

数学史融入弧度制的教学设计研究

马瑞芳, 库在强*

黄冈师范学院数学与统计学院, 湖北 黄冈

收稿日期: 2023年7月16日; 录用日期: 2023年8月15日; 发布日期: 2023年8月23日

摘要

概念教学是数学教学的重要内容, 弧度制作为一个全新的概念, 学生在理解和学习中存在一定的难度。从历史上印度数学家阿耶波多设计正弦表遇到的困惑问题, 还原产生弧度制的数学意义, 重新设计了弧度制的教学情景, 力图帮助学生理解弧度制的概念, 希望能为教师教学提供参考。

关键词

数学史, 弧度制, 教学设计

Research on the Teaching Design of Integrating the History of Mathematics into Radian System

Ruifang Ma, Zaiqiang Ku*

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: Jul. 16th, 2023; accepted: Aug. 15th, 2023; published: Aug. 23rd, 2023

Abstract

Concept teaching is an important part of mathematics teaching. The production of curve is a brand new concept, which makes it difficult for students to understand and learn. Based on the perplexities encountered by Indian mathematician Ayebedo in designing sine table in history, this paper restores the mathematical meaning of radian system and re-designs the teaching scene of radian

*通讯作者。

system, trying to help students understand the concept of radian system, hoping to provide reference for teachers' teaching.

Keywords

History of Mathematics, Radian System, Instructional Design

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 学生学习的困惑

“弧度制”在三角学发展史中占据重要地位, 前接角度制, 后承三角学, 是角度的一种新的度量方式, 将角度和实数建立了联系。在高中数学中, 弧度制看似简单, 实则难易理解和讲授, 无论是新人教 A 版教科书还是旧版, 有关弧度制的内容都是直接抛出, 直接呈现出弧度和角度之间的转化结果, 抹去了数学知识的发生、发展和演变过程。因此, 学生在学习时, 总有这样的疑惑, 我们学习了角度制为什么还要学习弧度制呢? 学生不清楚弧度制的由来、用途, 常常对弧度制的存在知其然却不知其所以然, 并且教师在讲授的过程中, 往往按照课本上的顺序对其刻板执行, 往往使学生感到无味, 造成学生“越学弧度, 越糊度” [1]。所以, 应如何进行弧度制概念的教学设计才能解决以上问题呢? 是研究中需重点解决的。

2. 融入数学史的意义

数学史蕴含了一定的数学思想方法, 将数学史融入高中课堂, 能帮学生厘清知识的发生发展过程, 体验数学家的文化精神, 感受数学在人类文明发展中的进步; 其次, 数学史有助于提升学生的审美娱乐精神。数学本身就具有对称美、简洁美、统一美, 学习数学史能够展现人类对于美的追求与向往。通过数学史的教学, 帮助学生理解新知的同时提升学生发现美的能力, 体现育人价值。

3. 数学史与教学设计

数学家克莱因曾提出: “历史上数学家所遇到的困难, 也是学生会遇到的学习障碍, 因而数学史是教学的指南” [2]。数学的学习, 离不开其发展历史, 通过向学生渗透数学史, 让学生了解知识发展的脉络, 帮助学生理解知识的同时感受数学家的探索进程, 从而让学生领悟在知识形成过程中的思想方法, 点燃学习热情。

因此, 从数学史的视角出发, 带领学生感受弧度制的由来、用途, 对弧度制概念的教学进行重新整合和设计, 充分提炼课程中所蕴涵的文化基因和育人价值。希望在帮助学生突破弧度制理解和学习方面困难的同时, 为教师教学提供参考。

4. 弧度制教学设计

通过研究数学史, 发现角度制和弧度制在形成过程中有些类似之处。古巴比伦人将度作为单位将圆分成了 360 份, 弧度制则是将半径作为度量单位将整个圆周分成 2π 份。根据二者之间的联系与区别, 首先对弧度制一节进行了教材分析

