

# 数学建模思想融入高校线性代数教学实践

刘熙娟, 刘云, 郭丽峰\*

塔里木大学信息工程学院, 新疆 阿拉尔

收稿日期: 2023年5月10日; 录用日期: 2023年7月6日; 发布日期: 2023年7月17日

## 摘要

在线性代数课堂教学中适当融入数学建模思想可以提高课堂教学效率, 能够使学生对线性代数知识点的理解更加深刻, 起到事半功倍的效果。论文首先对高校线性代数课堂教学中存在的主要问题进行了分析, 提出了数学建模思想在课堂教学过程中应注意的问题, 探讨了数学建模思想融入线性代数教学中的有效途径, 并进行了案例分析, 以期推动线性代数教学的改革。

## 关键词

线性代数, 数学建模思想, 教学改革

# The Application of Mathematical Modeling in the Teaching of Linear Algebra

Xijuan Liu, Yun Liu, Lifeng Guo\*

College of Information Engineering, Tarim University, Alar Xinjiang

Received: May 10<sup>th</sup>, 2023; accepted: Jul. 6<sup>th</sup>, 2023; published: Jul. 17<sup>th</sup>, 2023

## Abstract

The Application of Mathematical Modeling in linear algebra classroom teaching can improve the efficiency of classroom teaching, make students understand the knowledge of linear algebra more deeply, and achieve twice the result with half the effort. Firstly, the paper analyzes the main problems existing in the linear algebra classroom teaching, puts forward the problems that should be paid attention to in the teaching, discusses the effective ways of the mathematical modeling in the linear algebra teaching, and carries on the case analysis, in order to promote the reform of the linear algebra teaching.

\*通讯作者。

文章引用: 刘熙娟, 刘云, 郭丽峰. 数学建模思想融入高校线性代数教学实践[J]. 创新教育研究, 2023, 11(7): 1701-1706. DOI: 10.12677/ces.2023.117254

## Keywords

### Linear Algebra, Mathematical Modeling, Teaching Reform

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

半个多世纪以来,随着科学技术的发展,数学以空前的广度与深度向一切自然科学和社会科学领域渗透,以及电子计算机与信息技术的迅速发展,形成了一种普遍的、可以实现的关键技术——数学技术,成为当代高新技术的一个重要组成部分和突出标志,“高技术本质上是一种数学技术”的提法,已经得到越来越多人人们的认同。与此同时,时代发展和科技进步的大潮推动数学科学迅速进入了经济、人口、生物、医学、环境、地质等领域,一些交叉学科如计量经济学、人口控制论、生物数学、数学地质学等应运而生,为数学开拓了许多新的、广阔的用武之地[1]。

将数学建模思想引入数学教学过程,为数学和外部世界的联系提供了一种有效的方式,让学生能亲自参加将数学知识用于实际的尝试,参与发现和创造的过程,取得在传统课堂里和书本上无法获得的宝贵经验和切身感受,在知识、能力及素质等方面迅速成长。数学建模思想的推广,对数学教学体系、内容和方法改革起到了积极的推动作用,得到众多教育界人士和教师们的认可。将数学建模的思想和方法有机地融入大学数学主干课程中去的研究与实践已经起步,讲授数学建模课和数学主干课教师之间的不断交流,使得在教学上得以相互借鉴与促进。本文以现阶段线性代数教学课堂中的实际情况为出发点,对线性代数教学中应用数学建模思想进行研究,以培养学生的数学应用能力。

## 2. 当前线性代数教学中存在的主要问题

在 20 世纪中后期,线性代数的应用逐渐扩大到了越来越多的新领域,它在数学类课程中的地位已经上升到可与微积分相匹敌。线性代数的这种发展首先是由于人们所研究问题的规模越来越复杂,涉及的变量成百上千,对于这样复杂的问题,需要把变量之间的关系简化为线性才有可能求解。除了上述的“需求牵引”之外,线性代数发展的另一个动力是“技术推动”,那就是计算机技术的推动。几十年来计算机硬软件的飞速发展给线性代数的研究和教学提供了前所未有的空间和机遇,线性代数课程教学上的许多新面貌、新方法都来自于计算机技术的新发展。

