

高等代数课堂教学中融入思政元素的教学设计 ——以“欧氏空间的概念”为例

尹小艳

西安电子科技大学数学与统计学院, 陕西 西安

收稿日期: 2023年5月12日; 录用日期: 2023年6月8日; 发布日期: 2023年6月19日

摘要

本文以高等代数课程中的“欧氏空间的概念”为例, 探讨如何在数学类专业课程的教学中有有机融入思政元素, 实现知识传授、能力提升与价值引领的紧密融合。文章分别从哲学观点熏陶、数学思维培养、科学价值观引领三个切入点挖掘思政素材, 教学设计注重以专业知识为载体, 启发科学思维方法, 提升应用能力, 落实课程思政。

关键词

课程思政, 高等代数, 欧氏空间, 课程设计

Integrating Ideological and Political Elements into the Instructional Design of Advanced Algebra

—Taking the “Euclid Space” for Example

Xiaoyan Yin

School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an Shaanxi

Received: May 12th, 2023; accepted: Jun. 8th, 2023; published: Jun. 19th, 2023

Abstract

In this context, taking “the concept of Euclid space” for example, we discuss how to integrate ideological and political elements into the teaching of professional mathematical courses to achieve close integration of knowledge transfer, ability improvement and value guidance. Using profes-

sional knowledge as the carrier, we excavate ideological and political materials from three aspects: philosophical point of view, mathematical thinking cultivation and scientific value guidance in mathematics course. The teaching design focuses on inspiring scientific thinking methods and improving application ability.

Keywords

Ideological and Political Education, Advanced Algebra, Euclid Space, Course Design

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在专业课程教学中实施课程思政，把知识传授、能力培养、价值引领有机融合，是立德树人的根本任务。近年来各高校课程思政建设稳步推进，取得诸多结果，其中数学类课程思政的探索与实践大多集中在线性代数、高等数学、概率统计等工科数学类公共课程[1]-[5]，而对数学各分支的专业课程如高等代数、数学分析、泛函分析等，课程思政建设的相关成果较少。

高等代数是数学与统计学院所有专业的核心课，该课程体系完备、内容抽象、逻辑严密，蕴含丰富的哲学思想和数学智慧，是培养数学思维、提升数学修养的核心课程，也是进行思政教育的良好载体。该课程的思政建设总体思路如下：围绕“立德树人”的核心，依托课程内容，挖掘、提炼、整合思政元素，精心设计教学过程及教学方法，使思政内容与专业知识自然契合，打造“知识、能力、价值”三位一体的思政课堂模式，培养科学先进的思维方式，激发学生献身基础研究、勇攀科学高峰的崇高理想。

2. 教学设计

本文以“欧氏空间的概念”一节的教学设计为例，探讨在《高等代数》的教学过程中，以课堂知识点为载体，从哲学思想、数学方法、价值观引领等角度融入课程思政的途径和方法。首先，通过介绍欧几里得与《几何原本》，简述欧几里得的几个小故事，引入《雅典学院》及埃舍尔的几幅体现数学思想的著名版画等，引领学生体会数学之美，激发学生献身科学、不断创新的热情；又通过介绍同时期墨子与《墨经》，培养学生强烈的民族认同感、自豪感和对伟大复兴的使命感。其次，在内积及向量夹角等概念的引入上，回顾几何空间中相应运算，类比归纳，温故知新，从具体到抽象，从特殊到一般，通过总结内积运算的本质属性，建立抽象运算；而在内积的坐标表示部分，通过引入度量矩阵，将抽象复杂的运算转化为具体简单的矩阵乘法，带领学生体会抽象与具体、特殊与一般的相互转化、辩证统一，渗透哲学的思辨观点，培养数学思维，提升理性思维品质。在应用部分，引入文本分类案例，教会学生从数学的角度观察、分析和解决实际问题，提升实践能力，构建理论知识、科学思维、实践应用、价值引领自然融合的数学专业课思政课堂。