(一) 内容和内容解析

1. 教学内容

本节课是人教版 A 版必修 1 第五章中“三角函数”单元第一节“任意角和弧度制”的第 2 课时内容, 是一节新授课。三角函数单元的具体知识框图如图 1 所示。从单元视角来看, 结合图 1, 弧度制与任意角的三角函数有着非常紧密的联系, 是在学习了角度制和任意角概念后角的一种新的度量方式, 能用实数表示角度, 简化了三角学的运算, 学好任意角和弧度制是学好三角函数的前提。

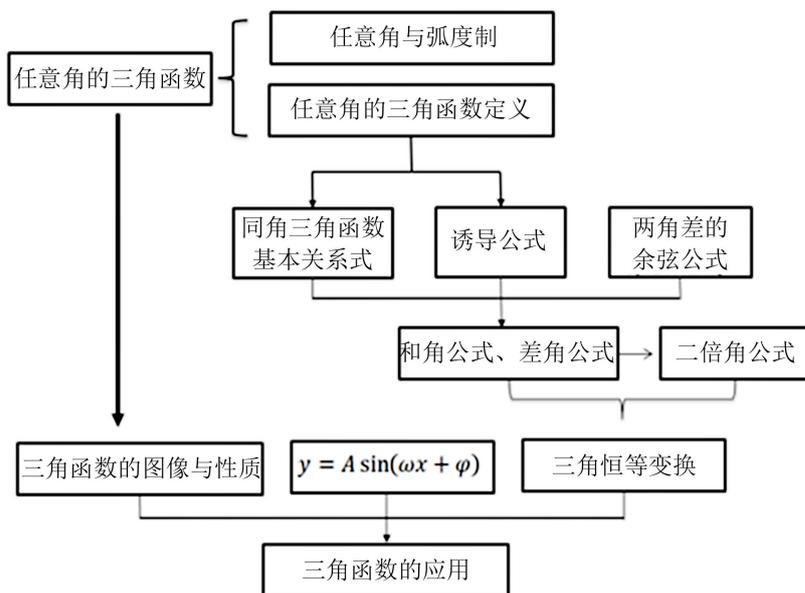


Figure 1. Knowledge block diagram of trigonometric function unit

图 1. 三角函数单元的知识框图



Figure 2. Knowledge block diagram of arbitrary angle and radian measure

图 2. 任意角和弧度制小节的知识框图

任意角和弧度制小节的知识框图如图 2 所示, 包括任意角概念、象限角、终边相同角的表示、弧度制、弧度与角度之间的转化, 用弧度制表示任意角是由任意角的旋转方向决定了角的正负。

2. 内容解析

新课标对本节课的要求是掌握弧度制的概念、弧度制与角度制之间的转化。人教版 A 版教材中, 是类比长度、重量单位的方式引入弧度制的, 强调以学生为中心, 以诱导公式为线索, 激发旧知, 链接新知。有助于培养学生主动探索的精神。但并没有解释弧度制概念产生的数学背景及作用。弧度制概念能为后续学习任意角的三角函数等知识作铺垫, 因此本节课起着启下的作用。弧度制作为一种新的度量单

位, 在建立实数与角度之间的对应关系后, 能为学生进一步学习三角函数、参加生产和实践提供必要的知识基础。

基于以上弧度制在教材中的地位分析, 通过本节课的学习, 学生应达到的目标如下:

(二) 目标和目标解析

1. 教学目标

- 1) 了解弧度制的概念;
- 2) 能进行弧度与角度的互化, 体会引入弧度制的必要性;
- 3) 感受弧度制概念的形成过程, 提高发现问题和解决问题的能力;
- 4) 了解弧度制的发展历史, 感受数学家的聪明才智, 提高对数学的学习兴趣。

2. 目标解析

在教师引导与提示下, 自主描述出一弧度角的概念; 能灵活运用公式解决弧度化角度、角度化弧度问题; 能够建立起新旧知识的联系, 探究解决问题; 自主描述弧度制的起源、发展和确立。

(三) 学生学情分析

经过初中阶段的数学学习, 学生已经认识了“度、分、秒”, 并且知道了 1° 角和角度制的概念, 以及角度的扩充。学生已经正确认识了正角、负角及零角的表示, 这些为学生学习弧度制, 用弧度制表示任意角及弧度制下角的集合与实数集 \mathbf{R} 之间的一一对应关系打下了基础。其次, 处于这一年龄阶段的学生有较强的求知欲和对事物的好奇心且该时期恰是学生逻辑思维的培养阶段, 学生的思维在这一时期不断的发展, 是学习数学思想方法的重要时机。

