

# “概率论与数理统计”多角度案例教学设计

## ——基于知识点的案例教学

程 凤<sup>1</sup>, 陈 暄<sup>2</sup>

<sup>1</sup>西南交通大学数学学院, 四川 成都

<sup>2</sup>浙江工业职业技术学院设计与艺术分院, 浙江 绍兴

收稿日期: 2022年4月29日; 录用日期: 2022年6月1日; 发布日期: 2022年6月8日

### 摘 要

“概率论与数理统计”学习的一个重要目标是: 培养学生用概率与数理统计的数学思想分析和解决实际问题的能力。而有效的教学案例是引导学生思考、分析、创新的重要途径, 特别是多角度的教学案例更能启发学生思维, 认识到“概率论与数理统计”在日常生活、专业学习、思维方式等方面的指导作用。本文针对不同知识点, 从不同的角度选取了几个教学案例, 着重说明了“概率论与数理统计”可以分析社会热点问题, 解决真实生活问题, 用于交叉学科中, 发挥课程思政作用。

### 关键词

概率论与数理统计, 案例教学, 案例选取, 教学效果

# Multi-Angle Case Teaching Design in “Probability and Mathematical Statistics”

## —Case Teaching Based on Knowledge Points

Feng Cheng<sup>1</sup>, Xuan Chen<sup>2</sup>

<sup>1</sup>School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu Sichuan

<sup>2</sup>Design and Art Branch, Zhejiang Industry Polytechnic College, Shaoxing Zhejiang

Received: Apr. 29<sup>th</sup>, 2022; accepted: Jun. 1<sup>st</sup>, 2022; published: Jun. 8<sup>th</sup>, 2022

### Abstract

An important goal of “probability theory and mathematical statistics” is to cultivate students’ ability to analyze and solve practical problems with the mathematical ideas of probability and ma-

thematical statistics. Effective teaching cases are an important way to guide students to think, analyze and innovate, especially multi-angle teaching cases can inspire students to think and realize the guiding role of "probability theory and mathematical statistics" in daily life, professional studying, way of thinking and other aspects. In view of different knowledge points, this paper selects several teaching cases from different perspectives, and highlights that "probability theory and mathematical statistics" can analyze hot social issues, solve real-life problems, be applied to cross disciplines and play a role of ideological and political curriculum.

## Keywords

Probability Theory and Mathematical Statistics, Case Teaching, Case Selection, Teaching Effect

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

“概率论与数理统计”是一门研究随机现象及其统计规律的数学学科，它是高等院校理工科各专业的必修课程，它就像高等数学、线性代数一样是一门工具学科，为学生学习其它专业课程做好基础准备。但是它又区别于其它数学类课程，它兼具理论性、应用性、实践性与综合性，对培养学生的理性精神、随机事件应对能力、数据处理与建模能力等方面起着十分重要的作用。

“概率论与数理统计”分为两部分学习，第一部分是概率论，第二部分是数理统计，概率论是数理统计的理论基础，数理统计是概率论的应用。概率论是研究随机现象的模型及其性质的学科。一般而言，概率论的发展分为三个阶段，第一阶段称为古典概型，也称为等可能概型，主要以排列组合为工具计算事件发生的概率。第二阶段是近代概率，主要通过微积分的角度去理解各种连续型分布的概率模型及其数字特征，它以高等数学为基础；第三阶段是现代概率，主要从测度论和实分析的角度去理解概率论，它以测度论为基础。高等院校理工科各专业的学生学习的概率论一般指的是近代概率。数理统计是研究随机现象的数据收集、处理及统计推断的学科。一般认为，其发展历程可分为萌芽期、发展期、壮年期及多元化时期，其每一时期的发展特点及代表人物的数理统计思想详见文献[1]。关于统计学的重要意义和作用，作者觉得专著[2]描述的非常好，凡是一个实际问题涉及一批数据，我们都可以且应该应用统计学方法去分析它、解决它。随着统计学的发展和完善，其研究内容已非常丰富，且形成了多个学科分支，如抽样调查、试验设计、回归分析、多元统计分析、时间序列分析、非参数统计、贝叶斯方法，等等。高等院校理工科各专业的学生学习的数理统计一般是：在给定的统计模型下，如何进行统计推断，其包括两方面的内容，第一是参数估计(包括点估计和区间估计)，第二是检验(包括参数检验和非参数检验)。

以上给出了“概率论与数理统计”的发展历程及其重要作用，实际上，本课程的一个重要目标是：培养学生用概率与数理统计的数学思想分析和解决实际问题的能力。但是，作者多年从事高校“概率论与数理统计”课程教学，发现要实现这个目标必须要付出非常艰辛的努力。

