Advances in Education 教育进展, 2023, 13(5), 2926-2930
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2023.135460

空间解析几何中平面方程的多种解法

黄　杰

黑龙江大学数学科学学院，黑龙江 哈尔滨

收稿日期：2023年4月25日；录用日期：2023年5月23日；发布日期：2023年5月31日

摘　要

本文针对空间解析几何中的两道课后习题，即求与两条直线有关的平面方程，分别利用平面的点法式，点向式，平面的一般方程，平面束方程等给出多种求解方法，旨在培养学生针对求解平面方程的题目时拓宽思路，发散思维。

关键词

直线，方向向量，法向量，平面束，平面方程

Multiple Solutions to Plane Equation in Space Analytic Geometry

Jie Huang

School of Mathematical Sciences, Heilongjiang University, Harbin Heilongjiang

Received: Apr. 25th, 2023; accepted: May 23rd, 2023; published: May 31st, 2023

Abstract

This article aims at two exercises in space analytic geometry, that is, to find the plane equation related to two straight lines. We give multiple solutions: using a point and a normal vector on the plane, using a point and two directional vectors on the plane, using the general equation of the plane, and using the plane pencil, and so on. The purpose is to train students to broaden their thinking and diverge their thinking when solving problems of plane equations.

Keywords

Straight Line, Directional Vector, Normal Vector, Plane Pencil, Plane Equation

文章引用: 黄杰. 空间解析几何中平面方程的多种解法[J]. 教育进展, 2023, 13(5): 2926-2930.
DOI: 10.12677/ae.2023.135460

1. 引言

平面是空间解析几何中最简单、最基本的几何图形[1] [2]。初中阶段我们已经学过确定空间中一个平面的几种条件，如不在同一直线上的三点确定一个平面，一条直线和该直线外一点确定一个平面，两条相交直线确定一个平面，两条平行直线确定一个平面等，这些确定平面的条件虽然不同，但是它们相互之间是有联系的，都可以相互转化。在空间中引入坐标系后，点和直线上的方向向量就有坐标表示，借助这些几何量的坐标表示我们可以给出平面方程的表达式，如点位式，点法式，三点式，截距式，一般式等。平面方程的表达形式虽然多种多样，但是这些表达式本质上是一样的。根据不同的条件，就会产生不同求解平面方程的方法，学生初学时由于面临多种求解平面方程的方法，且对题目了解不够深刻，导致思路不清，对题目无从下手。下面针对两道常见的求解平面方程的习题[3]，多角度考虑，从不同方法入手，形成不同的解题思路。希望同学们可以参考这两道习题的多种求解方法打开思路，根据不同的条件采取合适的求解方法。

2. 平面方程的解法

例 1 求经过直线 $l_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}$ 且平行于直线 $l_2:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$ 的平面方程。

分析设所求平面为 π，直线 l_1 过定点 $P_1(1,0,0)$ 且方向向量为 $\boldsymbol{v}_1=(2,1,-1)$，直线 l_2 过定点 $P_2(0,0,-1)$ 且方向向量为 $\boldsymbol{v}_2=(2,1,-2)$，因为 $\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$ 和 $\boldsymbol{P_1P_2}$ 不共面，由此可知直线 l_1 与直线 l_2 是异面直线。若利用平面方程的“点法式”求解此题，则需要找到平面上一点及平面上的法向量。

解法 1 设所求平面 π 的法向量为 $\boldsymbol{n}$，因为 $\boldsymbol{n}$ 与 l_1，l_2 的方向向量垂直，所以取 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2=(-1,2,0)$。因为平面 π 经过直线 l_1，所以直线 l_1 上的点都在平面 π 上，即 $P_1(1,0,0)$ 是平面 π 上的一点。故通过点 P_1 且法向量为 $\boldsymbol{n}$ 的平面方程为 $-x+2y+1=0$。

分析已知所求平面 π 是平行于直线 l_1 和 l_2，那么两条直线上的方向向量 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 可以作为平面上的方位向量。我们可以利用平面上一点及两个不共线的方位向量，通过“点位式”方程求解此题。

解法 2 由已知可得，平面 π 过点 P_1 且 $\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$ 是平面 π 上的方位向量，则平面方程为 $\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0$，整理得 $\pi:-x+2y+1=0$。

