**Advances in Education** 教育进展, 2023, 13(7), 4225-4229
Published Online July 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2023.137667

Hans汉斯

# 幂级数的启发式教学设计与探究

**许文艳**

西安电子科技大学数学与统计学院，陕西 西安

收稿日期：2023年6月5日；录用日期：2023年7月4日；发布日期：2023年7月12日

## 摘　要

本文给出幂级数概念及其收敛域结构特点的启发式教学设计，旨在由问题出发，逐层深入地启发引导学生思考、讨论问题，并用逆向思维的方式论证所要证明的问题，使学生在解决问题的同时锻炼逻辑思维的严谨性和提高解决问题的综合探究能力。

## 关键词

幂级数，启发式教学，逆向思维，教学设计

# Heuristic Teaching Design and Exploration of Power Series

**Wenyan Xu**

School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an Shaanxi

Received: Jun. 5th, 2023; accepted: Jul. 4th, 2023; published: Jul. 12th, 2023

## Abstract

**The present paper gives a heuristic teaching design of power series and its convergence domain. It aims to inspire the students to start with the problem, to analyze the problem step by step, and to prove the problem using reverse thinking, through which both their logical minds and inquiry abilities are effectively improved.**

## Keywords

**Power Series, Heuristic Education, Reverse Thinking, Teaching Design**

文章引用: 许文艳. 幂级数的启发式教学设计与探究[J]. 教育进展, 2023, 13(7): 4225-4229.
DOI: 10.12677/ae.2023.137667

## 1. 引言

幂级数是数学分析[1]、高等数学[2]中重要概念之一，并在近似计算[3]、组合分析[4]、概率统计[5]、微分方程[6] [7]等数学领域有极为广泛的应用。关于幂级数的概念及其收敛域结构特点的教学一直是高等数学中重要且有趣的内容之一。本文采用启发式的教学模式，对幂级数概念及其收敛域结构的课堂教学进行教学设计与探究，由幂级数的概念出发，逐层深入地启发引导学生思考、讨论幂级数的收敛域的特点，并用逆向思维的方式论证所要证明的定理，使学生在解决问题的同时锻炼了严谨的逻辑思维能力，提高了解决问题的综合探究能力。

## 2. 幂级数的启发式教学设计

### 2.1. 引入概念设置问题

前面我们已经学习了函数项级数及其收敛域、发散域等基本概念，这为我们进一步研究函数项级数及其收敛域做了准备。今天，我们来研究一类简单而常见的函数项级数－幂级数－以及它的收敛域。

顾名思义，幂级数是否就是每项都是幂函数的函数项级数呢？确实如此，下面给出它的定义。

定义：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{1}$$

——幂级数

我们把形如 $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$ 式的函数项级数称为幂级数，并利用求和符号把它简记为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的形式，其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 等是常数，称为幂级数的系数。

我们看到在幂级数中只含有最简单的+、−、×运算，特别适合于计算机的编程计算，因此在许多计算问题和工程技术领域幂级数都有着广泛的应用。那么这样一类简单而实用的级数，它的收敛域会有什么特点呢？显然，所有形如该式的级数在 $x = 0$ 处一定是收敛的，那么在其他点处呢？它的收敛域是否像该级数本身一样具有简单而明了的结构呢？这正是今天我们讨论的主要问题。

### 2.2. 从问题出发逐层深入

我们先从一个引例中寻找规律：

引例：

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \tag{2}$$

当 $|x| < 1$ 时，收敛；当 $|x| \ge 1$ 时，发散。

比如考虑这样一个幂级数的收敛域。显然，利用前面学过的等比级数的性质，这个级数当公比 $|x| < 1$ 时，收敛；当公比 $|x| \ge 1$ 时，发散。在数轴上表示即它在 $(-1,1)$ 内收敛，在其他点处发散(如图 1 所示)。容易看出，这个幂级数的收敛域有一个显著的特点——它是一个以坐标原点为中心的区间——这是一个偶然还是必然呢？对于一般的幂级数，其收敛域是否也有这样类似的结构呢？(启发引导学生思考、设置悬念)

