

高中数学新旧教材比较分析

——以人教 A 版“三角函数”为例

张金竹, 梅方莹, 孙幸荣

黄冈师范学院数学与统计学院, 湖北 黄冈

收稿日期: 2023年5月11日; 录用日期: 2023年6月20日; 发布日期: 2023年6月30日

摘要

文章以人教A版新旧两版教材中的“三角函数”为例, 采用文献分析法和比较研究法对内容编排结构、数学文化融入、例习题数量和难度、章末小结这四个部分进行比较, 通过比较发现, 新教材可以帮助教师更好地引导学生建立知识间的内在联系, 帮助学生了解相关数学文化, 充分体现了以人为本的教育理念和数学文化的人文思想, 落实立德树人, 实现提质增效, 更有效地培养学生的数学核心素养。

关键词

高中数学教材, 三角函数, 比较分析

Comparative Analysis of New and Old Textbooks of High School Mathematics

—Taking the Example of “Trigonometric Functions” of the A Version of Human Teaching

Jin Zhu Zhang, Fang Ying Mei, Xing Rong Sun

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: May 11th, 2023; accepted: Jun. 20th, 2023; published: Jun. 30th, 2023

Abstract

The article takes "trigonometric functions" in the old and new textbooks of the Human Education A edition as an example, and uses literature analysis and comparative research methods to compare the four parts: content arrangement structure, integration of mathematical culture, the number and difficulty of examples and exercises, and end-of-chapter summaries. Through comparison, it is

found that the new textbook can help teachers better guide students to establish intrinsic connections between knowledge, help students understand relevant mathematical culture, fully reflect the humanistic concept of human-centered education and the humanistic idea of mathematical culture, implement moral education, achieve quality and load reduction, and more effectively cultivate students' core mathematical literacy.

Keywords

High School Mathematics Textbooks, Trigonometric Function, Comparative Analysis

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 问题提出

党的二十大报告提出了教育工作的战略部署,旨在办好人民满意的教育。立德树人、优先发展、体系完整、促进公平、改革创新、提高质量的教育是人民满意的教育。《普通高中数学课程标准(实验版)》(以下简称为“旧课标”)于2003年教育部发布,它是2007版普通高中课程标准实验数学教科书(以下简称为“旧教材”)编写的基础和依据,随着时代的发展,旧课标和旧教材对于学生的发展存在一定的局限性。因此,普通高中课程修订工作于2013年教育部开展,《普通高中数学课程标准(2017年版)》(以下简称为“新课标”)于2018年颁布,它是2019版普通高中数学教科书(以下简称为“新教材”)编写的前提。新教材的投入对于一线教师来说,深入理解新旧教材的共性与差异,并据此调整教学,才能更好地开展教学,实现提质减负,落实立德树人。因此,新旧教材之间有什么区别,新教材又有哪些改进和特点?对这些问题的讨论于学生发展和教师教学有着深远的影响。

2. 比较分析

2.1. 内容编排结构比较

通过比较新旧教材“三角函数”内容在教材的位置,来分析两者在总体内容上的差异,如表1。

Table 1. Comparison of the content of “trigonometric functions” in the textbook between the old and new textbooks

表 1. 新旧教材“三角函数”内容在教材位置的比较

	新教材(必修 1)	章节	旧教材(必修 4)
5.1	任意角和弧度制	1.1	任意角和弧度制
5.2	三角函数的概念	1.2	任意角的三角函数
5.3	诱导公式	1.3	三角函数的诱导公式
5.4	三角函数的图象与性质	1.4	三角函数的图象与性质
5.5	三角恒等变换	1.5	函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$
5.6	函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$	1.6	三角函数模型的简单应用
5.7	三角函数的应用	3.1	两角和差的正弦、余弦和正切公式
		3.2	简单的三角恒等变换

