Creative Education Studies 创新教育研究, 2022, 10(11), 2673-2679
Published Online November 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2022.1011418

Hans汉斯

高等数学与初等数学的联系

——以数列为例

徐苏苏[1,2*]，刁玉存[1,2#]，李巧霞[1,2]，杨雨荷[1,2]

[1]伊犁师范大学数学与统计学院，新疆 伊宁
[2]伊犁师范大学应用数学研究所，新疆 伊宁

收稿日期：2022年9月14日；录用日期：2022年10月27日；发布日期：2022年11月3日

摘 要

初等数学是高等数学的基础，高等数学是初等数学的继续和提高。本研究主要分析了高等数学与初等数学知识之间的关系以及高等数学对初等数学教学的指导意义，高等数学知识内容较多地出现于数学竞赛问题之中，以2道数学竞赛中数列问题为例，以高等数学范畴中的思想和方法为解决契机，给出高中数学教学的建议。

关键词

高等数学，初等数学教学，数列

The Connection between Advanced Mathematics and Elementary Mathematics

—Taking the Sequence of Number as an Example

Susu Xu[1,2*], Yucun Diao[1,2#], Qiaoxia Li[1,2], Yuhe Yang[1,2]

[1]School of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yining Xinjiang
[2]Institute of Applied Mathematics, Yili Normal University, Yining Xinjiang

Received: Sep. 14th, 2022; accepted: Oct. 27th, 2022; published: Nov. 3rd, 2022

Abstract

Elementary mathematics is the basis of advanced mathematics, while advanced mathematics is the

[*]第一作者。
[#]通讯作者。

文章引用: 徐苏苏, 刁玉存, 李巧霞, 杨雨荷. 高等数学与初等数学的联系[J]. 创新教育研究, 2022, 10(11): 2673-2679.
DOI: 10.12677/ces.2022.1011418

continuation and improvement of elementary mathematics. This research mainly analyzes the relationship between advanced mathematics and elementary mathematics knowledge and the guiding significance of higher mathematics to elementary mathematics teaching, the content of advanced mathematics knowledge appears in mathematics competition problems, takes the problem of sequence of number in two mathematical competitions as an example, taking the ideas and methods in the category of advanced mathematics as a turning point, this paper gives some suggestions on the teaching of high school mathematics.

Keywords

Advanced Mathematics, Elementary Mathematics Teaching, Sequence of Number

1. 问题的提出

在许多数学教师眼中，尤其中学教师都会认为高等数学与初等数学存在很少的联系，大家都认为初等数学与高等数学之间无论是在学习方法上还是观点上都存在着很多的不同点。那么就会有人在教学上产生这样一种想法：我只要把课本中的知识给学生讲通、讲透彻就可以，学生只要学会利用课本中的知识解决问题，也就不需要额外学习高等数学中的知识了，高等数学知识的学习反而会增加学生的课业负担。我们不否认高等数学知识会给学生带来压力，也并不提倡利用课堂给学生传授高等数学知识，但是一个优秀教师讲授的知识仅仅停留在课本上是远远不够的，在遇到一些初等数学问题时，大家往往想不到用合理的解释来说明问题，原因就是有些初等数学的知识只是一个表面的结论，更深一层的解释还是需要高等数学中的知识，换句话说，高等数学是初等数学的延展和提高。因此高等数学与初等数学之间有着千丝万缕的关系。

高等数学和初等数学的结合一方面可以更好地了解数学知识的深度和数学问题的背景，以更高的角度看初等数学以及初等数学的教学；另一方面对教师的数学学科素养和解题能力的提高具有重要意义[1]。教师以高等数学的视角分析初等数学的某些问题，不仅会更透彻、更全面，而且还对中学教师更好地把握教学有很大的帮助。目前我国教育部已经出台并实施的《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》中很大程度增加了高等数学和现代数学的知识，这些足以说明高等数学在初等数学教学中有着重要的作用。