3. 教学目标

3.1. 知识目标

掌握内积、欧氏空间、向量夹角、长度、距离的概念及性质，熟悉几类常见欧氏空间及其上的内积，着重体会欧氏空间及内积运算的抽象性，熟练掌握内积的矩阵表示，深刻理解 n 维欧氏空间中基的度量

矩阵及其性质。

3.2. 能力目标

类比几何空间，将长度、夹角、距离等几何度量推广到任意欧氏空间，培养学生从特殊到一般、从具体到抽象的思维模式；了解内积在文本分类等实际问题中的广泛应用，培养灵活运用理论知识分析、解决实际问题的能力。

3.3. 思政目标

哲学内涵方面——通过内积及 Cauchy 不等式的抽象性、统一性渗透透过现象看本质、多角度全面看待问题等哲学观和方法论；数学思维方面——培养从具体到抽象、从特殊到一般的归纳演绎思想及严密的逻辑推理能力；人文素养与价值观层面——了解欧几里得的生平及故事，激发献身科学、勇攀高峰的热情，了解同时代中国数学的伟大贡献，培养学生强烈的民族认同感、自豪感和使命感，介绍拉斐尔的不朽名作——《雅典学院》，潜移默化中渗透美学熏陶，待领学生体会数学之美、数学之用。

4. 教学过程

本节课程采用课前布置思政小视频及思考题目，课堂板书与 PPT 课件相结合进行总结、分析、讲授的教学方法。课堂注重使用启发式、设问式、探究式讲授，启发思考，增强互动，提高课程吸引力、凝聚力和学生的参与度。各环节思政元素清单见下表 1：

Table 1. Teaching design incorporating ideological and political elements

表 1. 融入思政元素的教学设计

教学环节	教学内容	教学设计	思政元素
1、引入	回顾线性空间上的运算及空间的结构理论	温故知新，承上启下，开宗明义，激发兴趣；线性空间中利用加法、数乘刻画维数、基等空间结构；那么如何刻画向量长度、夹角等几何度量？	设问方式激发思考、提升兴趣。
2、内积及欧氏空间概念	欧氏空间生平及数学成就	<ul style="list-style-type: none"> ● 课前已在课程平台发送介绍欧几里得生平及成就的小视频；简介欧几里得及其名著《几何原本》。介绍拉斐尔的不朽名作——《雅典学院》的内容，其中表现哲学、数学、文学的人物及小趣闻；简介《几何原本》封面图《手绘手》及其作者埃舍尔的其他数学画作； ● 介绍更早期中国数学的伟大贡献——墨子与《墨经》中的几何成就(见图 1)； 	<ul style="list-style-type: none"> ● 通过小视频了解欧几里得的卓越贡献，激发同学们献身科学、不断创新的热情； ● 带领学生欣赏《雅典学院》中 3 位伟大数学家(欧几里得、毕达哥拉斯和芝诺)的形象，及埃舍尔的数学板画，潜移默化中渗透美学熏陶，提升人文素养； ● 介绍墨子及《墨经》中的数学智慧，培养学生强烈的民族认同感、自豪感和对伟大复兴的使命感。
3、内积及欧氏空间的概念及常见例子	<ul style="list-style-type: none"> ● 内积及欧氏空间的定义 ● 内积与欧氏空间的几点解释和注记 ● 在线性空间 $R^n, C[a, b], R^{m \times n}$ 上，给出常见内积的定义形式 	<ul style="list-style-type: none"> ● 启发式教学，通过类比，引导学生对几何空间 R^3 中内积的性质进行总结、归纳、抽象，给出实线性空间中内积的概念，并由此得到内积的双线性等性质。强调内积的抽象性，一般性。 ● 设问：在这几个欧氏空间 $R^n, C[a, b], R^{m \times n}$ 中还可以如何定义内积？ 	<ul style="list-style-type: none"> ● 数学思维培养：从具体运算中提炼、总结出本质性的规律，抽象成统一的概念。强化类比、归纳、演绎的数学思维方法，提升理性思维品质。 ● 哲学观点熏陶：领会具体与抽象、特殊到一般的辩证统一。 ● 提出问题，引导学生主动思考，积极探讨，焕发课堂生机，激发创新意识。