结合高一学生的心理特点和知识掌握程度, 以及本节课的教学目标, 本节课的重点是要使学生理解弧度概念与意义, 正确地进行角度与弧度的转化; 攻克弧度制概念的理解和转化。

为了突破教学重难点, 设计六大教学环节, 采用问题引导、合作探究和研究性学习的方式, 倡导自主探索、独立思考、动手实践、合作交流。严格遵循“直观感知 - 操作确认 - 思辨论证 - 生成结论”的认识过程展开知识内容, 充分利用“观察”“思考”“探究”等, 强调转化和类比思想, 把化归思想的渗透和推理运算能力的培养放到突出的位置。具体做法如下:

观察 - 思考 - 猜想 - 验证为主线。

- 1) 创设真实情境, 引出探究问题;
- 2) 构造认知冲突, 引导深入思考;
- 3) 合作演绎推理, 生成一般结论。

(四) 教学过程设计

教学过程包括以下环节:

情境导入 - 探究新知 - 概念生成 - 巩固新知 - 课堂小结 - 布置作业。

1. 情境导入

教师: 上节课我们学习了任意角, 角的度量单位有哪些呢?

学生: 角度。

教师: 角度是如何进行定义的呢? (展示课件)

约在公元前 2000 年, 古巴比伦人创设性地将圆周划分成 360 度, 每度分成 60 分, 每分再划分成 60 秒^[3]。

- 1) 规定周角的 $1/360$ 为 1 度的角;
- 2) 这种用度作为单位来度量角的单位制叫做角度制。

角度制在很长一段时间里, 在生活和学习中发挥了很大的作用。当时人们根据地心说, 认为太阳绕

地球旋转时的平面与赤道不一样, 人们为了测量出太阳到地球的距离, 如图 3 和图 4, 阿尼波多奥斯创作了偏心轮模型, 及求 DE 的长。根据地球旋转的角速度和四季的时长, 可以计算出弧长 VV' 和弧长 WW' , 如何计算其所对的弦长呢? 这时候希帕克斯制作了正弦表, 其目的是求出任意弧长所对的弦长。[4] 当时希帕克斯考虑到古巴比伦人将角按照 60 进制进行了划分, 此时他将弧长和半径也采用 60 进制进行了度量, 后来托勒密又在此基础上进行了完善。在后续很长一段时间中, 一直沿用此种方法, 但到了公元 6 世纪, 印度数学家阿耶波多在创新制作正弦表时发现了一个不好解释的问题: $60^\circ + \sin 30^\circ$ [5], 如何计算这种进制不统一、单位不统一的问题呢? 因此为解决这种问题引入了弧度制。