通过比较,我们发现:新旧两版本的“三角函数”内容在教材中都处于必修课本的位置,这体现了

“三角函数”内容在高中数学“主题二函数”中的重要性。但在高中数学知识体系中新旧版本的“三角函数”内容的整体编排和结构分布有所不同，主要变化有以下两点。

1) 旧教材的第二章“平面向量”被放在第一章“三角函数”和第三章“三角恒等变换”中间，实际上三角恒等变换是三角函数化简、求解过程中所运用的变换，而“平面向量”的穿插割裂了“三角函数”与“三角恒等变换”的内在关联，不利于学生整体把握三角函数知识，如图 1。新教材将“三角恒等变换”看作是“三角函数”的一部分即“三角函数”这一章包含“三角恒等变换”内容，如图 2，且三角函数的学习安排是紧跟在第二章函数的概念与性质、第三章指数函数与对数函数这两章之后进行的，考虑因素有二：第一，在研究三角函数相关概念运用了单位圆的性质，在两角差余弦公式的推导上，仍然沿用了单位圆性质的方法，与研究三角函数相关概念的方法一致，对于学生来说达到了“减负”的效果；第二，遵循了“内容的有机联系”和“内容与数学基础知识相结合”等原则，有利于学生整体把握三角函数概念性质及应用，有利于加深学生前面所学的函数知识及联系。由于三角函数相关知识多且细，新教材对于教师教学来说，更能有针对性的进行教学，内容选择及重点更突出，教师更易把握教学重点，以及合理安排教学时间。

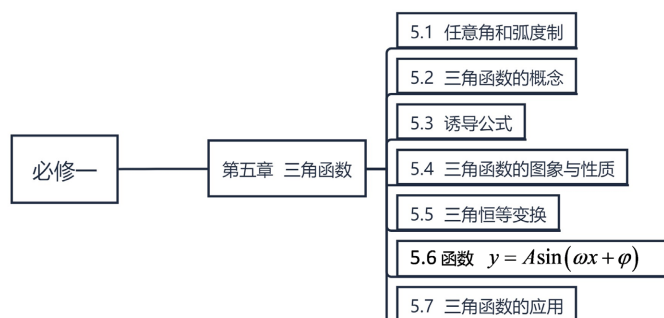


Figure 1. New textbook trigonometric chapter mind map

图 1. 新教材三角函数章节思维导图

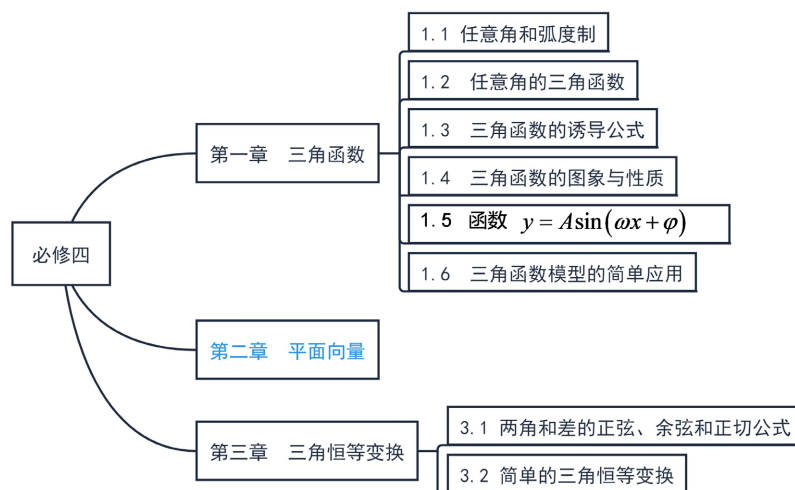


Figure 2. Old textbook trigonometric chapter mind map

图 2. 教材三角函数章节思维导图

2) 随着对数的发明以及微积分的创立，使得三角函数表的制作变得简单，解决三角函数的问题也得到了简化，因此，新旧教材都涉及了运用信息技术制作三角函数表，同时，教师在一定程度上提高了资

源管理效率、优化了课堂教学效果。在编排结构上,新教材是围绕三角函数性质,进而研究和(差)角公式、倍角公式。与旧教材相比,新教材的三角恒等变换内容在编写上更加精简,它更加注重学生对三角函数内在联系的理解。同时,新教材在介绍三角函数的基本概念、图象的基础上,深入研究了函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的性质,同时,学生的数学抽象、逻辑推理和数学建模等素养在此过程中能得到发展[1]。

2.2. 数学文化融入比较

由于新旧两版教材在数学文化内容及栏目分布上相差不大,所以这里就不做过多阐述,但这两版教材在数学文化运用水平上有所差别,这里借鉴沈春晖在 de Lange 的研究成果上进行细化得到的划分方式进行研究[2],如表 2。

Table 2. The use of mathematical culture in mathematics textbooks

表 2. 数学教材中数学文化的运用方式

类别	描述
外在型	介绍文化,不涉及数学内容
内在型	可分离型 文化与数学可分离,文化为修饰,解决数学问题
	不可分离型 文化与数学不可分离,文化是数学问题的组成成分,解决文化问题

