aspects: the promotion of teaching by scientific research achievements, the guidance of teaching reform projects and the integration of mathematics culture into teaching, which can provide reference for the follow-up professional courses of mathematics majors and higher mathematics courses of science and engineering majors.

## Keywords

High-Level, Innovative and Challenging, Instructional Design, Green's Formula

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

2018年,教育部高等教育司司长吴岩在第十一届“中国大学教学论坛”上提出了“金课”的评价标准为“两性一度”:高阶性、创新性、挑战度[1][2]。2019年,《教育部关于一流本科课程建设的实施意见》(教高[2019]8号),强调:课程是人才培养的核心要素,学生在大学阶段学习受益最直接、最核心、最显效的是课程,课程质量直接决定人才培养质量。为贯彻落实习近平总书记关于教育的重要论述和全国教育大会精神,落实新时代全国高等学校本科教育工作会议要求,必须深化教育教学改革,必须把教学改革成果落实到课程建设上。一流课程建设必须坚持立德树人根本任务,深化高等教育教学改革,提高教学质量,深入挖掘各类课程和教学方式中蕴含的思想政治教育元素,建设适应新时代要求的一流本科课程,形成中国特色、世界水平的一流本科课程体系,构建更高水平人才培养体系[3][4][5]。

“数学分析”是分析学中最古老、最基本的分支,也是大学数学专业的一门基础课程,是数学类专业后续课程的基础。主要内容是微积分学,早期微积分主要用于天文、力学、几何中的计算问题,已经被数学家和天文学家用来解决了大量的实际问题。后来人们也将微积分学称为分析学,或称无穷小分析。随着时代的发展,学科研究水平的不断提高,“数学分析”教学环境也在不断变化,面临教材内容、教学方法、考试考核等方面的挑战:教学内容与课程体系老化,千校一面;知识点多、内容抽象,与大学生生活跃、善于形象思维的特点相冲突,个别内容与地方大学学情不符,与专业培养方案达成度不高;教师教学理念陈旧,教学方法单一,单纯知识传递、忽视能力素质培养,活力不足,现代信息技术与教育教学融合度不高;教师满堂灌、学生被动听,课堂参与度低;传统教学模式,难以与当代大学生求新、求变的思维方式相适应。

## 2. “格林公式”内容分析

“格林公式”是“数学分析”课程中一个非常重要的公式,建立了二重积分和平面第二型曲线积分之间的关系,为二重积分和第二型曲线积分的计算提供了新的方法,在多元积分学教学内容体系中处于承上启下、承前启后的地位。同时,近代数学及其应用的研究成果表明格林公式及其变型在数学物理和化学等多个领域都有广泛的应用[6][7][8]。本节内容可以看做前一节(第二十一章第2节直角坐标系下二重积分的计算)的延伸,即二重积分计算的新方法,同时也是下一节知识(曲线积分与路线无关性)的预备

知识(格林公式是曲线积分与路线无关性判定定理证明工具)。

教学重点: 格林公式引入的物理背景、在积分学理论体系中的地位, 证明格林公式的化复杂为简单、由特殊推一般的思想, 应用格林公式计算二重积分和第二型曲线积分的方法和应注意的问题。

教学难点: 问题不满足应用格林公式的条件时, 如何灵活掌握“挖”“补”积分区域的技巧解决问题。

知识目标: 了解格林公式出现的物理背景和在当代数学中的广泛应用; 理解格林公式的证明过程及证明中用到的化复杂问题为简单问题, 化未知问题为已知问题的数学思想; 掌握利用格林公式计算第二型曲线积分和二重积分以及公式应用需要注意的条件。

能力目标: 掌握格林公式证明中体现的数学高级思维、逻辑推理能力和二重积分的计算能力; 掌握利用上述能力解决不满足格林公式条件的积分计算等复杂问题的综合能力。

素养目标: 从格林公式的引入背景和在各领域中的应用中感悟数学来源于生活实际, 服务于解决生活实际的真谛; 从格林公式证明中体会数学问题中概念和条件匹配的严谨性, 注重从利用格林公式计算第二型曲线积分例题中关注对问题中函数要素的提取和利用。

### 3. “两性一度”标准下的教学设计

#### 3.1. 教学方法与教学理念

##### 3.1.1. 科研成果促进教学

发挥团队科研优势, 强调数学与相邻学科的联系, 将教师相关学术研究融入格林公式的拓展应用, 激发学生科学探究的兴趣, 吸取反映当代数学发展趋势的学术前沿, 拓宽教学内容的深度和广度, 促进深度学习, 夯实基础。突出学生中心地位, 尊重学生差异, 因材施教, 以学生学习成效为出发点组织教学实施。

##### 3.1.2. 教改项目引领教学

将 OBE、翻转课堂、精品课堂和微课程等理念融入课堂教学, 借助多媒体手段提高学生课堂参与度; 注重课堂教学与现代媒体深度融合, 强化课堂设计, 体现基于“两性一度”的混合式教学模式。