著名数学家 M•阿蒂亚说：“没有这些抽象概念，数学恐怕早就被成堆的复杂问题压得喘不过气来，也早就分裂成数不清的、互不关联的个别情况的研究了[2]。”数学反复经历了由特殊到一般，由直观到抽象的过程，代数体系中学习数学是从“数”开始，但是随着知识难度的增加，了解到数学不仅仅局限于“数”，符号也可以充当“数”或者更复杂的量的角色，更高层次的抽象是符号之间的运算法则和相互关系。随着社会的发展，高考作为选拔以及筛选人才的一个通道，高考试题的难度在不断地增加，在数列的题目中都会看到高等数学的影子，这些题目在一定程度上会难倒一大批学生，那么在平时的数学学习中就要给学生融入适当的高等数学知识，这就要求中学数学老师知识的储备量要远远高于初等数学的知识，以便从更高的观点把知识传授给学生，学生学习这些观点以后，更利于解决难度高的数列问题。

2. 高等数学与初等数学的联系

2.1. 高等数学与初等数学知识内容间的关系

数学的发展是一个不断发现、不断统一、不断深化的过程[3]。初等数学包括算术、初等代数、初等几何和三角等，初等数学知识主要在小学与中学中学习。初等数学以常量数学为主，但也包含初步的变量数学。高等数学有数理逻辑、数论、几何学、代数学、微分方程、拓扑学、概率论、函数论和泛函分析等分支，这些知识比初等数学更加深奥。高等数学主要以非匀变量为对象研究现实世界的空间形式与数量关系，学习的是数学的“所以然”。对比初等数学，高等数学的研究对象和方法更加繁杂，但它们之间有高度统一与本质的联系，这始终贯穿于数学的整个学习过程。在初等数学的学习中有很多问题它本身是无法解决的，必须借助高等数学的理论工具对问题进一步分析，才可以做出合理的解释。作为一名数学教师要做到尽可能地把握数学发展的过程，清楚地认识到高等数学知识的学习对初等数学教学的意义，在教学中可以把相关的高等数学知识贯穿到中学教学中，对所学知识要做到既知其然，又知其所以然。

2.2. 高等数学与初等数学教学关系

结合《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》和教学大纲的要求可知高中数学课程的基本理念是以学生发展为本，落实立德树人根本任务，培育科学精神和创新意识，提升数学学科素养，使得人人都能获得良好的数学教育，不同的人在数学上得到不同的发展，教学要面对全体学生进行，要促进每一个学生的发展，既要为所有的学生打好共同基础，也要注意发展学生的个性和特长[4]。由于各种不同的因素，学生在数学知识、技能、能力方面以及数学经验、志趣上存在差异。因此，教师应尊重学生的人格，关注个体差异，区别对待，因材施教，因势利导、在教学中宜从学生的实际情况出发，兼顾学习有困难和学有余力的学生，通过多种途径和方法，调动所有学生学习数学的积极性。改进教学策略，满足学生的不同学习需求，发展学生的数学才能。这就要求数学教育在对不同数学现实和不同数学特长的学生就要因材施教，从而高中课程中设置了选修课程，其中包含了许多高等数学内容，比如微积分就出现在选修 A 类课程和 B 类课程中，包括函数极限、导数和微分等，大学的先修课程如微积分、解析几何和线性代数都出现在教材中，这样设置的目的是：1) 充分考虑到学生不同的成长需求，为学生提供多样性的课程，让学生自主选择；2) 为学生的可持续发展和终身学习提供条件；3) 提供一个学生可展示数学才能的平台，以便学生发展数学兴趣，满足学生的不同志趣；4) 为高校的招生提供参考。因此在教学中要对学生进行适当的引导，尊重学生的选择，对学有余力的学生合理的拓展一些高等数学的内容，思想和方法是非常有必要的。