通过整理,得到了新旧教材“三角函数”中的数学文化运用方式统计情况如图 3。

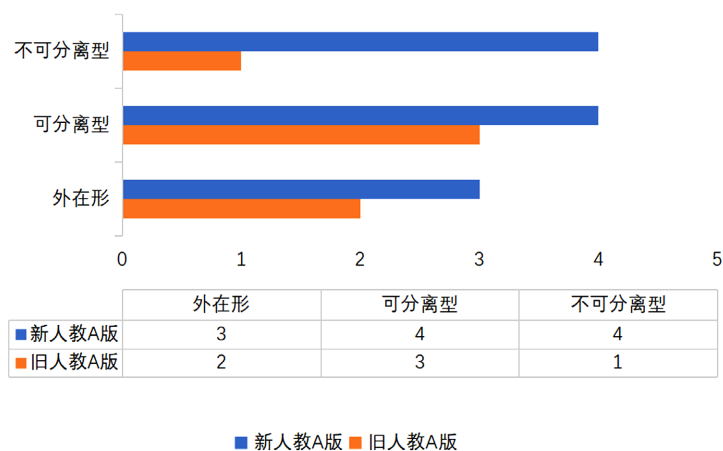


Figure 3. Diagram of the use of mathematical culture

图 3. 数学文化运用方式图

通过比较可知,新旧教材的数学运用方式在可分离型和外在型相差不大。但新教材比旧教材涉及的不可分离型数学文化要多,且深度也不同,主要体现在以下几个方面。

在三角函数概念学习中,新教材始终是用单位圆的性质来定义三角函数的,然后再与锐角三角函数建立联系。新教材的处理方式是基于历史的发展与生活的需要来学习任意角的三角函数的,同时厘清了它与锐角三角函数的数学本质,更加强调了三角函数是周期函数这一数学本质。而旧教材认为任意角的三角函数是锐角三角函数的延伸,利用角的终边上的点的坐标 (x, y) 的比值定义三角函数,没有考虑到任意三角函数在历史发展的重要性,脱离历史文化的发展而单纯地学习知识,不利于学生深入理解和掌握知识,不利于学生对民族自豪感的培养,不利于学生对寻求真理坚持不懈态度的培养[3]。“师者,传道授业解惑也”,新教材的内容设置为教师在教学中弘扬中国文化提供了良好的教育平台。

在“函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ”这一节中，两版教材都是以科学实例来探讨图像及性质。为了更好的引导学生掌握和理解该图象的性质，新教材把抽象难懂的数学知识与人类文化紧密联系，并添加了两张有趣的图片，如图 4。它是由古代的一种水利灌溉工具和《农政全书》中的筒车原理工作图组成，这也为学生学习抽象知识提供了一丝乐趣，彰显了人类为了改善生活的伟大智慧，结合生活实际问题，也有利于培养学生的民族自豪感。而旧教材是由物理中的两个例子即“简弦运动、交流电流”来引出课题，如图 5，并没有与跨学科知识相结合，只是单纯介绍了交流电流的图象是形如 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ，紧随其后介绍的就是纯数学知识，导致物理知识与数学知识相分离，不利于培养学生的知识迁移能力，也不利于激发学生学习的兴趣，不利于将数学知识应用于其他学科的获得感。同时，一个班级的任课教师是一个团队，物理知识与数学知识相分离，不利于教师与教师的团队协作。



Figure 4. Hydraulic irrigation tool diagram and the Complete Book of Agricultural Administration