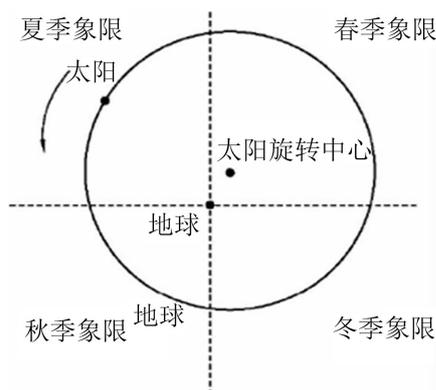


Figure 3. A classic example of spatial data sets
图 3. 偏心轮模型图

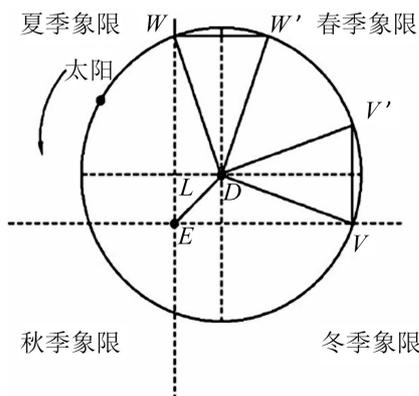


Figure 4. Problems with the eccentric model
图 4. 偏心轮模型的问题

设计意图: 借助数学史回顾角的定义, 又从数学史的角度讲述为什么要引入弧度制, 使学生“知其所以然”。

2. 新知探究

教师: 教师利用同心圆向学生讲述利提克斯和欧拉所提的“圆的半径作为弧长的度量单位, 将线段与弧的度量统一起来”, 探究当角一定时以及角在变化时弧长与半径的关系。

步骤一: 射线 OA 绕端点 O 旋转到 OB 形成角 α , 在旋转过程中, 射线 OA 上的一点 P (不同于点 O) 的轨迹, 是一条圆弧, 这条圆弧对应于圆心角 α ;

步骤二: 在射线 OA 上任取一点 Q (不同于点 O), $OQ = r_1$, 在旋转过程中, 点 Q 所形成的圆弧的长

为 l_1 ;

思考: l_1 与 r_1 的比值是什么? 你能得到什么结论?

图 5 是借助几何画板动态展示时的截图, 能直观的观察弧长和半径的变化。

设计意图: 通过学生自主探究和借助现代信息技术软件, 寻找弧长、半径、圆心角三者之间的关系; 通过插入数学史片段, 让学生再次感受数学家的独特魅力, 培养学生探究精神、实证精神, 以及坚持不懈、刻苦专研的学习态度。

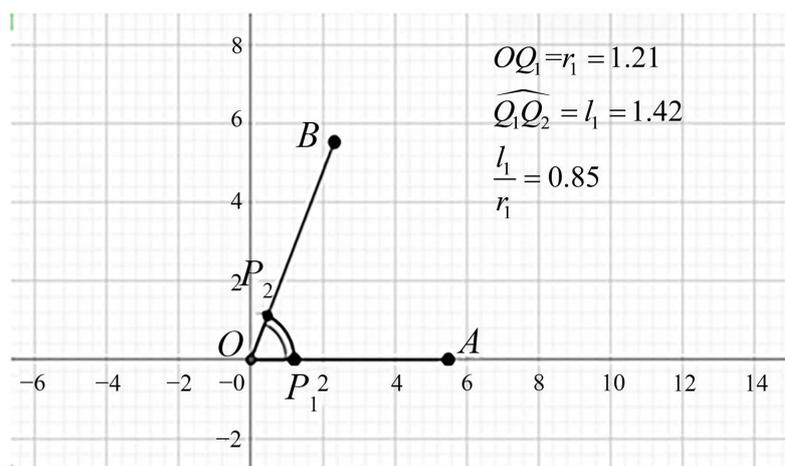


Figure 5. Variation of arc length and radius
图 5. 弧长和半径变化图

根据学生思考以下问题。

问题 1: 为什么当角一定时, 弧长与半径之间是一一对应关系呢?

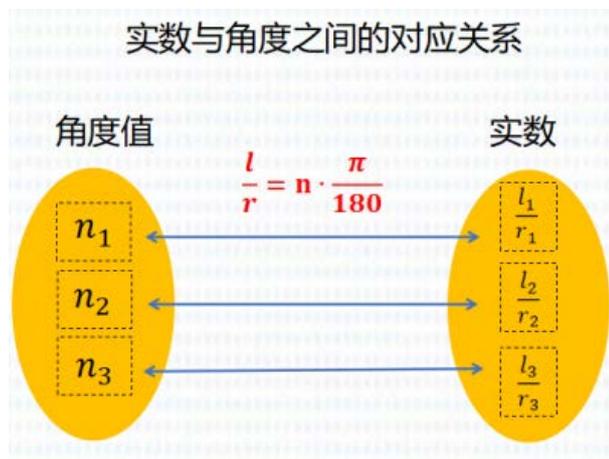
问题 2: 如果角度也在变化时, 弧长和半径之间又有什么关系呢?

问题 3: 我能否说角度和比值之间存在正比例函数关系呢? 大家觉得合适吗?