## 2. “概率论与数理统计”教学存在的问题

作者多年从事高校“概率论与数理统计”课程教学，发现在教与学的过程中主要存在以下问题。

1) 以教为主。目前国内的大学数学课教学形式均为课堂教学，教师借助于教材和课件进行授课，根

据知识点的顺序, 循序渐进的讲解。学生对知识点的掌握接受度高, 能够有效的掌握数学知识点, 也能够很好的解答课后习题。但是知识点的应用不足, 在学习前的自我思考不足。

2) 以练为辅。对知识点的练习均以成熟的习题为主, 结合案例的分析也均有明确的知识点套用体系。学生在掌握知识点后, 练习时可以轻松地对应解答, 思考空间不足。

3) 以勤补拙。目前的教学模式, 已替学生做好了整套知识体系的结构搭建, 学生只要认真的跟着授课思路学习, 都能获得好的成绩。最终成绩体现的是学生认真与否、勤劳与否。不能体现学生的创造力和创新思维。

为了有效解决以上问题, 在教学的过程中教师可以多角度的设计教学案例, 将数学知识点代入时事案例进行讲解。一方面提升学生的学习兴趣, 在探讨时事案例中有效掌握知识点, 同时拓宽学生的知识面、增加对时事的关心和思考, 更深层次的理解数学在实际生活中发生的重要作用; 另一方面促使教师不断进行教学创新, 关注社会热点, 挖掘热点时事背后的数学逻辑, 寻找、发现、总结切合学生学习的教学案例, 让教学课件年年有不同、年年有新意。

### 3. 多角度教学案例设计

#### 3.1. 结合当前热点问题的教学案例——事件的独立性和互不相容性

用当下同学们关注的热点问题作为载体, 进行研究分析, 引出数学知识的应用, 将打开同学们用数学眼光看问题的大门。数学就像人体内的骨骼, 支撑起了事务的发展规律。具备数学思维就像拥有了 X 光的眼镜, 可以看到问题的本质。下面以新冠肺炎病毒单检混检为例说明概率论中随机事件的独立性和互不相容性。

自 2019 年底发现新冠肺炎病毒, 到 2020 年 3 月新冠肺炎疫情全球爆发, 到现在新冠肺炎病毒仍然在全世界范围内蔓延, 这给人类生命安全带来了巨大威胁。疫情尚未结束, 防控仍在进行, 到目前为止, 我国抗击疫情的政策和措施十分有效且高速, 取得了疫情防控的初步成效。其中新冠病毒核酸筛查是确认新冠病毒的重要手段, 也是患者确诊的重要流程之一。核酸检测分为单样检测(简称单检)和混样检测(简称混检)。根据国务院应对新型冠状病毒肺炎疫情联防联控机制医疗救治组给出的指导意见, 在人群总体阳性率较低(低于 0.1%)时混检更为适宜[3]。

为此, 给出一个实际的例子。在一个人数很多的团体中(例如某所大学、某个小区)检测新冠肺炎病毒感染情况, 为此要检测  $N$  个人。可以用两种方法进行: 1) 每个人分别取咽拭子样本, 这就需验  $N$  次; 2) 按  $k$  个人一组进行分组, 把  $k$  个人的咽拭子采样混合在一起进行检验, 如果这混合样本呈阴性反应, 就说明这  $k$  个人的咽拭子样本都呈阴性反应, 这  $k$  个人就只需验一次。若呈阳性, 再对这  $k$  个人分别进行化验。这样,  $k$  个人总共需要化验  $k+1$  次。

**例 1 (新冠检测)** 假设每个人化验呈阳性的概率为  $p = 0.05\%$ , 且这些人的试验反应是相互独立的。假设按  $k = 15$  人一组进行检验, 求一组中检测出新冠肺炎病毒的概率是多少? 结果阳性

**错误解法:**

令事件

$A_i = \{\text{第 } i \text{ 人感染}\}, i = 1, 2, \dots, N$ , 事件  $B = \{\text{一组中检测结果呈阳性}\}$ 。那么  $P(A_i) = p = 0.05\%$ ,  $B = \bigcup_{i=1}^k A_i$ ,

则  $P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k P(A_i) = 15 \times 0.05\% = 0.75\%$ 。

学生在计算过程错误的原因有两种: 1) 认为每个人的试验反应是相互独立, 那么它们一定是互不相容的, 直接应用加法公式; 2) 认为计算和事件的概率就直接等于概率之和, 没有思考等式成立的条件。