图 4. 水利灌溉工具图和《农政全书》

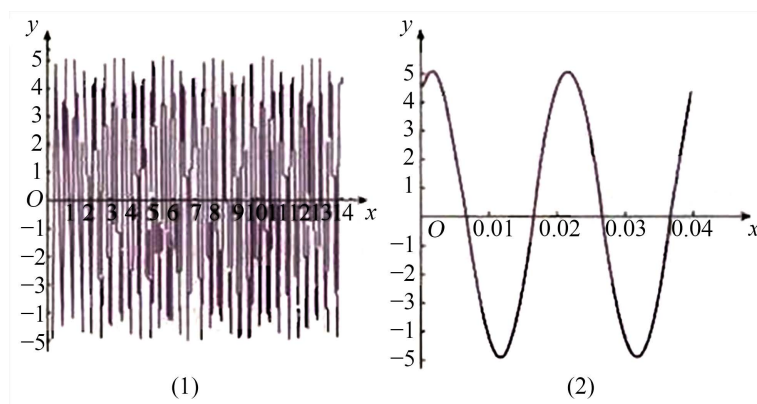


Figure 5. Alternating current and image

图 5. 交变电流及图象图

在“三角函数应用”这一节中，新旧教材都涉及了周期运动现象的例子，但新教材是结合物理学中“弹簧振子”来引出课题的，如图 6，一方面，说明了数学知识的广泛应用性，另一方面，可以培养学生学习知识的好奇心，因为数学知识不仅可以解决生活问题还可以解决科学问题，在一定程度上，有利于学生发现自己的优点或长处，有利于教师因材施教。而旧教材是以某种变化着的现象具有周期性，温度变化，如图 7，以温度变化的例子来引出所要学的知识，并不能激起学生学习的兴趣，反而会给学生带来困惑。因为 8 小时的大温差，大部分学生是没有经历过的，如果用三角函数来描述，还要用三角

函数知识来解决什么时候温度最高、什么时候温度最低、以及温差这样的问题，学生会觉得把一个简单问题给复杂化了，学生运用数学解决问题的兴趣也会大打折扣[4]。

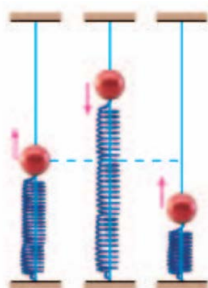


Figure 6. Spring oscillator diagram

图 6. 弹簧振子图

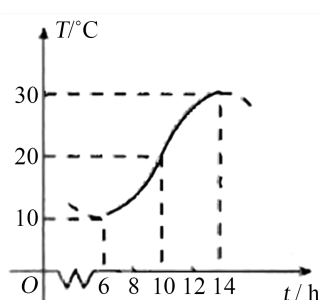


Figure 7. Temperature change graph

图 7. 温度变化图

2.3. 例习题数量和难度比较

2.3.1. 例习题数量比较

通过比较新旧两版教材“三角函数”的例习题数量，来分析新旧两版教材“三角函数”在具体内容上的差异，如表 3 所示。

Table 3. Comparison of the number of “Trigonometric Functions” example exercises in the old and new textbooks

表 3. 新旧教材“三角函数”例习题数量比较

各小节名称	例习题数量	
	新人教 A 版	旧人教 A 版
任意角和弧度制	29	31
三角函数的概念	39	41
诱导公式	22	18
三角函数的图象与性质	43	36
三角恒等变换	53	64
函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$	13	14
三角函数的应用	11	13
复习参考题	27	51
总计	237	268

通过比较,我们发现:例习题总数上新教材比旧教材少 31 道,因为旧教材把三角函数分为了两章,所以对应的复习参考题量较大,而新教材合为一章后,降低了习题的数量,这在一定程度上减轻了学生繁重的学习负担,有利于教师提高教育教学质量,但在个别章节上新教材增加了例习题的数量,诱导公式部分和三角函数的图象与性质分别增加了 4 道题和 7 道题,新教材新增了整体运用类型的例题,如图 8。

例 5 已知 $\sin(53^\circ - \alpha) = \frac{1}{5}$, 且 $-270^\circ < \alpha < -90^\circ$, 求 $\sin(37^\circ + \alpha)$ 的值.

分析: 联系条件与结论, 注意到 $(53^\circ - \alpha) + (37^\circ + \alpha) = 90^\circ$, 由此可利用诱导公式解决问题.

解: 因为 $(53^\circ - \alpha) + (37^\circ + \alpha) = 90^\circ$, 所以由诱导公式五, 得

$$\sin(37^\circ + \alpha) = \sin[90^\circ - (53^\circ - \alpha)]$$

$$= \cos(53^\circ - \alpha)$$

因为 $-270^\circ < \alpha < -90^\circ$,

所以 $143^\circ < 53^\circ - \alpha < 323^\circ$.

由 $\sin(53^\circ - \alpha) = \frac{1}{5} > 0$, 得 $143^\circ < 53^\circ - \alpha < 180^\circ$.

