

Research on Reform of Teaching Linear Algebra

Yanjun Liu

College of Mathematics and Information Science, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi
Email: 364749235@qq.com

Received: Nov. 15th, 2018; accepted: Nov. 29th, 2018; published: Dec. 6th, 2018

Abstract

This paper first refers to the current state of teaching linear algebra, based on the author's experiences of teaching linear algebra in recent years. It then gives some advices about textbook and teaching, with a deeper understanding of linear algebra. Indeed, this paper aims to build the image of how easy linear algebra is, so that it can play a more important role in college education.

Keywords

Linear Algebra, Teaching Reform, College Education

线性代数教学改革研究

刘燕俊

江西师范大学, 数学信息科学学院, 江西 南昌
Email: 364749235@qq.com

收稿日期: 2018年11月15日; 录用日期: 2018年11月29日; 发布日期: 2018年12月6日

摘要

基于近年来笔者线性代数教学方面的经验总结, 本文首先阐述了线性代数教学的当前现状。随后在对线性代数本身的更深入理解的基础上, 本文给出教材与教学方面的几点建议, 其目的在于力主建立线性代数通俗易懂的形象, 以发挥线性代数在大学教育中更重要的作用。

关键词

线性代数, 教学改革, 大学教育

Copyright © 2018 by author and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

线性代数是数学的一个分支。它主要以矩阵以及向量空间来研究线性方程组与线性函数。线性代数几乎是所有数学领域的基础。它既是现代几何中直线、平面、旋转曲面的核心基础，也是分析中函数空间上最自然的起点。线性代数广泛应用于各科学与工程领域，在对许多自然现象如力场、电磁场的建模中起着关键性作用。在非线性领域，线性代数也通常扮演者不可或缺的角色。

在大学课程中，线性代数是国内外高校理工科学生必修的基础课程之一。现代线性代数的主要内容有矩阵、行列式、线性方程组、线性空间、二次型等。课程基本要求为使得学生通过对线性代数课程的学习，了解线性代数的基础理论，并能灵活运用线性代数的思想、方法与工具去解决学习或者实践中遇到的问题。

2. 线性代数教学的现状

当前中国社会迅猛发展，国内教育水平也跟着迅速提高。尽管多媒体教学在当今越来越被推崇，但是线性代数教学依然更多的采用的是“粉笔 + 黑板”、“课本 + 教案”这种对数学学习最有效的传统授课模式。线性代数发展到今天，其本身已经到了几乎完美的地步。在师资方面，我国也拥有众多备受学生喜爱的优秀线性代数教师。但是，更深刻理解线性代数以及改进线性代数教学依旧是当今重点研究课题。

2.1. 对线性代数发展史了解不深

总体来说，我国线性代数教学依旧处在应试教育阶段。教师与学生以某一本科线性代数教材作为参考，按部就班，进行系统教学或学习。当前，我国市面上大多数的线性教材以线性代数发展史为主线编排内容，第一章通常讲行列式。历史上，行列式的引入确实远远早于矩阵。行列式于 1693 年莱布尼茨用于求解一般线性方程组，而矩阵的引入是在 1848 年^[1]。基于此，把行列式排在第一章是无可厚非的。但是，20 世纪线性代数进一步演化产生新的数学学科，即抽象代数。在这一体系中，行列式只是矩阵上运算的一种。因此，把行列式孤立出来只是单一的沿着历史发展轨迹，而在教学实践中，一开始就介绍行列式有诸多不便之处：首先，行列式的定义相对复杂；其次，求行列式值要用到诸多相关的性质，使得很多学生望而却步；再次，先了解行列式会导致很难让学生对它有正确的定位：要么认为行列式与矩阵相对没有多大联系，要么行列式与矩阵二者相混淆，即使后期再讲述矩阵运算时提到行列式，学生也很难突破之前的观念；最后，有些教材上举例说用行列式去解方程，很可能让学生觉得还不如初中的办法，由此产生观念偏差。

另外，大多数线性代数教材几乎不提及任何线性代数发展史，整本书都是定义定理或者计算，很少讲述定义的出处。在教学过程中，有些教师根据教材习惯性纯理论教学。因为没有介绍历史背景，教学内容往往显得很空洞，让学生很难正确的构建自己的知识体系。