数列是一类特殊的函数，是数学重要的研究对象，也是研究函数的基本工具，在生活中有着广泛的应用。数列的学习从小学便有接触，小学中的数列以找规律的形式出现，就是“按一定次序排列的一列数”，让学生在学习中发现数列规律，寻找数列规律的方法是依据数列隐含规律的几种表现形式，从不同的角度认真观察、比较、尝试和计算。在这一阶段对数列的认识是最基础最简单的。在中学数学中讲到数列的概念，出现等差、等比数列以及可以转化为等差、等比的数列，了解等差数列与一元一次函数、等比数列与指数函数的联系，学生能感受数列与函数的共性与差异，体会数学的整体性。这些内容对于学生来说是基础性的知识，考虑到学生的差异性，在 A 类课程中设置了微积分专题，其中就包括数列极限[4]：1) 通过典型收敛数列的极限过程(当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n}\to 0$，$\frac{n}{n+1}\to 1$，$q^n\to 0\left(0<|q|<1\right)$，$a^{\frac{1}{n}}\to 1\left(a>0\right)$)，建立并理解数列极限的 ε-N 定义；2) 探索并证明收敛数列是有界数列；3) 通过典型单调有界数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$，

$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$，$\left\{q^n\right\}(0<q<1)$的收敛过程，理解单调有界数列必有极限；4) 掌握数列极限的四则运算法则；5) 通过典型数列的收敛性，理解 e 的意义。在此基础上建立函数极限和连续的概念，用极限刻画导数，通过极限建立微分和积分的概念，这并非是把高等数学内容下放到高中课程中，而是要求教师考虑学生的接受能力，着重直观理解，培养学生的数学抽象能力，为大学数学课程奠定基础，也为学有余力的学生提供解高考题和竞赛题的思路。

3. 高等数学与初等数学中数列的应用

数学竞赛在一定程度上可以激发学生学习数学的兴趣，中国为了发现和选拔数学人才在数学竞赛中投入很大，数学竞赛也在跌跌撞撞中走向成熟。在这样的背景下，有许多学生尝试参加数学竞赛，并出现了很多佼佼者，也意味着很多中学生的思维是可以达到更高的层次，是可以接受比所在学习阶段更难的数学知识的。

例 1 (根源杯预考)记 $f(x)$ 为正整数 $x>1$ 的最大素因子，数列 $\{a_n\}$ 定义如下：

$a_1>1$ 为正整数，$a_{n+1}=a_n+f(a_n)$　$a\geq 1$，证明：存在正整数 m，对任意素数 $p>m$，存在正整数 n，使得 $a_n=p^2$。

证明：由条件可知，数列 $\{a_n\}$ 的每一项都大于 1，$a_n=f(a_n)\left(1+\frac{a_n}{f(a_n)}\right)$，令 $b_n=\frac{a_n}{f(a_n)}$。先证明 $\{b_n\}$ 无上界，若 $\{b_n\}$ 有上界，则存在正数 $G>0$，使得对任意的正整数 n，都有 $b_n<G$，由于 $a_{n+1}-a_n\geq 2$，得到 $a_n\geq 2n$，所以 $\{a_n\}$ 无上界，由于 $\{b_n\}$ 有上界，进而 $\{f(a_n)\}$ 无上界，所以存在素数 p 及正整数 m，$p|a_m$，且 $p>\max\{1+G,a_1\}$ 现在观察 a_m 素因子来源：

$$\begin{cases}a_2=f(a_1)\left(1+\dfrac{a_1}{f(a_1)}\right)\\ \quad\vdots\\ a_{m-1}=f(a_{m-2})\left(1+\dfrac{a_{m-2}}{f(a_{m-2})}\right)\\ a_m=f(a_{m-1})\left(1+\dfrac{a_{m-1}}{f(a_{m-1})}\right)\end{cases}\tag{1}$$

由于

$$p>1+G>1+\frac{a_{m-1}}{f(a_{m-1})}。$$

从(1)中可以看出 $p|f(a_{m-1})$，则 $p|a_{m-1}$。再根据 $p>1+G>1+\frac{a_{m-2}}{f(a_{m-2})}$，可得 $p|f(a_{m-2})$，反复下去，最终得到 $p|a_1$，但是与 $p>a_1$ 矛盾，所以 $\{b_n\}$ 无上界，由定义可知 $f(a_n)$ 是 a_n 的最大素因子，$f(a_n)|a_n+f(a_n)$，则 $f(a_{n+1})=f(a_n+f(a_n))\geq f(a_n)$，故有

$$b_{n+1}-b_n=\frac{a_n+f(a_n)}{f(a_n+f(a_n))}-\frac{a_n}{f(a_n)}\leq\frac{a_n+f(a_n)}{f(a_n)}-\frac{a_n}{f(a_n)}=1。$$