事实上, 虽然每个人的试验反应是相互独立的, 但是可以出现两个或两个以上样本都是阳性的。因此, 在计算过程中最好利用对立事件的概率和相互独立事件积的概率公式解答。

**正确解法:**

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^k [1 - P(A_i)] = 1 - (1 - 0.05\%)^k = 1 - (1 - 0.05\%)^{15} \approx 0.00747 = 0.747\%$$

从上面的分可以看出, 当  $k=1$  时  $P(B)=0.05\%$ , 即单检虽然概率较低, 但是检测效率不高; 当  $k=N=50000$  时,  $P(B)$  几乎就是 1, 即将全体混检, 检测结果为阳性的概率几乎为 1, 这样的检测没有实际意义。因此, 需要选取适当的  $k$ , 使得检测效率较高且保证检验的有效性。

同时注意到, 颠覆常规认知的案例, 更能激发同学们的好奇心, 能够体现数学的力量和对于现实工作生活的指导意义。

### 3.2. 基于真实问题的教学案例——期望和方差

通识性知识点的导入过程, 依托真实问题的案例, 可以形象的代入知识结构。真实案例往往与同学们的生活常识有对应关系。与常识能够相对应的数学知识点, 在求解前学生们就能建立对结果的想象, 学习过程就像一个验证过程。

我们平时在购物时经常遇到商场或超市的促销活动, 例如打折促销、抽奖促销等。促销的目的是为了使消费者了解和注意产品, 激发消费者的购买欲望, 并促使其实现最终的购买行为。而有奖式促销是一种常见的、有效果的促销方式[4]。下面以有奖促销说明期望和方差的应用。

**例 2 (有奖促销)** 面包店为了促进销售, 增加购买量, 开展了一个促销活动。在部分面包包装盒内放了奖券, 凭借奖券可以免费获得额外 3 盒面包。假定每个面包内含奖券的概率为  $p=0.05$ 。求出中奖所需购买面包个数的均值和方差。

**解:** 假设中奖所需购买面包数为随机变量  $X$ , 则  $X$  为中奖首次发生时所需购买的面包数量, 因此  $X$  服从参数为  $p=0.05$  的几何分布, 得

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.05} = 20$$

$$D(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-0.05}{0.05^2} = 380$$

通过上述生活中的实际例子, 让学生更直观的理解均值和方差的求解和应用, 即平均购买 20 个会有一次中奖机会, 购买个数和中奖所需平均购买个数的差异程度可以通过 380 衡量。

### 3.3. 基于交叉学科的教学案例——正态分布

我校是工科为主的综合性大学, 将数学基础知识更多的传授给工科的学生, 对他们以后的继续深造、科研、工作、创业、生活等能够起到思维平台构建的作用。

因此基于交叉学科的教学案例, 能够启发同学们在本专业学习中的数学思维。对数学知识点的教学依然是限定在通识性教育的层级, 深入的学习依靠学生自行完成。教会的是数学概念, 知识点的定向学习, 是依靠学生的学习能力完成, 也在课程中不断强化学生的学习能力。

在信号处理和通信工程领域, “信号检测” 是对所接受到的含干扰噪声的信号进行提取的过程, 通常将噪声看成一个随机变量, 它加在信号上面, 使之变形。下面看一个典型的例子[5]。

**例 3 (通信检测)** 记一个传输的信号为  $S$ ,  $S=1$  或  $S=-1$ 。由于通信误差, 在接收端得到的是加有噪

声的信号, 噪声  $N$  是一个正态随机变量, 均值为  $\mu = 0$ , 方差  $\sigma^2 = 1$ 。如果接收端得到的混有噪声的信号大于 0, 则判断信号  $S = 1$ ; 如果接收端得到的混有噪声的信号小于 0, 则判断信号  $S = -1$ 。问这种判断方法的误差有多大?

**解:** 当传输方传输的信号为  $S = -1$ , 而噪声  $N > 1$ , 此时  $S + N = N - 1 > 0$ , 接收方误判为  $S = +1$ 。当传输方传输的信号为  $S = 1$ , 而噪声  $N < -1$ , 此时  $S + N = N + 1 < 0$ , 接收方误判为  $S = -1$ 。因此, 当  $S = -1$  时, 误判的概率为

$$P(N > 1) = 1 - P(N \leq 1) = 1 - P\left(\frac{N - \mu}{\sigma} \leq \frac{1 - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1 - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(1) = 0.1587$$