##### 3.1.3. 数学文化融入教学

结合数学文化的引入强化德育情感(如讲授以数学家命名的定理时融入数学家的事迹和成果给学生树立正确的价值观)。使学生增强文化自信、提高数学素养, 并切实感受到学习数学、享受数学的乐趣。

#### 3.2. 教学流程设计

教学流程设计如图 1。

#### 3.3. 教学内容与过程设计

##### 3.3.1. 课前准备

- 1) 教师: 准备好关于格林公式及应用的相关资料和 PPT 课件提前发给学生。
- 2) 学生: 结合上一节学习的直角坐标系下二重积分的计算方法思考如下问题  
直角坐标系下二重积分的计算方法的优点和缺点分别是什么?  
通过课前资料, 格林公式的作用是什么? 其优越性体现在什么地方?  
结合前两个问题思考为什么要学习格林公式?

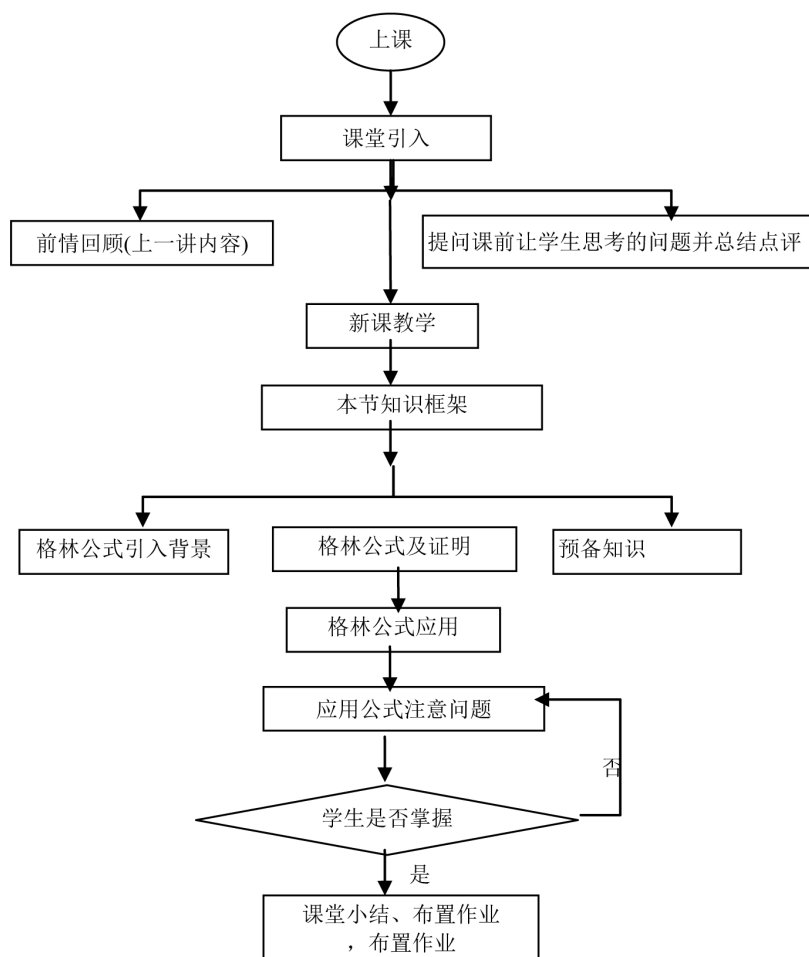


Figure 1. Chart for teaching process

图 1. 教学流程图

### 3.3.2. 课中教学

#### 1) 课堂引入

前情回顾：回顾“第二节直角坐标系下二重积分的计算”，启发学生思考：计算方法的核心思想、关键点，提问课前让学生思考的三个问题并总结点评，点评中注意肯定学生在知识前序学习中的成绩，引导学生的思维将三个问题的解答与本节知识格林公式联系起来。

#### 2) 新课教学

格林公式的前世今生：数学文化引入，结合格林公式出现的物理背景和在现代各领域中的应用发展向学生揭示数学问题的出现、探索与解决中体现的数学高级思维和创新性的分析问题、解决问题的思想(体现数学分析课程的高阶性和创新性)。

预备知识 - 连通区域和区域边界的方向：引导学生如何根据课前看过的资料判断单连通区域和复连通区域。让学生根据区域边界方向的规定，小组讨论如何判定复连通区域边界的方向，并找小组代表和大家分享讨论的思路，教师最后点评。

引出格林公式：给出格林公式，启发学生思考如果证明格林公式，需要先考虑哪些因素，如区域的类型，引导学生提出分情况讨论的思想。让学生开展讨论，启发学生用几条光滑曲线将它分成有限个标准区域，然后逐块应用得到它的格林公式，并相加即可。对于多连通区域，教师先不讲具体的思路，启