所以 $\{b_n\}$ 每一次增长的量都不超过 1，注意到 $\{b_n\}$ 无界，可知 $\{b_n\}$ 能取遍所有大于 b_1 的正整数，即：每个大于 b_1 的正整数都在数列 $\{b_n\}$ 中出现。

所以存在素数 p_1 及正整数 k，使得 $b_k = p_1 - 1$，则 $1+\frac{a_k}{f(a_k)} = p_1$，所以 $a_{k+1} = f(a_k)p_1 = p_1p_2$，其中 $p_2 = f(a_k)$ 是素数。

若 $p_2 < p_1$，则 $f(a_{k+1}) = p_1$；$a_{k+2} = p_1(p_2+1)$，$f(a_{k+2}) = p_1$，$a_{k+3} = p_1(p_2+2)$ 反复做下去，直到 $a_m = p_1^2$，这里 $m > k+1$，进一步，类似可以得到 $a_{m+1} = p_1(p_1+1)$，$a_{m+2} = p_1(p_1+2)$，直到 $a_t = p_1p_3$，这里 $t > m$，p_3 是大于 p_1 的最小素数。对 $a_t = p_1p_3$ 重复上述操作，直到 $a_s = p_3^2$，这 $s > t$，这样反复下去，对任意的素数 $p \ge p_1$，p^2 都会在数列 $\{a_n\}$ 中出现。

若 $p_2 > p_1$，同理可得，对于任意的素数 $p \ge p_2$，p^2 都会在数列 $\{a_n\}$ 中出现，若 $p_2 = p_1$，在上面的论证中从 $a_m = p_1^2$ (这里 $m = k+1$)开始，重复上面的操作可得，对于任意的素数 $p \ge p_1$，都会在数列 $\{a_n\}$ 中出现。

综上所述，存在正整数 $M = \max\{p_1, p_2\}$，对于任意的素数 $p > M$，都存在正整数 n，使得 $a_n = p^2$。

评析：从解题人的解答过程中可以看出，他不仅对中学知识掌握扎实，而且涉及到了许多中学以外的知识点，用十分巧妙的方法将这道题解答的透彻全面。从他的解答过程不仅可以看出其观点之高，涉及到大学数学分析中“有关界的概念和性质”、高等代数中的“整数的一些整除性质”和高等数学中“离散的介值定理”，还可以看出他具备的高等数学知识远远超过这些，那么他的教育和他所学到的这些知识与他的老师存在着必然关系，可想而知他的数学老师也是一位观点很高、数学专业基础知识极其深厚的一位教师。由此可见，数学教师的知识素养是否深厚对学生的数学能力水平影响很大，中学教师在教学过程中应该如何渗透高等数学知识培养出国家所需的数学人才是值得思考的。

例 2　求下面级数的和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

证明：因为

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{x} &= 1-\frac{x^2}{1\times2\times3}+\frac{x^4}{1\times2\times3\times4\times5}-\frac{x^6}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7}+\cdots\\ &= \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots\end{aligned}$$

所以

$$\frac{1}{2\times3} = \frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\cdots$$

解上式得：

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots = \frac{\pi^2}{6}。$$

评析：这道题是欧拉运用了从有限到无限的类比，实现了有限方程到无限方程的过渡，即“若方程 $f(x)=0$ 的根为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，则 $f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$”到“若方程 $f(x)=0$ 的根为 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$，则 $f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)\cdots$”的过渡，不难看出，这道题是一个数列问题，其通项公式为 $\frac{1}{n^2}$，那么用高等数学的知识来解决求这个数列的前 n 项和的问题，不仅大大的减少解题时间，还减小了解题难度，可见高等数学的知识适当运用对某些初等数学问题的解决极为重要。