分析受解法 2 的启发，根据同样的已知条件，给出平面的参数方程(向量式/坐标式)。

解法 3 设平面通过矢径 $\boldsymbol{r}_0=(1,0,0)$，方位向量为 $\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$，则平面的参数方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t_1\boldsymbol{v}_1+t_2\boldsymbol{v}_2$ （t_1,t_2 为参数)，即： $x=1+2t_1+2t_2$， $y=t_1+t_2$， $z=-t_1-2t_2$。

分析利用“三点式”来求平面方程，即由平面上不共线的三个点的坐标给出平面方程。已知直线 l_1 在所求平面上，可以在 l_1 上任取两点，此时只需要知道平面上与前两个点不共线的第三个点的坐标，就可以运用平面的“三点式”方程求出平面方程。

解法 4 取直线 l_1 上的两点 $P_1(1,0,0)$ 和 $P_3(3,1,-1)$。由于直线 l_2 上的点 $P_2(0,0,-1)$ 不在所求平面 π 上，从而设点 P_2 在平面 π 上的射影点为 $P_2'(x_0,y_0,z_0)$。因为 l_1 与 l_2 是异面直线，所以 l_1 与 l_2 之间的距离为

$$d=\frac{\left|\left(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\right)\right|}{\left|\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2\right|}=\frac{\sqrt{5}}{5}。$$

又因为 $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_2'$ 垂直于平面 π，故 $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_2'$ 与 $\boldsymbol{n}$ 平行，即 $\frac{x_0}{-1}=\frac{y_0}{2}=\frac{z_0+1}{0}$，由于 $\Delta P_2P_2'P_1$ 构成一个直角三角形，根据勾股定理得

$$\left(x_0-1\right)^2+y_0^2+z_0^2=2-\frac{1}{5},$$

联立上两式可得 $x_0=\frac{1}{5}$，$y_0=-\frac{2}{5}$，$z_0=-1$，即 $P_2'\left(\frac{1}{5},-\frac{2}{5},-1\right)$。从而过 P_1，P_2'，P_3 的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -1 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

即 $\pi:-x+2y+1=0$。

分析空间中任一一个平面都可以用关于 x，y，z 的三元一次方程来表示，我们可以设出此平面的一般方程，通过已知条件求解方程中的系数，最终得到该平面方程的具体表达式。

解法 5 设所求平面的一般方程为 $\pi:Ax+By+Cz+D=0$，由于平面 π 经过直线 l_1 且平行于直线 l_2，所以平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}=\left(A,B,C\right)$ 与 l_1，l_2 的方向向量垂直，即 $\begin{cases}2A+B-2C=0\\2A+B-C=0\end{cases}$，解得 $A:B:C=1:\left(-2\right):0$，此时令 $\pi:x-2y+D=0$。因为直线 l_1 在平面 π 上，所以直线 l_1 上的点 P_1 也在平面 π 上，把点 P_1 代入平面 π 的方程中，得 $D=-1$，从而平面 $\pi:-x+2y+1=0$。

分析经过空间中同一条直线的一切平面的集合叫做共轴平面束，借助直线的方程可以给出经过该直线的平面束的方程，我们利用平面束求解平面方程，先确定通过直线 l_1 的平面束方程，该平面束中有无穷多个平面，其中只有一个平面是与直线 l_2 平行，从而得到所求平面方程。

解法 6 设直线 l_1 的一般方程为 $\begin{cases}x-2y-1=0\\y+z=0\end{cases}$，则过直线 l_1 的平面束方程为

$$\lambda_1\left(x-2y-1\right)+\lambda_2\left(y+z\right)=0,$$

整理得 $\lambda_1x+\left(\lambda_2-2\lambda_1\right)y+\lambda_2z-\lambda_1=0$。又因为所求平面平行于直线 l_2，所以平面的法向量与直线 l_2 的方向向量垂直，从而 $2\lambda_1+\left(\lambda_2-2\lambda_1\right)-2\lambda_2=0$，解得 $\lambda_2=0$。不失一般性，令 $\lambda_1=1$，故所求平面方程为 $x-2y-1=0$。

分析受解法 6 平面束的启发，分析经过直线 l_1 的平面与经过直线 l_2 的平面，因为所求平面 π 是经过直线 l_1 且与异面直线 l_2 是平行的，从而可知经过 l_1 的平面束中至少有一个平面与经过直线 l_2 的平面是平行的。