发学生大胆想象和讨论，并鼓励有想法的同学给大家分享自己的思路，教师最后根据学生的思路给出总结和方法讲解。重点引导学生把思维聚焦到如何将现在的情况转化为前两种情况，体现数学化复杂为简单，化未知为已知的思想，体会数学的逻辑美。

格林公式的应用：结合本节课一开始讨论的问题(为什么学习格林公式)，让学生思考格林公式能给我们带来计算积分什么样的体验并通过几个例子加以深化理解。

例 1. 计算  $\int_{AB} xdy$ ，其中曲线  $AB$  是半径为  $r$  的圆在第一象限的部分。

通过例 1 让学生掌握格林公式对区域封闭性的要求。如果不是封闭区域如何“补”。

例 2. 计算  $I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ ，其中  $L$  为任一不包含原点的闭区域的边界。

课堂练习：例 2 中  $L$  若为任一包含原点的闭区域的边界，该如何解决？

该练习有很大的挑战度，帮助学生更深入理解格林公式中对被积函数连续性的要求并能尝试探索被积函数在积分区域不连续时，“挖”积分区域的技巧。该练习充分体现了本节知识“两性一度”的教学设计。

### 3) 课堂小结与拓展应用

对本节内容进行总结回顾。结合教师目前开展的学术研究，描述高维格林公式在现代分析前言领域中的广泛应用。

### 3.3.3. 课后思考

例 2 和课堂练习给我们有什么样的启示？和下一个知识点有何联系？

具体如表 1:

**Table 1.** Teaching process design

**表 1.** 教学过程设计

教学过程	时间(分钟)	内容	教学方法与手段
课前准备	60	教师和学生为完成本次课教学任务的准备	翻转课堂、启发、问题导向、小组讨论
	5	课堂引入	提问、问题导向、讨论
课中教学	30	新课教学	讲授、提问、小组讨论、观察和翻转课堂相结合的混合式教学。板书与现代媒体相结合。
	5	课堂小结与拓展应用	讲授、问题导向
课后思考	60	教师为学生深入理解和掌握本节知识点留的具有一定“高阶性、创新性和挑战度”思考问题	翻转课堂、启发、讨论

## 4. 结语

“数学分析”是数学类专业最重要的一门学科基础课，无论在数学知识上，还是在思想上都是本科教学教育的基本载体。它为分析类数学课程提供了直观背景、思想、方法、范例和基本训练。本教学设计通过对格林公式的引入、证明和应用的教学过程，重点引导学生体会问题解决中化复杂为简单、化未知为已知的数学思维，融入教师学术研究，充分体现了课程团队讲授“数学分析”课程的特色与优势：科研促进教学、教改项目，引领教学和数学文化融入教学。目标恰当，重点突出，通过对格林公式条件的强化分析和引导，难点得到突破。能够将多媒体信息手段与课堂教学有效融合，课堂教学组织有效。

通过格林公式的引入物理背景介绍、在积分计算中的各种应用举例以及结合学术前言研究中高维变

形格林公式及其应用、小组讨论与课堂教学内容的有效结合,教学设计融入了专业认证、翻转课堂、精品课堂等理念,实现了教改意义的突破,基本体现了高阶性、创新性和挑战度。通过观察,学生对课前资料的掌握程度不够,特别是透过资料对问题的分析不很到位。在以后的教学设计中,强化对课前资料问题的分析引导。

## 基金项目

国家一流本科课程(教高函[2020] 8号);山东省本科教改项目(M2018X057);临沂大学教学改革研究项目(JG2020M18, G2020SZ084, K2020SZ096, KCSZ202111)。

## 参考文献

- [1] 吴岩. 建设中国“金课”[J]. 中国大学教学, 2018(12): 4-9.
- [2] 中华人民共和国教育部. 关于狠抓新时代全国高等学校本科教育工作会议精神落实的通知(教高函[2018] 8号)[Z/OL]. [http://www.moe.gov.cn/srcsite/A08/s7056/201809/t20180903\\_347079.html](http://www.moe.gov.cn/srcsite/A08/s7056/201809/t20180903_347079.html), 2018-08-27.
- [3] 中华人民共和国教育部. 关于一流本科课程建设的实施意见(教高(2019) 8号)[Z/OL]. [http://www.moe.gov.cn/srcsite/A08/s7056/201910/t20191031\\_406269.html](http://www.moe.gov.cn/srcsite/A08/s7056/201910/t20191031_406269.html), 2019-10-30.
- [4] 陈宝生. 坚持以本为本, 推进四个回归: 建设中国特色、世界水平的一流本科教育[J]. 时事报告(党委中心组学习), 2018(5): 18-30.
- [5] 李志义. “水课”与“金课”之我见[J]. 中国大学教学, 2018(12): 24-29.
- [6] 郑庆玉, 郭政. 数学分析方法[M]. 北京: 电子工业出版社, 2010.
- [7] 陈纪修, 於崇华. 数学分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2017.
- [8] 华东师范大学数学系. 数学分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.