要想回答这个问题，我们先来看一个重要定理——阿贝尔定理(重点内容)。

阿贝尔定理：

① 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0$ $(x \neq x_0)$ 处收敛，

则它在 $|x| < |x_0|$ 的一切 $x$ 处绝对收敛；

② 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0$ 处发散，

则它在 $|x| > |x_0|$ 的一切 $x$ 处发散。

——Abel (1802~1829)

它是由挪威伟大的数学家阿贝尔(Abel)提出的，这位天才的数学家，在去世时年仅 27 岁。阿贝尔的一生虽然是短暂的，但是他所有留下的数学思想和财富对近代数学的发展却有着深刻的影响，用法国数学家埃尔米特[8]的一句话说，阿贝尔所留下的工作足够数学家们忙上 150 年！那么今天我们就学到了这位伟大的数学家在级数方面这样一个贡献！(充分调动学生的学习热情)

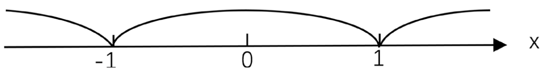


**Figure 1.** Convergence and divergence domains of the example
**图 1.** 引例级数的收敛域及发散域

我们来看如何证明这个定理(逐层深入地分析，培养学生的逆向思维能力)：

1) 首先分析第①部分：如果幂级数在某一非零点 $x_0$ 处收敛，也就是已知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛，要证明 $|x| < |x_0|$ 时，相应的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛(即通项取绝对值以后的级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 收敛)。如何证明呢？显然 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 的每项都是非负的，所以自然想到正项级数的审敛法。如果用正项级数的比较审敛法，就应该将它的通项适当放大还是缩小呢(启发学生思考)？回答是放大。如果放大以后相应的级数是收敛的，那么原来通项较小的级数也收敛。我们和已知 $x_0$ 挂钩，先给其通项乘以 $x_0^n$，再除以 $x_0^n$，其通项就变为 $|a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$。进一步怎么放大呢？回到已知寻找线索。∵ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛，∴ $\exists M > 0$，使得 $|a_n x_0| \le M$。从而这整个通项就可以放大为 $M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$。而当 $|x| < |x_0|$ 时，以它为通向的级数显然是收敛的(因为它是等比级数且公比 $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$)，∴由比较审敛法，就可得原来通项较小的级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ 也收敛，第①部分即可得证。

证明：① ∵ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛，∴ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$

$\therefore \exists M > 0$, 使 $|a_n x_0^n| \le M$

而 $|a_n x_0^n| = \left|a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n}\right| = |a_n x_0^n| \times \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le M \times \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$

当 $|x| < |x_0|$ 时，显然 $\sum_{n=0}^{\infty} M \times \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ 收敛

∴由正项级数的比较审敛法，得 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n|$ 收敛。

2) 其次分析第②部分：利用①的结论，我们可用反证法证明②。假设存在一点 $x$，$|x|>|x_0|$，但级数在这点收敛，看能否推出矛盾。事实上由结论①得，级数在 $x$ 处收敛，则它就在绝对值小于 $|x|$ 的一切点处收敛，从而在 $x_0$ 处也应该是收敛的，这就与已知(它在 $x_0$ 处发散)发生了矛盾！(证明的书写过程省略)好，到此我们就证明了著名的阿贝尔定理。

### 2.3. 继续深入解决问题

下面我们就可以利用阿贝尔定理来考虑幂级数的收敛域了。第一种特殊情况：级数仅在 $x=0$ 这一点处收敛，即不存在非零收敛点；第二种特殊情况：级数在整个数轴上收敛，即不存在发散点；除去这两种情况，就剩下第三种情况：级数既存在非零收敛点又存在发散点。如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 既有非零收敛点 $x_0$ 又有发散点 $x_1$ (当然由阿贝尔定理，$0<|x_0|<|x_1|$)，它的收敛域会是怎样情形呢？

$$\text{如果} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \text{ 有收敛点 } x_0\left(x_0 \neq 0\right) \text{ 及发散点 } x_1\left(0<|x_0|<|x_1|\right)$$
$$\Rightarrow \text{一定存在实数 } R>0 \text{ 满足下图所示情形，} R \text{ 称为收敛半径。}$$