Continued

4、欧氏空间中向量长度、夹角	<ul style="list-style-type: none"> ● 向量长度的定义及性质； ● 柯西 - 布涅科夫斯基不等式及应用； ● 向量夹角、正交； ● 欧氏空间中的勾股定理 	<ul style="list-style-type: none"> ● 类比 R^3 中向量长度的定义，启发学生轻松自然地得出 R^n 中，以及任意欧氏空间中向量长度的定义：$\alpha = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$，并进一步推导出长度的 5 个简单性质及向量之间距离的概念。 ● 证明柯西不等式并强调它的重要价值，举例给出 $R^n, C[a, b], R^{m \times n}$ 中柯西，不等式的具体表达形式，带领学生体会“降维打击”的乐趣(见图 2)。 	<ul style="list-style-type: none"> ● 辩证唯物主义哲学观：实例引导学生体会不同内积度量下，同一向量长度不同；所以从不同标准衡量同一人物、事物，会得出不同结论； ● 强调柯西不等式的抽象性、一般性，体会该不等式表现出的数学的简洁美感； ● 培养辩证思维：渗透抽象与具体，特殊与一般，简单与复杂的对立统一、相互转化的辩证思想。
5、应用案例	<ul style="list-style-type: none"> ● 向量夹角在文本分类中的应用 ● 法学案例中关于“正交”的小故事 	<ul style="list-style-type: none"> ● 案例教学——引入内积在文本分类中的简单应用(见图 3)； ● 引入法学教授的小故事，让学生更深刻的理解正交的意义，同时增强课程的趣味性。 	<ul style="list-style-type: none"> ● 理论联系实际，让枯燥抽象的概念融入生活，提升学生实践应用能力； ● 趣味小故事培养学生学数学、用数学的信心和兴趣。
6、欧氏空间中内积的矩阵表示	内积的坐标表示、度量矩阵	<ul style="list-style-type: none"> ● 采取设问式、启发式教学。能否用坐标的运算表示 V 中抽象的内积呢？ ● 带领和启发学生推导内积的坐标表示公式，引出度量矩阵概念及其性质； 	<ul style="list-style-type: none"> ● 培养学生严谨的数学逻辑思维和推理能力； ● 启发式教学过程，增强学生的参与度和获得感，培养严谨认真的科学态度。
7、小结	回顾课程内容	从知识内容、实践应用、数学思想三方面总结课堂主要内容(见图 4)	依托课程内容，综合多种教学方法，从哲学观点、数学思想、价值观塑造三方面进行思政融入，落实“立德树人”。



早期中国数学成就:

- 记载了杠杆原理，比阿基米德早两百多年
- 影子理论、小孔成像
- 平面镜、凹面镜、凸面镜等光学现象，并且对圆形、正方形、平面、平行线等基本几何概念进行了归纳定义，涵盖了数学、几何、力学、光学等多方面的自然科学知识。



2016年8月16日发射升空的全球首颗量子科学实验卫星取名“墨子号”，标志着世界首次实现卫星与地面之间的量子通信。2022年5月，“墨子号”实现1200公里地表量子态传输新纪录。

2020年12月4日，中国科学技术大学成功构建76个光子的量子计算原型机“九章”。

Figure 1. Beginning with life of Euclid and the geometry achievements of ancient China

图 1. 课堂引入：欧几里得生平贡献及更早期中国几何成就

2、Cauchy不等式

引例：在 R^3 中向量 α 与 β 的夹角

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \frac{\alpha \cdot \beta}{|\alpha||\beta|}$$



一般的欧氏空间中，
如何定义向量的夹角？

需先证：一般欧氏空间中， $\left| \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{|\alpha||\beta|} \right| \leq 1$

柯西—布涅柯夫斯基不等式

对欧氏空间 V 中任意两个向量 α, β ，有

$$|\langle \alpha, \beta \rangle| \leq |\alpha||\beta|$$

等号成立当且仅当 α, β 线性相关。

三角不等式

对欧氏空间中的任意两个向量 α, β ，有

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

注：Cauchy不等式中向量和内积的抽象性和一般性

1) R^n 中 $(\alpha, \beta) = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$