高等数学、线性代数和概率论是目前高校设置的主要数学基础类学科,但在重视程度上,多数高校更重视高等数学的学习,表现在两方面:一是在课程设置上,线性代数的学时远远少于高等数学的学时,学习时间紧张导致在课堂教学中教师会减少部分结论的推导和实际应用背景的教学,学生对线性代数的学习时间不够导致理解得不够透彻;二是在难度设置上,线性代数的学习难度相较于其他数学类学科的难度要低得多,由于课程设置少导致学校不得不将该课程的难度系数降低。

传统数学教学主要以传授理论知识为主,虽然注重能力培养,但主要是解题能力,很少体现自学能力,分析解决实际问题的能力。传统的数学教育普遍存在着脱离实际,重理论,轻应用的倾向。这样的教学内容使学生感到的是数学的枯燥,远离生活实际,同时也使学生的创造性得不到充分发挥,不利于能力的培养。线性代数在教学中也面临着许多问题。一方面,学生经常反映课程内容抽象、概念太多、

计算繁琐,缺乏与以前所学数学知识的联系;低年级学生尚未完全摆脱应试教育影响,独立思考能力相对薄弱,对概念和定义的理解能力欠缺,直接导致学生不能系统理解和掌握课程知识;另一方面,线性代数的理论广泛地应用在科学、工程、经济、管理等众多领域中,历史文化内涵是极其丰富的,但是目前大部分线性代数教材都是以理论知识为主,教学内容更偏重于理论学习,实际应用方面涉及较少,导致许多学生对线性代数的学习兴趣日趋下降,在学习时只是单纯地为了应试,拿到课程学分,没有激发学生学习兴趣,学习动力不足,学习后劲缺乏,不能用线性代数解决实际生活或学习中遇到的问题[2]。

为了解决线性代数的教与学的困难,数学教育工作者做了大量的工作,包括教学内容的优化,教材的编写,教学方法的改进,现代教育技术的应用,等等。案例分析是数学建模教学的主要形式,也是线性代数教学的必由之路,精心选取并适时更新一些生动新颖、内涵丰富的案例,能够充分吸引学生浓厚的学习兴趣,有效的培养学生用数学知识解决实际问题的意识和能力,在线性代数教学时,教师可适当选择简单、直观并且与理论知识点对应的数学案例,激发学习者的好奇与兴趣,培养学习者的直觉与洞察力,以提高学生发现问题、解决实际问题的数学应用能力[3]。

### 3. 渗透数学建模思想需要注意的问题

数学建模是利用数学工具解决实际的重要手段,它不但是数学知识的应用和升华,也是数学思想的表达和教学方法,实际上数学中的基本概念、定理都是一个数学模型。因而,数学教学本质上来说就是数学模型的教学。在学习数学建模的过程中,与掌握一些建模方法、补充一些数学知识相比,更为重要、也是更为困难的是培养学生数学建模的意识和能力,在课堂教学中融入数学建模的思想和方法时,应注意如下几点。(1)模型的选题要大众化。应选择与学生联系密切,贴近生活,容易接受、且有趣味、数学建模内容。要讲清数学模型可以解决怎样的现实问题。(2)设计具有新意的例子,启发学生积极思考,循序渐进,发现规律。(3)在教学中案例分析应少而精,不能冲淡线性代数理论知识的学习。理论知识掌握不扎实,也谈不上什么应用。(4)应从实际问题出发,引导学生能够敏锐的发现日常生活或者学习中需要或者可以用数学工具解决的实际问题,并能够从建模的角度去积极思考、研究这些问题,鼓励学生观察、分析、概括、抽象出数学模型。(5)要循序渐进,由简单到复杂,逐步渗透,培养学生深入实际调查研究的决心与能力,从培养意识,提高能力的角度来学习数学知识,逐步训练学生用所学的数学建模知识解决现实生活中的问题。