所以 $\cos(53^\circ - \alpha) = -\sqrt{1 - \sin^2(53^\circ - \alpha)} = -\sqrt{1 - (\frac{1}{5})^2} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$,

所以 $\sin(37^\circ + \alpha) = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Figure 8. Example diagram of solving trigonometric function values

图 8. 求解三角函数函数值的例题图

这道例题说明了诱导公式中的角 α 不仅可以是一个单角, 还可以是一个复角。与原来用诱导公式求解三角函数值的例题比, 这道题更能准确地测试出学生知识的掌握程度。同时, 新版教材增加了这一类型的相关习题, 从高中数学教学大纲中的教学目标来看, 不仅锻炼了学生整体把握、灵活运用知识解题的能力, 还培养了学生的整体数学思维, 提高了学生的数学运算素养。

2.3.2. 例习题难度比较

在鲍建生教授 2002 年建立的数学题综合难度模型的基础上, 王建磐、鲍建生于 2014 年根据青浦实验得出的数学认知水平框架对原模型进行了修正, 本研究所采用的研究工具即是修正后的难度模型[5]。修正后的难度因素表如下该模型难度因素和水平分类参见表 4。

Table 4. Horizontal division of comprehensive difficulty factors

表 4. 综合难度因素的水平划分

难度因素	水平			
背景	无实际背景	个人生活	公共常识	科学情境
数学认知	操作	概念	领会—说明	分析—探究
运算	无运算	数值计算	简单符号运算	复杂符号运算
推理	无推理	简单推理	复杂推理	
知识含量	一个知识点	两个知识点	多个知识点	

根据表 4, 对新旧教材的例题和习题数量进行了统计, 并利用

$$d_i = \frac{\sum_j n_{ij} d_{ij}}{n} \left(\sum_j n_{ij} = n; i = 1, 2, 3, 4, 5; j = 1, 2, \dots \right)$$

求出各难度因素的加权平均数得到下表 5。

Table 5. Quantitative indicators of trigonometric function examples in old and new textbooks
表 5. 新旧教材三角函数例题难度因素量化指标

难度因素	等级水平	题数		百分比		加权平均	
		新版	旧版	新版	旧版	新版	旧版
背景	无实际背景	213	247	90.00%	92.00%	1.20	1.15
	个人生活	12	11	5.00%	4.20%		
	公共常识	1	1	0.40%	0.40%		
	科学情境	11	9	4.60%	3.40%		
数学认知	操作	130	161	54.80%	60.20%	1.66	1.58
	概念	69	70	29.30%	26.20%		
	领会 - 说明	26	23	10.90%	8.70%		
	分析 - 探究	12	13	5.00%	4.90%		
运算	无运算	7	13	2.90%	4.90%	2.63	2.56
	数值运算	84	99	35.60%	37.10%		
	简单符号运算	136	147	57.30%	54.90%		
	复杂符号运算	10	8	4.20%	3.10%		
推理	无推理	116	152	48.90%	56.80%	1.57	1.49
	简单推理	107	102	45.20%	37.90%		
	复杂推理	14	14	5.90%	5.30%		
知识含量	一个知识点	159	196	66.90%	73.10%	1.40	1.33
	两个知识点	62	55	26.00%	20.50%		
	多个知识点	17	17	7.10%	6.40%		

将表格中各个因素的加权平均值进行整理分析, 从而得到表 6。

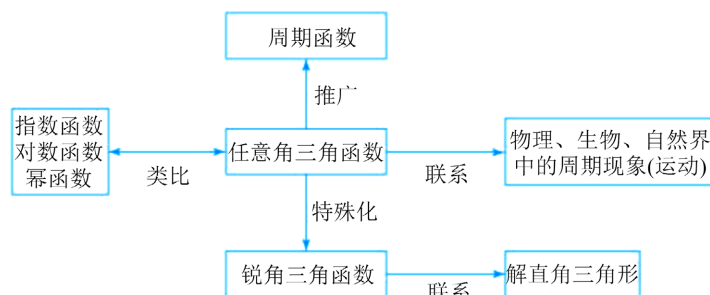
Table 6. Statistics of difficulty factors of trigonometric function example exercises in old and new textbooks
表 6. 新旧教材三角函数例习题难度因素统计表

教材版本	背景	数学认知	运算	推理	知识含量
新人教 A 版	1.20	1.66	2.63	1.57	1.40
旧人教 A 版	1.15	1.58	2.56	1.49	1.33

从表 6 可以看出, 这 5 个维度新教材的例习题略高于旧教材。从知识角度分析, 一是为了提升学生的直观想象素养, 将单位圆的性质与作用贯穿始终, 新教材在引入弧度制时就渗透了单位圆的概念。同时, 教师将单位圆贯穿于整个单元教学中, 简单明了的思想方法对于学生来说, 减轻了学生学习数学畏难的心理负担。二是在应用公式进行恒等变换的过程中与旧教材相比, 新教材的例习题渗透了观察、类比、推广、特殊化、化归等思想方法, 所以对于学生应用三角函数知识解决问题具有一定的挑战性。从教师角度来分析, 教师要鼓励学生使用信息技术画 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象, 教师通过操作和引导学生发现和理解知识的发生发展过程[6]。从学生角度分析, 为了加深对概念的理解以及运用知识的能力, 新教材在例习题的设置上, 不仅注重学生的问题解决能力, 还注重学生的实操能力。

2.4. 章末小结比较

章节小结位于教材章节内容的末尾,起到归纳整理、升华的作用,需要将一个章节学习的知识内容较短的篇幅内清晰明了的呈现出来,便于学生整理复习,查漏补缺。



请你带着下面的问题,复习一下全章内容吧!