由对称性可知, 若发送的信号为  $S = +1$ , 其相应的误判率也是 0.1587。因此, 这种判断方法的误差为 0.1587。

上述案例是针对信息专业班级的课件, 将概率知识点与其专业课相结合, 更利于学生的理解。

### 3.4. 基于思政因素的教学案例——矩估计法

课堂教学是育人最主要的过程, 也是教书育人最重要的途径。知识传授与价值引领是育人的基本实现形式。在关注知识传授与能力培养的同时, 更要关注知识传授与价值引领的同频共振。将思政因素加入教学过程中, 学生在学的过程中就能潜移默化的感受到道德熏陶, 从而实现课程“立德树人”的功能。

2011 年 10 月 26 日, 国务院总理温家宝主持召开国务院常务会议, 决定启动实施农村义务教育学生营养改善计划。2021 年是“农村义务教育学生营养改善计划”实施的第十年。近日, 由教育部财务司会同中国发展研究基金会联合完成的评估报告显示, 营养改善计划实施十年来成效显著, 基本做到了“每一分钱都没有浪费”。十年来, 欠发达地区农村学生的整体面貌有了显著改善, 学生的体质健康、运动能力、学习能力都有了显著提升[6]。下例以“农村义务教育学生营养改善计划”后的成效为例说明矩估计法的具体应用。

**例 4 (“计划”成效)**若四川省某农村小学的校长想调查经过“农村义务教育学生营养改善计划”之后学生的体重情况, 已知学生的体重服从正态分布, 但具体服从什么正态分布并不知道, 该怎么办?

**解:** 1) 首先从一年级中随机抽取 30 人, 记录其体重(单位: 千克)如下:

24.6	20.6	20.9	21.2	19.6	23.9	22.5	16	24.2	23.6
22.9	26.1	27.1	22.1	30.6	19.2	25.4	18.7	24.4	21.6
22.9	22.6	22.3	20.5	28	20.4	19	24	22.6	25.6

2) 根据矩估计法的分析结果, 可以得出此正态分布的均值  $\mu$  和方差  $\sigma^2$  的矩估计

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{24.6 + 20.6 + 21.2 + \cdots + 22.6 + 25.6}{30} = 22.77,$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{(24.6 - 22.77)^2 + (20.6 - 22.77)^2 + \cdots + (25.6 - 22.77)^2}{30} = 8.93$$

上述案例是研究国家的重大政策中的数学知识点, 在给学生讲解数学知识的同时, 让他们意识到数学知识为国家发展带来的实际意义, 也在教学过程中让学生感知到国家在推动共同富裕方面做出的努力, 提高学生的自豪感和自信心。

## 4. 结论

在教学实践中, 案例教学法一直是一种有效的教学方法, 它能通过学生所见所闻的真实事件开始提高学生学习的积极性、主动性, 开阔学生思路、视野, 加强学生自学能力和探索能力。作者在多年的“概率论与数理统计”的教学中使用案例教学法, 均取得了很好的教学效果。在教学过程中, 作者发现多角度案例教学设计对于教学活动更具有启发性, 案例的选取既可以是当前的热点时事, 也可以选取人人皆知的历史事件。既可以对真实问题进行数学概括, 也可以选取学生专业课的知识点进行分析。每年一度的课件更新, 虽然工作量很大, 但能有效提高学生的知识程度, 提高学生的理解力和主动学习能力, 提高学生对社会发展的深度思考, 对学生的能力建设和思想健康都起到积极的作用。

## 致 谢

作者非常感谢相关文献对本文的启发以及审稿专家提出的宝贵意见。

## 基金项目

西南交通大学 2020 年本科教育教学研究与改革项目(20201035-07); 浙江省统计局统计重点研究项目(21TJZZ29)。

## 参考文献

- [1] 徐传胜, 郭政. 理论数理统计学的发展历程[J]. 高等教学研究, 2007, 10(1): 121-125.
- [2] 茆诗松, 程依明, 濮晓龙. 概率论与数理统计[M]. 北京: 高等教育出版社, 2020: 223.
- [3] 国务院应对新型冠状病毒肺炎疫情联防联控机制医疗救治组. 新冠病毒核酸筛查稀释混样检测技术指引[J]. 中国病毒病杂志, 2020, 10(5): 329, 332.
- [4] MBA 智库·百科. 促销[EB/OL]. <https://wiki.mbalib.com/wiki/%E4%BF%83%E9%94%80>
- [5] Bertsekas, D.P. and Tsitsiklis, J.N. 概率导论[M]. 郑忠国, 童行伟, 译. 北京: 人民邮电出版社, 2018: 134-139.
- [6] 环球网. 农村学生营养改善计划实施 10 年: 从吃得饱到吃得好[EB/OL]. <https://baijiahao.baidu.com/s?id=1719813077399560991&wfr=spider&for=pc>, 2021-12-22.