### 4. 数学建模思想融入线性代数教学中的有效途径

线性代数当中存在着大量抽象复杂的数学概念、定理等数学知识,学生对该学科的认识就是过于抽象复杂,甚至很多学生认为这一课程当中根本不存在应用方面的知识。事实并非如此,教师应加强对这门课程当中实践应用知识的挖掘与应用,特别是和线性代数矩阵相关的内容,让学生升华思想认识,意识到数学理论无论如何抽象都是解决实际问题的根基,让学生的综合实践能力和理论应用能力得到培养。

线性代数很多章节中都可以引入实际案例,以完成案例为主线实现教学内容的讲授。在讲线性方程组时,引入交通流量的分析、化学方程的配平问题、平板稳态温度的计算等,当然对于不同专业的学生,可以有侧重点的选择与其专业有关的案例模型,管理专业的学生以生产总值问题和工资分配问题作为讲解案例;讲向量组线性相关性,药方配制问题作为实际案例完成教学内容,可以降低线性相关和极大无关组的抽象性;讲相似矩阵及矩阵对角化,可以引入人口流动的稳态状态问题,让学生体会相似矩阵的妙用。在授课时,针对不同专业的学生,线性代数的侧重点应有所不同。例如,可以为经济管理专业的学生多介绍一些投入产出模型、线性规划模型;可以为信息工程专业的学生多讲一些信息编码的案例。

在讲行列式时,引入四面体面积的计算、等差数列的证明、爱情行列式等。矩阵理论是解决许多实

际问题的重要工具，现已广泛应用于自然科学、工程技术、社会科学等许多领域。在实际工作中，将表面上没有联系的东西归结为矩阵问题后可以完全统一起来，并且使得情况变得更加简化。如在观测、导航、机器人的位移、化学分子结构的稳定性分析、密码通信、模糊识别、计算机层析及 x 射线照相术等方面都有广泛的应用。随着现代计算机的飞速发展，许多实际问题可以通过离散化的数值计算得到定量的解决，作为处理离散问题的线性代数和矩阵计算，成为从事科学研究和工程设计的科技人员必备的数学基础。此外，在讲特征值与特征向量引入生态系统的变化趋势；二次型及其标准型引入二次曲线和二次曲面类型的判定；正定二次型时引入多元函数极值的充分条件。通过建立模型不仅能够使学生加深对线性代数知识的理解，还能使学生在学习过程中提高自己的应用能力和观察能力。

## 5. 数学建模思想融入线性代数教学中的教学案例

投入产出模型是 20 世纪 30 年代由美国经济学家列昂捷夫首先提出的，它是一种利用数学方法研究和分析国民经济各部门(各类产品)生产与消耗之间的数量依存关系的数量经济分析方法。他通过编制投入产出表，运用矩阵和线性方程组的理论和方法，借助计算机的运算，来揭示国民经济各部门的内在联系。目前，投入产出法已成为许多部门、地区进行现代化管理的重要工具。下面通过一个简单的例子，讨论价值型投入产出模型[4]。

某地区有三个重要产业，一个煤矿、一个发电厂和一条地方铁路。开采 1 元钱的煤，需消耗 0.25 元的电费及 0.35 元的运输费。生产 1 元钱的电，需消耗 0.40 元的煤费，0.05 元的电费及 0.10 元的运输费，而提供 1 元钱的铁路运输服务，需消耗 0.45 元的煤费，0.10 元的电费及 0.10 元的运输费，在某一周内，除了这三个企业间的彼此需求，煤矿接到 50000 元的订货，发电厂接到 25000 元的电量供应要求，而铁路得到 30000 元的运输需求，试问：这三个企业在这一周内各应生产多少产值才能满足自身及外界的需求？除了外部需求，试求这周内各企业之间的消耗需求，同时求出各企业新创造的价值。

(1) 实际问题分析。这是一个投入产出分析问题，由已知得到价值型投入产出表如表 1 所示：

**Table 1.** Input-output analysis

**表 1.** 投入产出分析表

	消耗部门			外界需求	总产出	
	煤矿	电厂	铁路			
生产部门	煤矿	0	0.40	0.45	50000	$x_1$
	电厂	0.25	0.05	0.10	25000	$x_2$
	铁路	0.35	0.10	0.10	30000	$x_3$
新创造价值		$z_1$	$z_2$	$z_3$		

