

《复分析》课程教学札记

范兴亚

新疆大学数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2023年5月16日; 录用日期: 2023年6月14日; 发布日期: 2023年6月25日

摘要

为了达到复分析教学的目标, 让学生学有所得, 本文从教学内容安排、教学方法、教学评价等方面展开讨论, 完善了已有的复分析教学体系。为了提高学生的应用能力和创新能力, 本文针对性的改进了传统的教学理念, 使学生受益, 进而激发学生对复分析学习的兴趣。

关键词

教学内容安排, 教学方法, 教学评价

Course Teaching Notes about *Complex Analysis*

Xingya Fan

College of Mathematics and System Science, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang

Received: May 16th, 2023; accepted: Jun. 14th, 2023; published: Jun. 25th, 2023

Abstract

To achieve the goal of complex analysis teaching, and students learn something, this paper discusses the arrangement of teaching content, teaching methods, teaching evaluation, and so on, and improves the existing complex analysis teaching systems. To improve the students' application and innovation ability, this paper targeted to improve the traditional teaching concept, to benefit students, and then stimulate students' interest in complex analysis learning.

Keywords

Teaching Content Arrangement, Teaching Method, Teaching Evaluation

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

复分析是数学的重要分支之一，它应用极其广泛，尤其在数学、物理、工程等领域中有着重要的应用[1]。复数域上的函数(简称复变函数)是复分析主要研究的对象之一，为物理、工程、自然科学等领域中诸多实际问题的解决提供了直接的工具有。由此，复分析的学习和教学具有重要的意义和价值。不深入复数领域，而在实分析领域考虑函数的相关性质是不完美的，究其原因实分析仅对单值函数提供了一套严谨的理论，而面对多值函数情况时不能够利用已有的结果来研究其性质[1]。比如经典的泰勒级数、复杂积分的计算问题在实分析当中很难解释其收敛发散的原因或者很难计算出复杂积分的值来，而复分析可以提供级数收敛的原因以及复杂积分计算的有效方法[1]。特别地，复分析可以为其它数学方向提供很好的思路，比如代数基本定理的证明，迄今为止，利用复分析的证明是最简洁最漂亮的方法。熟知，实变函数与复变函数有很大区别，比如复解析性、调和性等，这些是由复变函数的刚性所致。从实分析的角度看复分析。实数的本义是与数轴上的点相对应的数，这种对应是一一的，此本意有点直观性，是有限与无限概念统一的产物。但仅仅以列举的方式不能描述实数的整体，究其原因是数轴上的有些点不可以列举出来，比如无理数。也就是说，实数是数轴上点的简化，是有理数和无理数的总称。从群角度讲，实数是一个集合，也是向量空间，集合的子集满足交并补运算，且向量空间的元素满足加法交换律、结合律，则是一个加法交换群。此外，集合的元素有一个通常的乘法和除法运算，且保持运算封闭，由此实数是一个域。但是，实数域不是一个完备域，因为在解代数方程时，有些方程的解并不在实数域中。虽然实数有缺陷，但是可以用来测量连续的量。在计算机领域，由于计算机只能存储有限的小数位数，实数经常用浮点数来表示。为了克服实数的不足，16世纪人们在解代数方程时引入了复数。在18世纪，达朗贝尔和欧拉等人逐步阐明了复数的几何意义和物理意义，澄清了复数的概念。熟知，实数和虚数共同构成复数。和实数一样，复数既是集合，也是向量空间，因此是一个加法交换群。在此向量空间上定义通常的乘法和除法运算，且保持运算封闭，从而复数是一个域。在解代数方程时，此域的确是一个完备域。

随着数学科学的发展与应用领域的拓展，《复分析》的教学也越来越受到重视。结合文献[2][3][4][5]的教学理念，本文主要探讨《复分析》教学的一些问题和实践经验，以期能够帮助教师更好地开展其教学工作。

2. 教学内容安排

1) 复数及其运算。在教学中需要介绍复数的基本概念与运算法则，让学生掌握复数的运算方法，例如复数加减乘除以及复数的共轭等。

2) 函数的概念及运算。要让学生了解复变函数的概念及基本性质。要让学生理解区域、道路、复导数、复线性函数、复可微、解析函数、单叶函数等概念。

3) 复变函数的基本公式和定理。在教学中需要详细介绍复分析的一些基本公式，例如欧拉公式、柯西-黎曼方程、柯西积分公式、黎曼-格林公式、留数公式等。同时，也需要教授复分析的一些重要定理，例如各种柯西定理、原函数局部存在性定理、原函数整体存在性定理、均值定理、刘维尔定理、莫雷拉定理、魏尔斯特拉斯定理、留数总和定理等。

4) 复数积分及其应用。在教学过程中需要授予学生复积分的计算方法,例如第一类曲线积分法、第二类曲线积分法。要在不同场合熟练计算对应的复积分。特别地,在道路上的柯西定理、柯西积分公式等要熟能生巧,比如利用柯西积分公式时要看对应的点是否落在闭道路围成的区域当中。同时还要讲解复积分在物理学、工程学、数学与统计学等领域中的实际应用。