师生活动: 教师引导学生观察、思考、提出猜想、验证猜想, 借助现代教育技术进行实践检验。

3. 语言抽象

教师: 教师引导学生观察圆心角与弧长半径的公式, 总结二者呈现正比例的关系, 最终得出角度与实数之间的一一对应关系, 如图 6。



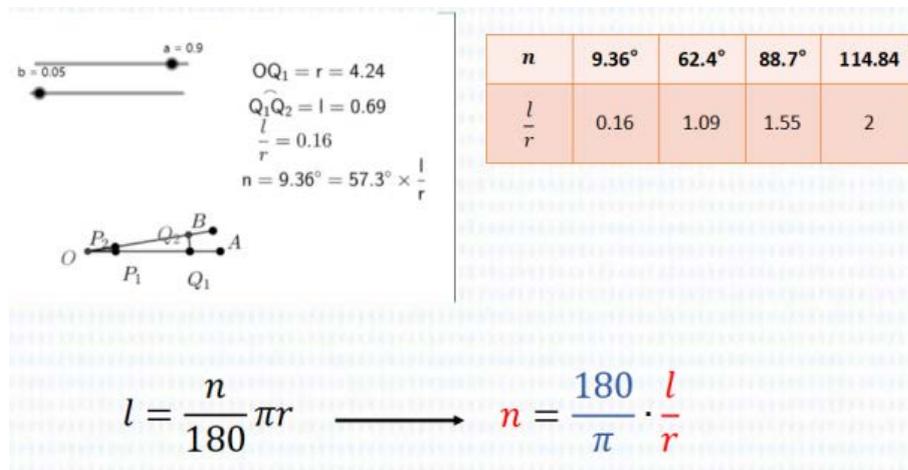


Figure 6. PPT teaching inquiry display diagram
图 6. PPT 教学探究展示图

设计意图: 通过引导学生自主探究, 感受知识的探究过程, 培养学生自主发现能力。

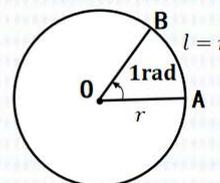
4. 概念生成

教师: 基于弧长公式下的比值与角度之间的解析式, 类比米和千克的单位, 找出一弧度角的概念, 展示课件, 见图 7。

弧度的概念

1弧度的角: 长度等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做1弧度的角。
用符号rad (radian) 表示, 读作弧度。

练一练: 弧长 $l = 2r$, 圆心角为 ($2rad$) ;
弧长 $l = 3r$, 圆心角为 ($3rad$) ;
弧长 $l = 2\pi r$, 圆心角为 ($2\pi rad$) 。



$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

Figure 7. Concept display diagram in PPT teaching
图 7. PPT 教学中概念展示图

设计意图: 推导得出具备一般性的公式, 由学生自主生成结论, 感受知识生成的乐趣, 体现学生的主体地位, 培养数学运算能力。

问题 1: 当角为 α 时, l 与 r 之间有什么关系? 大家大胆猜测。

问题 2: 任意角的正负和什么有关?

问题 3: 我们要将新知与旧知建立联系, 请同学们思考弧度和角度之间有什么关系呢?

问题 4: 1° 等于多少弧度呢?

问题 5: 1 弧度等于多少度呢?

初步得出弧度制和实数之间的关系, 如图 8。

角的概念推广后, 在弧度制下, 角的集合与实数集 R 之间建立起一一对应关系。

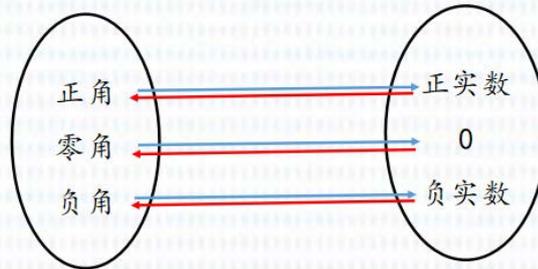


Figure 8. Relationship between radians and real numbers
图 8. 弧度和实数的关系图

师生活动: 通过以上对应关系, 让学生领悟引入弧度制带来的数学运算中便利之处。

5. 巩固新知

教师: 解决阿耶波多的难题、展示习题与习题解答过程。

设计意图: 将课前的问题作为课后练习题, 既是对新知的巩固, 又解决了数学史上的难题, 体现了学生对新知的掌握良好, 也培养了学生的学习信心。

师生活动: 弧度制和角度制之间相互转换运算。

6. 布置作业

通过将数学史融入弧度制概念教学, 学生已经初步了解了弧度制的发展, 并且也认识到数学史能帮助理解概念的特点, 布置拓展性阅读, 见图 9, 让学生继续了解弧度制的发展历程, 体验数学家的精神; 其次, 培养学生将数学文化与数学学习相结合的意识, 帮助学生运用数学史理解新知。