(2) 模型建立。设  $x_1, x_2, x_3$  分别为煤矿、电厂、铁路本周内生产总值，则

$$\begin{cases} x_1 - (0 \cdot x_1 + 0.4x_2 + 0.45x_3) = 50000, \\ x_2 - (0.25x_1 + 0.05x_2 + 0.10x_3) = 25000, \\ x_3 - (0.35x_1 + 0.10x_2 + 0.10x_3) = 30000. \end{cases}$$

分配平衡方程组反映了各企业的产品按其经济用途的使用分配情况。

(3) 模型求解。记产出向量  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ ，需求向量  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 50000 \\ 25000 \\ 30000 \end{bmatrix}$ ，直接消耗系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.40 & 0.45 \\ 0.25 & 0.05 & 0.10 \\ 0.35 & 0.10 & 0.10 \end{bmatrix},$$

则原方程组可改写为  $(E - A)x = y$ ，由此可解得

$$x = (E - A)^{-1} y = \begin{bmatrix} 114458 \\ 65395 \\ 85111 \end{bmatrix},$$

如果部门较多向量维数较高时，可借助计算机求近似解。由  $x_{ij} = a_{ij}x_j$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ )，取

$$x_1 = 114458, x_2 = 65395, x_3 = 85111,$$

可计算得各部门的流量矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 26158 & 38300 \\ 28614 & 3270 & 8511 \\ 40060 & 6540 & 8511 \end{bmatrix},$$

又投入产出矩阵为

$$B = \text{Adiag}(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0.40x_2 & 0.45x_3 \\ 0.25x_1 & 0.05x_2 & 0.10x_3 \\ 0.35x_1 & 0.10x_2 & 0.10x_3 \end{bmatrix},$$

总投入列向量为  $D = (1, 1, 1)$   $B = (0.60x_1, 0.55x_2, 0.65x_3) = (68674, 35968, 55322)$ ，

因而新创造价值向量为

$$z = x - D^T = \begin{bmatrix} 45783 \\ 29428 \\ 29789 \end{bmatrix}.$$

由此可得这三个企业的投入产出分析表如表 2 所示：

**Table 2.** Input-output calculation results

**表 2.** 投入产出计算结果

	消耗部门			外界需求	总产出	
	煤矿	电厂	铁路			
生产部门	煤矿	0	26158	38300	5000	114458
	电厂	28614	3270	3270	2500	65395
	铁路	40060	6540	6540	3000	85111
新创造价值		45784	29427	29427		
总投入		68674	35968	35968		

(4) 模型分析。线性方程组是线性代数的最主要任务之一，此类问题在科学技术和经济管理领域有着相当广泛的应用。投入产出模型是一种进行综合平衡的经济数学模型，是研究一个经济系统各部分见投入和产出平衡关系的线性模型。投入产出模型主要有一个经济系统各部门的投入平衡方程和产出平衡方

程组成,通过投入产出比表来反映经济系统中各部门之间的数量依存关系。这种给抽象的数学问题赋予实际意义的做法,使学生认识到数学既源于生活、又高于生活,缩小了“形式化”的抽象数学与现实之间的差距。

## 6. 结论

对线性代数教学中存在的问题以及通过引入模型进行研究,同时在应用数学模型解决线性代数教学问题时还应注意实际问题的应用,同时还应通过布置适当的作业,加深学生对课上内容的理解。通过建立模型不仅能够使学生对数学知识加深理解,还能使学生在学习过程中提高自己的应用能力和观察能力。

## 基金项目

塔里木大学一流课程(TDYLK202229)。

## 参考文献

- [1] 姜启源. 数学模型[M]. 北京: 高等教育出版社, 2018.
- [2] 沈雁. 线性代数教学中直观性应用的实践与思考[J]. 数学教育学报, 2010, 19(6): 86-88.
- [3] 陈绍刚, 黄廷祝, 黄家琳. 大学数学教学过程中数学建模意识与方法的培养[J]. 中国大学教学, 2010(12): 44-46.
- [4] 艾玲, 沙萍, 林洪娟. 线性代数[M]. 北京: 机械工业出版社, 2012.