2.2. 基础理论与实际操作不连贯

当今国内线性代数老师基本都具有很好的代数专业教育背景，其专业水平教线性代数一般来说是没问题的。因为教师本人的数学专业习惯，有时会侧重于讲解纯理论部分。当需要介绍新定义时，一般先给出定义，然后讲解性质，之后示范例子。对于非数学专业学生，教师的讲解通常是可以听懂的，但是

当他们自己动手实践时，却总难免一筹莫展。据其原因，主要是因为基础理论与实践练习还有些不连贯。以行列式为例，为了求行列式值，需要一系列行列式的性质支撑。但是教材上，或者授课中很少用通俗易懂直白的语言描述并且强调行列式的性质与相应的“操作方式”的细微不同。笔者在课堂实践时观察观察发现，这一点点细微的欠缺经常导致学生差之毫厘，谬以千里。

例如，行列式的性质中有一条为：将行列式某一行各元素同时乘以同一非零常数，再加入到另一行对应的元素上，行列式的值不变[2]。在教学过程中，笔者发现学生最初很难真正明白这一性质的真正的目的是什么。

2.3. 对线性代数课程的认识不清

线性代数课程教学目标可以描述为：通过该课程的学习使学生获得线性代数的基本知识和基本理论，掌握必要的数学运算技能和利用数学软件进行线性代数复杂计算的能力。同时使学生在运用数学方法分析问题和解决问题包括解决实际问题的能力得到进一步的培养、训练和提高。为学生学习后继课程，数学知识的拓宽及考研提供必要的基础。为学生进行科学研究和实际工作提供了适用的数学方法和计算手段。

由此可见，线性代数的课程目标是相对具体可行的。在教学过程中，还是会遇到各种各样的问题，大体可以从以下三个角度来说：首先，社会在整体上对线性代数没有多少了解，由此对线性代数进行“妖魔化”，动辄开始对线性代数冠以“抽象难懂”之类的评价；其次，线性代数老师有时对教学内容的要求层次不明导致学生按照数学专业学生的学习模式进行，无形中给学生增加了不必要的负担；最后，学生自己有时习惯上沉浸在中学数学的学习模式上，对现代社会分工尚未建立明确的概念，一味的探究超出自己范围的问题，以至空耗自己的精力，不能顺利完成当前学习内容。

3. 线性代数教学改革建议

根据目前线性代数教学现状，笔者结合近年来在实践教学中的经验以及教学过程中学生的反馈信息，提出几点改革建议。

3.1. 在教学中处理好与线性代数发展史的关系

在线性代数教学中，要综合考虑线性代数发展史的作用。一方面，不拘泥于线性代数发展史。根据现代代数学理论体系，在教材内容编排或者教学安排上，可以由大学生都熟悉的线性方程或者线性方程组出发，开篇介绍矩阵的起源以及定义。例如，由
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 = 6 \end{cases}$$
 去掉未知数、运算符等号可以得到数表

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$
，称之为矩阵。为了表示它们是一个整体，一般用小括号或者中括号括起来，即
$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \right)$$
。

矩阵的出现可以说是数学家“偷懒”的结果。但是数学家“偷懒”是有境界的，他们能由此形成一套非常了不起的理论，这也是他们的高明之处。另外，多元化社会的今天，大学生早已熟知手机数字键盘、IP地址之类的矩阵，无非是他们并没有用“矩阵”这个数学名词而已。因此，开篇通过大家熟知的内容引入矩阵更容易引起共鸣，也能更有效规避学生的心理抵触情绪。

另一方面，根据需要适当介绍线性代数发展史。在矩阵的运算体系中，矩阵乘法定义经常引起人们的困惑，很难理解定义矩阵乘法为：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{ms} \end{pmatrix},$$

其中

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + \cdots + a_{in} b_{nj} = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}.$$

如果这里介绍一下矩阵的起源，矩阵乘法就显得顺理成章，即矩阵的乘法起源于线性方程组的矩阵化以及系数与未知元分离。例如

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 = 6 \end{cases} \xrightarrow{\text{矩阵形式}} \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 4x_1 + 5x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{系数与未知元分离}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

由此进一步，扩展到一般形式。在教学实践中，这里可以充分利用多媒体的优点，用动画演示未知元的分离过程，使学生过目不忘。再例如，关于矩阵的初等变换，如果从线性方程组引入，也能使学生印象深刻。