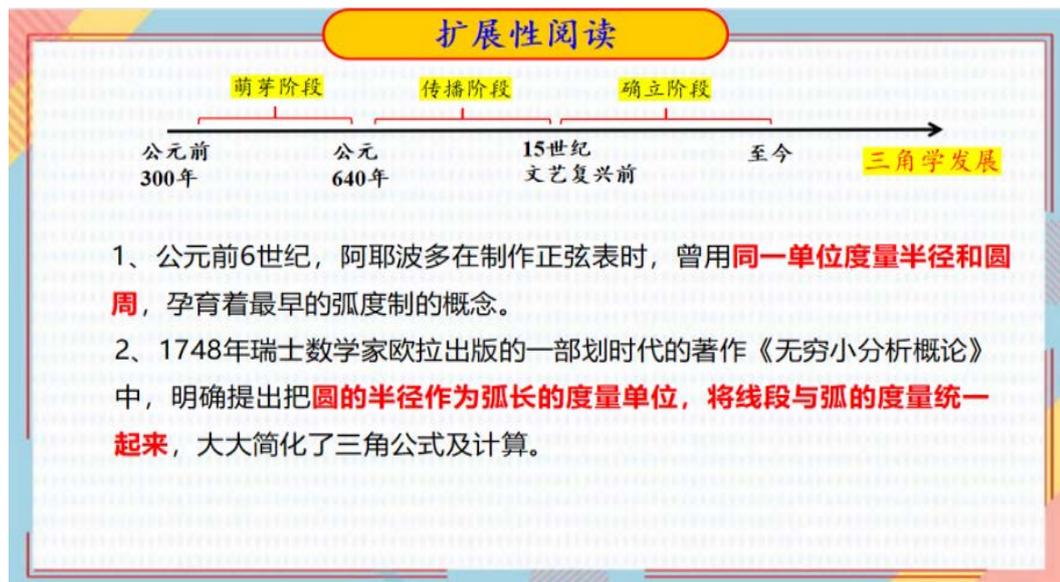


Figure 9. PPT homework display diagram
图 9. PPT 课后作业展示图

5. 教学设计反思

在整个教学中以阿耶波多所遇见的数学难题为载体, 以思维发展为主线, 将数学史融入到弧度制教学中, 引导学生感受知识的发生和探索过程, 帮助学生厘清学习弧度制的原因、用途, 及所蕴含的数学思想方法。

数学的概念都有其发展历史, 只有让学生真正了解这些背景及来龙去脉, 学生才能真正理解知识。本研究从学生熟悉的角度制出发, 引导学生思考如何解决进制单位不统一的问题, 造成认知冲突的同时引发学生的思考热情。引入弧度制后, 又还原弧度制的探索和创造历程, 让学生感受历史的曲折性, 从而更加深刻的反应弧度制概念的重要性。

参考文献

- [1] 崔恩华. 浅析弧度制的困惑[J]. 数学通讯, 2020(2): 22-25.
- [2] 徐章韬, 汪晓勤, 梅全雄. 认知的历史发生原理及其教学工程化以数学学科为例[J]. 数学教育学报, 2012, 21(1): 26-29+42.
- [3] 孙瑞, 巩子坤. 角的度量: 历史溯源及教学建议[J]. 小学数学教师, 2022(3): 75-80.
- [4] 江灼豪, 何小亚. 弧度制发展的历史溯源[J]. 数学通报, 2016, 55(7): 14-17.
- [5] 孙姝佳. HPM 视角下弧度制的教学设计与实践研究[D]: [硕士学位论文]. 青岛: 青岛大学, 2021.