解法 7 直线 l_1 与 l_2 的一般方程分别为

$$l_1:\begin{cases}x-2y-1=0,\\y+z=0,\end{cases}\quad l_2:\begin{cases}x-2y=0,\\2y+z+1=0.\end{cases}$$

由此可知直线 l_1 经过平面 $\pi_1:x-2y-1=0$，直线 l_2 经过平面 $\pi_2:x-2y=0$，由于平面 π_1 平行于平面 π_2，所以两条异面直线 l_1 与 l_2 在两个平行平面内。题目中求通过直线 l_1 且平行于直线 l_2 的平面 π，是由 l_1

和 l_2 的方向向量所决定的。故平面 π 与平面 π_1，π_2 是平行的，又因为直线 l_1 在所求平面 π 上，所以平面 π_1 就是所求平面。

针对本道例题，即求经过一条直线且平行于另一条异面直线的平面方程，“点位式”，“点法式”，“一般式”都比较简单。因为“三点式”需要借助平面上不共线的三点求解平面方程，根据已知条件一条直线在平面上，那我们可以在此直线上任选两点，但是想寻找第三个点就需要借助勾股定理及异面直线之间的距离。虽然“三点式”也可以求出平面方程，但对于此题来说“三点式”并不简便。借助平面束的定义，只要已知条件中所求平面经过某一条直线 l，就可以写出过该直线 l 的平面束方程，那么所求平面一定在这个平面束中。相对上述几种解法，方法 7 更简便，因为所求平面 π 平行于直线 l_1 和 l_2，则必存在经过直线 l_1 的平面 π_1，必存在经过直线 l_2 的平面 π_2，使得 $\pi \parallel \pi_1 \parallel \pi_2$。再根据直线 l_1、l_2 的一般方程，得到平面 π_1 和 π_2，则平面 π 的方程也就可知。但是此方法也是有局限的，如果从直线 l_1、l_2 的一般方程中不能轻易的得到互相平行的平面 π_1 和 π_2，那么此方法的简便优势也就不存在了。

例 2 求过点 $P(1,2,1)$ 而与两直线 $\begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$ 平行的平面的方程。

分析设所求平面为 π，题目中两直线分别记为 l_1 与 l_2，直线 l_1 的方向向量为 $\boldsymbol{v}_1=(1,-2,-3)$，直线 l_2 的方向向量为 $\boldsymbol{v}_2=(0,-1,-1)$，取直线 l_1 上的一点 $P_1(0,0,1)$，直线 l_2 上的一点 $P_2(0,0,0)$，根据

$$\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

由此可知 l_1 与 l_2 是两条异面直线。因为平面 π 平行于直线 l_1 与 l_2，所以直线上的方向向量 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 可以作为平面上两个不共线的方位向量，运用“点位式”求平面方程。

解法 1 由已知可得，平面过点 $P(1,2,1)$，且直线 l_1 与 l_2 的方向向量 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 是平面 π 的两个不共线的方位向量，则平面方程为 $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0$，整理得 $\pi: -x+y-z=0$。

分析受解法 1 的启发，根据同样的已知条件，给出平面的参数方程(向量式/坐标式)。

解法 2 设平面通过矢径 $\boldsymbol{r}_0=(1,2,1)$，方位向量为 $\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$，则平面的参数方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t_1\boldsymbol{v}_1+t_2\boldsymbol{v}_2$ (t_1,t_2 为参数)，即：$x=1+t_1$，$y=2-2t_1-t_2$，$z=1-3t_1-t_2$。

分析因为平面 π 平行于直线 l_1 与 l_2，所以可由直线的方向向量构造平面的法向量，运用“点法式”求平面方程。

解法 3 设平面 π 上的法向量为 $\boldsymbol{n}$，因为 $\boldsymbol{n}$ 与直线 l_1、l_2 的方向向量都垂直，所以取

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2=(-1,1,-1),$$

故经过点 P 且以 $\boldsymbol{n}$ 为法向量的平面方程为 $-(x-1)+(y+2)-(z-2)=0$，即 $-x+y-z=0$。

分析利用平面的一般方程求解此题。

解法 4 设平面 π 的一般方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，因为直线 l_1 与 l_2 都平行于平面 π，所以直线上的方向向量 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 都与平面上的法向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直，即 $\begin{cases} A-2B-3C=0 \\ B+C=0 \end{cases}$，解得 $A:B:C=(-1):1:(-1)$，此时令 $\pi: -x+y-z+D=0$。又因为点 P 在平面 π 上，代入方程中，得 $D=0$，从而平面 $\pi: -x+y-z=0$。