3. 教学应从重点和难点入手

在教学中,应该把握《复分析》内容的重点与难点,针对性的安排教学方案,让学生在学习过程中能够更加深入全面的理解掌握知识。比如复数的概念及计算。复数是复变函数研究的基础,因此在教学过程中需要让学生掌握复数的相关概念,明确实数与虚数的关系,同时要能熟练进行复数的计算。在教学过程中需要引导学生利用图像、单纯形(盘)等方法证明某些定理,例如柯西定理的三角剖分法的证明、原函数的局部存在性定理的证明等[1]。协调应用方面,也是学生难掌握的方面。在教学过程中,有时候需要结合函数变换或其他数学、科学方法,对学生进行一些实例分析,这样有利于增强学生的实际运用能力。应详细介绍复数的代数性质和几何意义,以及复函数与实函数的区别。然后可以介绍复函数的基本概念,包括复函数的极限、连续性、导数等概念,特别是要注意导数的定义和它与实数函数导数的异同[1]。接下来,可以介绍与导数密切相关的解析函数,这些函数是复分析最重要的概念之一,因为它们具有很多极为重要的性质和应用,如柯西-黎曼方程、柯西公式、洛朗级数和留数定理等。在这一部分的教学,可以通过简单的例子和图形使学生更好地理解这些概念及其应用。

此外,还应重点阐述的是复变函数的数值方法,其中最重要的是解析延拓和边值问题。解析延拓是指将局部解析函数解析地延拓到整个复平面或它的部分,并使延拓后的函数仍保持解析,它是复分析中优美的理论和可靠的数值计算方法。而边值问题则是指通过复平面边界上的函数值来刻画函数性质的问题,如边界上的值定理、调和函数等,这些内容对于学生做理论和应用题具有很好的启示作用。最后,还应重点介绍和强调一些具体应用,如调和函数的平均值定理,压缩映射(施瓦茨定理)的几何原理、共轭调和函数的泊松变换刻画和变分不等式的推广等。此外,一些实际问题联系比较密切的内容,如流体力学、弹性力学、电磁场理论等,这些内容可以使学生更好地把复变函数理论与实际问题相结合,提高他们的应用能力和创新能力。总之,复分析是一门重要而深奥的数学分支,其教学应从基础概念和性质入手,结合具体例子和应用,注重理论与实践相结合。只有这样,才能真正地提高学生对复变函数的掌握和领会,为他们将来的学习和工作打下坚实的数学基础。

4. 教学方法

教师需要巧妙运用一些教学方法,使复杂的知识点变得简单易懂,达到事半功倍的效果。比如引导性探究法,在学生掌握复值函数的概念的基础上,教师可以用探路方式来引导学生去探究茹科夫斯基函数与飞机机翼的剖面轮廓之间的关系,以便让学生体会到复值函数在空气动力学中的应用。还有信息技术法,可以通过展示多媒体、虚拟实验等方式来展示罗巴切夫斯基几何模型,增强教学效果,培养学生对多边形面积、分式线性变换等概念的理解和运用能力。交互式教学法也是非常可行的方法,可以让学生充分参与,发表个人意见和看法,比如泰勒定理的证明、洛朗级数的定义等,激发学生兴趣,增强学生对定理的严格证明和经验型收敛级数的定义和相关系数的公式化计算问题等。问题解决法让教师通过实例题的引入,比如如何简化计算实分析中的特殊积分问题,还有如何建立伽马函数方程和亚纯函数的极点之间的关系等,在问题解决过程中,培养学生思维逻辑能力,进而深入理解留数的计算和解析延拓等概念。

5. 教学评价

考核是《复分析》教学的重要环节之一,合理地进行考核有利于促进学生的学习兴趣 and 效果。综合评价方面,可以通过学生在课堂讲解、期末综合考试等方式,综合评价学生复分析的学习成果。自我评价方面,学生自选一题作为研究项目,并自主寻找并探讨该问题,从中反思评价自己对复变函数研究的能力和 understanding 程度。

6. 总结

《复分析》的教学在现代数学、工程、物理等行业应用日益广泛,学生应该深入学习掌握复杂的知识点,同时教师也应该加强机构与教学方法的创新,不断完善教学体系,提高教学效果,激发学生的学习兴趣 and 实际应用能力。

参考文献

- [1] 沙巴特. 复分析导论[M]. 胥鸣伟,译. 北京:高等教育出版社,2011.
- [2] 谢素英,焦振华. 关于复分析教学的几点思考[J]. 杭州电子科技大学学报(社会科学版),2008(4): 71-73.
- [3] 王鑫,焦成文. 关于《复变函数论》教学改革的实践研究[J]. 学苑教育,2018(2): 50.
- [4] 马立新. 在《复变函数论》教学中培养学生创造性思维[J]. 宁波大学学报:教育科学版,2013(1): 85-87.
- [5] 杨孝英. 复变函数论中积分计算的教法研究[J]. 吉林广播电视大学学报,2019(10): 137-138.