柯西不等式

$$\begin{aligned} & |a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n| \\ & \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2} \end{aligned}$$

2) $C(a, b)$ 中 $(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)dx$

施瓦兹不等式

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$$

Finger 2. Examples of theoretical derivation

图 2. 理论推导示例

向量夹角的应用—文本分类

> 在自然语言处理中，最常见的两种分类是

- 将文本按主题归类（比如将所有介绍亚运会的新闻归到体育类）
- 将词汇表中的字词按意思归类（比如将各种体育运动的名词归成一类）

> 基本思想：同一类文本的用词是相似的，不同类文本用词各不相同

> 基础方法：计算相关性—文本向量的夹角刻画两个文本的相关程度

对两个文本，计算出它们的内容词或实词的向量，求这两个向量的夹角：

$$\begin{aligned} \text{WE} & \longrightarrow \alpha = (x_1, x_2, \dots, x_{56000}) \\ \text{WE} & \longrightarrow \beta = (y_1, y_2, \dots, y_{56000}) \end{aligned} \quad \cos \langle \alpha, \beta \rangle = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{|\alpha||\beta|}$$

Finger 3. Application cases—to improve the ability of solving applied problems

图 3. 应用案例——提升分析解决实际问题能力

1. 内积及欧氏空间的定义

$$R^n, C[a, b], R^{m \times n}$$

2. 欧氏空间上长度、夹角及性质

三角不等式、勾股定理、Cauchy不等式

3. 内积的矩阵表示

$$(\alpha, \beta) = x' Ay \quad \text{度量矩阵及其4条性质}$$

内容小结

数学思想

抽象 \leftrightarrow 具体
特殊 \leftrightarrow 一般

实际应用

文本分类、
个性化推荐等

Finger 4. Summary (theory knowledge, mathematical thinking, practical application)

图 4. 小结(理论知识、数学思想、实践应用)

5. 结束语

本文从课程思政的角度对高等代数中的重要知识点——“欧氏空间的定义与基本性质”进行教学设

计。从哲学内涵、数学思想、价值观引领等角度挖掘思政元素，通过小视频、小故事，实践案例等多方式进行思政融入，教学过程注重以专业知识为载体，启发科学思维方法，提升应用能力和人文素养。本文的工作将对探讨如何在数学类专业课程中落实课程思政，践行“立德树人”，做出有益的探索和尝试。

目前，在《高等代数》及其他数学类专业课程中，案例思政元素的挖掘还不够充分，存在创新性不够、思政素材与专业知识“两张皮”、思政融入难以入心、入脑等问题。后续我们将继续着力探讨如何结合新时代、新背景、新形势、新要求，在数学类专业课程中践行课程思政，落实“立德树人”，实现“在知识传授中实现价值引领，在价值传播中凝聚知识底蕴”的课程思政新理念。

基金项目

西安电子科技大学“高等代数”课程思政建设项目；西安电子科技大学“矩阵分析与计算核心”课程建设项目。

参考文献

- [1] 黄云清. 基于新工科理念推进大学数学教学改革[J]. 中国大学教学, 2020(2): 28-31.
- [2] 张莉, 王峥. 线性代数课程思政设计与实践[J]. 大学数学, 2022, 38(2): 26-31.
- [3] 陈学慧, 李娜, 赵鲁涛. 将思政元素融入概率论与数理统计“金课”建设与实践[J]. 大学数学, 2021, 37(3): 80-81.
- [4] 潘璐璐, 徐根玖, 台炳龙, 张莹. 理工类课程实践课程思政的逻辑及方法——以高等数学函数曲线的凹凸性为例[J]. 高等数学研究, 2020, 23(1): 22-25, 50.
- [5] 苏涵, 李清栋. 基于课程思政角度的教学设计——常数项级数的概念[J]. 高等数学研究, 2022, 25(3): 72-76.