4. 初等数学教学融入高等数学知识的初步思考

一方面是对教师如何将高等数学知识融合到初等数学的教学当中的思考。这一部分难度比较大，要把初等数学知识与高等数学知识结合到一起给学生教学，首先要找到高等数学知识与初等数学知识之间的一个桥梁，通过这个桥梁我们可以延伸初等数学知识，那么我们可以用典型的例题来起桥梁的作用，要把高等数学中的某些概念和理论与初等数学中相应的原型和特例联系起来，如本文中的例 1 和例 2，通过例 1 的解题过程可以让学生掌握“有关界的概念和性质”、“整数的一些整除性质”和“离散的介值定理”；例 2 可以让学生掌握有限方程到无限方程的过渡。学生为了解题方便，还是有很大兴趣去学习的；其次在初等数学中有些不容易明白的地方，我们可以追根溯源，寻找其在高等数学中的背景，了解其发展过程，在课程中灵活采用讲解、讨论、自学、辅导、练习等各种教学方法，让学生在高等数学知识点的指导下去学习初等数学知识，这不仅让学生了解到更多的数学知识，还可以让学生对数学产生浓厚的兴趣。

另一方面是选取教学内容和授课对象的思考。学生在学习的过程中从整体上来看呈螺旋式上升特点，教材的编排也遵循这个规律，而数学的发展是循序渐进的，再联系人的智力发展和科学认识水平的提高，可以确定学生对知识的认识则是遵循阶梯型规律的，因此在选取教学内容时要遵循《标准》中的建议，一是选取的教学内容要有层次性，要难度适中，要考虑到学生的可接受性，要考虑学生能否对高等数学知识进行消化；二是教师对选取内容的掌握要非常扎实，这样才可以将知识完整传授给学生。由于学生的认知水平不同，在授课对象的选取上要贯彻“不同的人在数学上得到不同的发展”的理念，尽量选取学有余力的学生进行讲解，培养其浓厚的数学学习兴趣。

5. 教学建议

在完成基础知识教学以外，教师可以选取部分高等数学知识拓展学生的视野，选取部分要符合授课对象的认知规律，不能脱离学生的认知结构，以教材和课程标准为依据，发展学生的创新意识和研究能力。

“教师之为教，不在全盘授予，而在相机诱导”，由于不同的学生拥有不同的认知，作为教师要不断地发现学生的特长和兴趣，对于数学能力较差的学生，除了掌握基础知识之外，可以引导他们查找高等数学相关的知识，比如对“一尺之棰，日取一半，万世不竭”的理解，让学生简单了解数列极限，寻找一些学生比较感兴趣的实例故事等不断引导学生主动地接触高等数学知识，拓展知识体系；学生是学习的主体，教师可以放手让学生自主学习，因此对于学有余力的学生，根据其自身爱好，让其通过网络自主选择学习，教师选取竞赛题以及难度较高的高考题让学生进行解答，在解题过程中，教师适时适量地讲述高等数学知识，不仅让学生对大学知识有一定了解，还让学生对数学有更深层次的认识，拓宽了解题思路，培养一题多解意识，从侧面增强了学生的竞赛意识，为国家培养数学人才做出了贡献。

最为重要的是教师应具备扎实的高等数学 PCK (学科专业知识)，数学课堂教学始终是以教师为主导，以学生为主体的双边的教学活动。学生在理解高等数学概念方面总会存在难以理解的问题，而教师作为教学的组织者和领导者就需要有极强的高等数学专业知识和能力，同时也要具备良好的教学技能，从而能够将抽象复杂的高等数学知识灵活巧妙地被中学生所掌握，让学生感受数学体系中更为高位和深刻的思想和方法。

基金项目

“高观点”下高中数学导研式教学模式研究(项目编号：2021YSYB061)。

参考文献

[1] 张劲松. 从“高观点下的初等数学”看中学数学教师的角色[J]. 数学教学研究, 2007(4): 4-7.

[2] [英] M·阿蒂亚. 数学的统一性[M]. 南京: 江苏教育出版社, 1995.

[3] F·克莱茵. 高观点下的初等数学[M]. 舒湘芹, 译. 武汉: 湖北教育出版社, 1980.

[4] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.