1. 从本章的学习中可以看到,弧度制的引入为三角函数的研究奠定了基础,你能概况一下引入弧度制的必要性吗?

Figure 9. Summary of some chapters in the new edition of the textbook

图 9. 新版教材部分章末小结图

7. 三角函数是一类特殊的周期函数,在研究三角函数时,既可以联系物理、生物、自然界中的周期现象(运动),也可以从已学过的指数函数,对数函数、幂函数等得到启发,还要注意与锐角三角函数建立联系。这种关系可以用以下框图表示。

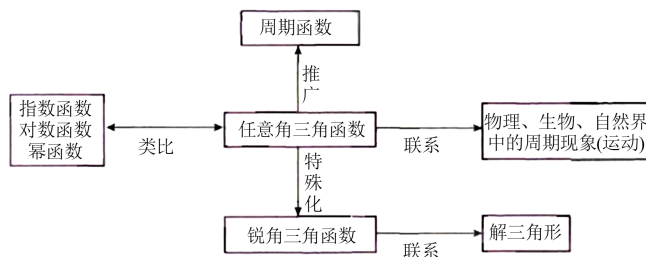


Figure 10. End-of-chapter summary of some textbooks in the old textbook

图 10. 旧版教材部分章末小结图

通过观察发现,章节小结不管是新教材还是旧教材都是两部分:章节知识结构、回顾与思考。不同的是,旧教材的回顾与思考是交错进行的,如图 9,而新教材回顾与思考是先梳理本章的知识点再单独提出思考题,如图 10,前者不利于学生总结归纳知识,而后者更能引导学生带着问题再复盘和加深所学知识。前三个问题是关于弧度制和三角函数性质的,属于对知识的深化理解;第四个问题希望学生自主思考三角函数公式的内在联系,绘制出属于自己的三角函数思维导图,引导学生自主概括知识要点;第五个问题与第六个问题鼓励学生自主探究三角函数的实际应用,用数学的眼光观察发现生活中存在的周期性问题,并用三角函数这样的数学思维来思考这种现象,最后建立三角函数有关的模型来表达生活中的周期现象。这六个问题与回顾的行文也存在着前后呼应的关系不仅考虑到了三角函数知识的主线,还考虑到了三角函数的实际应用以及容易忽视的细节,统筹兼顾了诸多因素。因此,新教材的复习内容更符合教学大纲的时间安排,对于教师来说,能准确把握复习重点,提高教学质量,同时,教师有目标、高效率的教学对于学生来说,能较快的突破重点和难点。

3. 总结

通过比较发现：新教材在内容编排结构上，可以帮助教师更好地引导学生建立知识间的内在联系，体现了以人为本的教育理念；新教材在数学文化融入上，可以帮助学生了解相关数学文化，体现了数学文化的人文思想；新教材在例习题数量和难度上，能帮助学生减轻学业负担；新教材在章末小结上，更有效地培养学生的数学核心素养。

参考文献

- [1] 安文华. 埋伏笔于情境化难点于无形——也谈“函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的性质与图象” [J]. 数学通报, 2022, 61(8): 30-32+45.
- [2] 沈春辉. 中法高中数学教材中的数学文化比较研究[D]: [硕士学位论文]. 上海: 华东师范大学, 2012: 101-110.
- [3] 王嵘. 数学文化融入中学教科书的内容与方法[J]. 数学教育学报, 2022, 31(1): 19-23.
- [4] 余庆纯, 汪晓勤. 基于数学史的数学文化内涵实证研究[J]. 数学教育学报, 2020, 29(3): 68-74.
- [5] 王建磐, 鲍建生. 高中数学教材中例题的综合难度的国际比较[J]. 全球教育展望, 2014, 43(8): 101-110.
- [6] 付钰, 张景斌. 中美数学教材三角函数习题的比较研究[J]. 数学教育学报, 2018, 27(3): 14-18.