3.2. 基础理论要与实践操作服务

线性代数内容主要包含两个方面：基础理论与实际应用。通俗地讲，基础理论是“后台程序”，实际应用是“使用操作系统”。建立起理论基础之后，适当描述“后台程序”如何有效支持“操作系统”，再介绍“使用手册”以及“注意事项”，这一系列过程完整无缺平滑过度，才能让学生更容易有迹可循。例如，最典型的求行列式值，其整个过程基于行列式性质，形成的最初等操作方法可以简单陈述为：1) 提取公因子；2) 互换两行；3) 将某一行的倍数加到另一行上。其中注意事项为：互换两行时，行列式值变号。

线性代数最主要的研究对象和方法可以用八个字来概括：“空间为体，矩阵为用”[3]。从矩阵的地位来看，我们也可以概括为“空间为体，矩阵为核”。一定程度上，空间可以看作是矩阵的“拆分变化组装”。科技发展到今天，线性代数上的绝大部分内容其实都可由计算机来实现。线性代数教学的主要任务是引导学生熟练掌握这些可以由计算机运行的具体操作，通过这些具体训练提高各方面的能力。基础理论在这过程中的作用是给学生以坚定、正确、可行的支持，而这种支持必需让学生真切感受到才能起作用。因此，在讲解基础理论的同时，一定要让学生明白基础理论在这一过程以何种方式支持实践操作。理论与应用上的细微差别，往往是导致学生认识不清的根源。

线性空间其实是为齐次线性方程组的解服务的。关于线性方程组理论，中学已经学习了其中“求解有唯一解的线性方程组”部分。对于一般情形，需要借助齐次线性方程组的一般解，由此导致了线性空间理论的产生，最终将求解线性方程组步骤形式化，详见[2]。

3.3. 建立线性代数通俗易懂的观念

通常人们认为线性代数很抽象，而“抽象”似乎就是难懂，就是脱离实际，就是莫名其妙。其实不然[3]。数学发现是艰苦的，但数学成果简单而直接。线性代数其实通俗易懂。线性代数的每一个定义或者定理都有其特定的历史原因，了解了它们的历史，也就不足为奇。我们要倡导与呼吁，以至整个社会对线性代数有更多的认识，让人们知道线性代数其实就在身边。线性代数课程可以说是初中数学加上一点点规则演化出来的理论体系。举个很简单的例子：

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{无非是 } 1+2=3, 2+3=5.$$

因此只要上过初中数学就可以来学习线性代数，也就是说它的起点也很低，全国人们都可以学也可以学好。

从教师角度来看，线性代数是培养学生能力的无限空间。它以简单的数字，按照行与列排成数表，就这样的一个体系，对培养学生的数学素养，逻辑推理、抽象思维以及创新性思维等都具有重要的意义和作用[4]。

而从学生角度，要努力形成自己的观念。一方面，试着了解概念背后的历史，就会发现所有的知识其实是很具体的。它们并不是凭空产生，而是基于实践需要，形成理论后又返回去为实际问题服务。线性代数一直在我们生活中的方方面面，特别是矩阵几乎无处不在，而了解了矩阵就掌握了线性代数核心。另一方面，学生要对线性代数有正确的定位。学习线性代数的大多数人其实都不是数学专业的，所以要懂得分辨自己潜在的数学专业思维，把这些思维分离出来，这样才能轻装前行。

4. 结论

线性代数是大学中具有重要意义的一门数学课，是理工科的基础。因此，有必要对线性代数进行合理化与情景化。在教材内容方面，可以按照现代数学观点进行编排，同时适当添加相关的历史背景，从而构建更合理的知识体系；在课堂教学方面，分清基础理论与实践操作，做好理论与实践的平滑过渡；在社会观念方面，努力让线性代数脱下“抽象难懂”的帽子，尽最大可能转变观念，建立线性代数通俗易懂的形象，从而使理工科学生能够轻松快捷掌握线性代数，并在实践中发挥它超乎想象的作用。

致 谢

非常感谢审稿老师以及编辑部老师对本文提出的宝贵意见!

参考文献

- [1] Luzardo, D. and Peña, A. (2006) History of Linear Algebra up to the Dawn of the 20th Century. *Divulgaciones Matemáticas*, **14**, 153-170.
- [2] 同济大学数学系. 工程数学: 线性代数[M]. 第6版. 北京: 高等教育出版社, 2014.
- [3] 李尚志. 线性代数教学改革漫谈[J]. 研究生教育研究, 2004(1): 30-33.
- [4] 韩冰, 李洁, 杨威, 等. 线性代数教学改革中的几点探讨[J]. 高等数学研究, 2013, 16(4): 72-74.

知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2331-799X, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: ces@hanspub.org