结合图形分析：假设如图 2 所示的 $x$ 轴、原点 $O$、收敛点 $x_0$ 、发散点 $x_1$ 。由阿贝尔定理级数在 $x_0$ 收敛，则以 $O$ 为中心，$|x_0|$ 为半径的开区间内绝对收敛；级数在 $x_1$ 处发散，则在绝对值大于 $|x_1|$ 的所有点处发散。我们用红色表示收敛，黑色表示发散，那么在剩下的没有标识的两个区间部分级数的敛散性如何呢？阿贝尔定理似乎没有给出结论？其实不然！

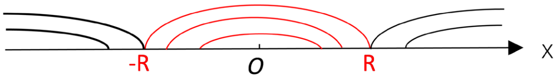


**Figure 2.** Existence of convergence radius of power series
**图 2.** 幂级数收敛半径的存在性

我们在剩下的这两个开区间上任取一点 $x_2$，则级数在这点要么收敛要么发散；如果在这点收敛，由阿贝尔定理，则红色收敛的区间就向外扩张到这一个区间；如果在这点发散，则黑色发散的区间就向内压缩到这样两个区间。而且只要在红色和黑色之间有间隙，这个过程可以一直进行下去！那么设想这个过程一直进行下去，则在收敛和发散之间一定存在某个临界点 $R>0$，使得级数在开区间 $(-R,R)$ 绝对收敛，在开区间 $(R,+\infty)$ 以及 $(-\infty,-R)$ 发散，而在临界点 $\pm R$ 处级数可能收敛也可能发散；我们把这个 $R$ 称为幂级数的收敛半径。实际上可以证明这个 $R$ 就是使得幂级数收敛的所有点的绝对值的上确界！形象地说(把收敛点看作红点，发散点看作黑点)，假设一个人从原点出发沿数轴向左或向右行走，他一开始遇到的全都是红点，一旦遇到黑点就再也遇不到红点了。

另外，如果把级数仅在 0 这一点处收敛看作 $R=0$ 的特殊情形，把级数在整个数轴上收敛看作 $R=+\infty$ 的特殊情形，那么至此我们统一起来得到：所有幂级数的收敛域一定是如图 2 所示的以坐标原点为中心的区间！(解决悬念、推向高潮)

既然所有幂级数的收敛域都具有这样的(除去 $\pm R$ 处)对称结构，那么求它的收敛域就转化为求它的收敛半径 $R$ 了。收敛半径怎么求呢？我们下节课再讨论。

## 3. 结束语

本文针对幂级数概念及其收敛域的结构特点，深入浅出地展现了基于该内容的启发式教学设计与探究，旨在启发引导学生积极思考，并利用逆向思维分析、解决问题。事实上，启发式教学模式与理念由来已久，其实质在于正确处理教与学的相互关系，强调以学生为主体，教师充分调动学生的学习积极性，

实现教师引导作用与学生积极思考的有效结合。随着现代科学技术的进步与时代的发展，启发式教学应注入更多的现代科技元素与创新性理念，从而得到更丰富的发展。本文所做的工作只是起到抛砖引玉的作用，更多的工作需要我们贯穿诸如数学分析、高等代数、解析几何等课程的整个教学过程，不断地实践与探索。

## 基金项目

本课题得到西安电子科技大学 2023 年中央教改专项资金项目(数学与统计学院子项目)经费资助。

## 参考文献

[1] 华东师范大学数学科学学院. 数学分析[M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.
[2] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 第 7 版. 北京: 高等教育出版社, 2014.
[3] Vazirani, V.V. 近似算法[M]. 郭效江, 方奇志, 农庆琴, 译. 北京: 高等教育出版社, 2010.
[4] 卢开澄, 卢华明. 组合数学[M]. 第 5 版. 北京: 清华大学出版社, 2016.
[5] 陈希孺. 概率论与数理统计[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2017.
[6] 柳彬. 常微分方程[M]. 北京: 北京大学出版社, 2021.
[7] 杨秀玲, 李延. 幂级数展开的微分方程法[J]. 高师理科学刊, 2010, 30(6): 33-34.
[8] 冯绪宁. 中国大百科全书数学[M]. 北京: 中国大百科全书出版社, 1992, 1.