分析利用平面束求解此题，题目中给出两条异面直线的一般方程，可以分别求出经过直线 l_1 和直线 l_2 的平面束方程，已知所求平面 π 与直线 l_1、l_2 都平行，这说明经过直线 l_1 的平面束中至少有一个平面与

经过直线 l_2 的平面束中的一个平面平行，并且这两个平面与平面 π 也平行。根据平行平面方程最终得到平面 π 的方程。

解法 5 由于直线 l_1 与 l_2 平行于平面 π，那么必存在经过直线 l_1 的平面 π_1 平行于经过直线 l_2 的平面 π_2 平行于所求平面 π。因为直线 l_1 与 l_2 是两条异面直线，所以分别求出经过直线 l_1 与直线 l_2 的平面束方程。设经过直线 l_1 的平面束方程为 $\lambda_1(x+2y-z+1)+\lambda_2(x-y+z-1)=0$，整理得

$$(\lambda_1+\lambda_2)x+(2\lambda_1-\lambda_2)y+(\lambda_2-\lambda_1)z+\lambda_1-\lambda_2=0。$$

设经过直线 l_2 的平面束方程为 $\mu_1(2x-y+z)+\mu_2(x-y+z)=0$，整理得

$$(2\mu_1+\mu_2)x+(-\mu_1-\mu_2)y+(\mu_1+\mu_2)z=0。$$

现寻找这两个平面束中的平行平面，令 $\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2\mu_1+\mu_2}=\frac{2\lambda_1-\lambda_2}{-\mu_1-\mu_2}=\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\mu_1+\mu_2}$，得 $\lambda_1=\mu_1=0$，不妨取 $\lambda_2=\mu_2=1$，此时令平面 $\pi: x-y+z+D=0$，因为点 P 在平面 π 上，代入平面方程中，得 $D=0$，从而平面 $\pi: x-y+z=0$。

分析受解法 5 的启发，分别寻找经过直线 l_1 与直线 l_2 的两个平行平面，利用所求平面与这两个平行平面平行，求解此题。

解法 6 直线 l_1 与 l_2 的一般方程分别为

$$l_1:\begin{cases}x+2y-z+1=0,\\x-y+z-1=0,\end{cases}\quad l_2:\begin{cases}2x-y+z=0,\\x-y+z=0,\end{cases}$$

由此可知直线 l_1 经过平面 $\pi_1: x-y+z-1=0$，直线 l_2 经过平面 $\pi_2: x-y+z=0$，故两条异面直线 l_1、l_2 分别在两个平行平面内。已知直线 l_1 与 l_2 都平行于平面 π，所以必有经过直线 l_1 的一个平面平行于经过直线 l_2 的一个平面，并且平面 π 平行于上述两个平面。因为 π_1 平行于 π_2，从而 π_1 平行于 π_2 平行于 π，令平面 $\pi: x-y+z+D=0$。因为点 P 在平面 π 上，代入平面方程中，得 $D=0$，从而平面 $\pi: x-y+z=0$。

针对本道例题，求经过一点且平行于两条异面直线的平面方程，仍可运用类似例 1 的方法求解。本题中没有用到“三点式”是因为题中只说明所求平面与直线 l_1、l_2 平行，但没有说明直线 l_1、l_2 是否在所求平面上，这样就不容易找到平面上不共线的三点，故弃用此法。

3. 结论

综上我们介绍了空间解析几何中求平面方程的两道例题的多种解法，我们发现对于同一道题虽然不同方法求得的结果是一样的，但是借助的条件及分析过程是不同的。针对题中已知条件采用简单便捷的求解方法是本文的最终目的。

参考文献

[1] 李养成. 空间解析几何[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 35-70.

[2] 吕林根, 许子道. 解析几何[M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2006: 96-138.

[3] 高红铸, 王幼宁, 张蓓. 空间解析几何习题精解[M]. 第 3 版. 北京: 北京师范大学出社, 2009: 116-124.