

Balance Control of a 4-DOF Underactuated Gymnastic Robot Based on LQR

Dasheng Liu, Guozheng Yan

Department of Instrument Science and Engineering, School of Electronic Information and Electrical Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai
Email: dsliu@sjtu.edu.cn

Received: Oct. 8th, 2016; accepted: Oct. 26th, 2016; published: Oct. 31st, 2016

Copyright © 2016 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

The 4-DOF underactuated gymnastic robot is a complex control system which is multivariable, nonlinear and strong coupling. In this paper, according to the system of this kind of robot, the dynamic equation of rigid body is established firstly by using Lagrange method. Secondly, a linearization method for nonlinear robot mathematical model in the vicinity of vertical inverted equilibrium point is discussed. Then, a Linear Quadratic Regulator (LQR) is used to design the optimal controller of the handstand balance. Finally, some simulation results show the effectiveness of the proposed method.

Keywords

Gymnastic Robot, Underactuated System, Balance Control, LQR, Handstand Stability

基于LQR的4关节欠驱动体操机器人平衡控制

刘大生, 颜国正

上海交通大学电子信息与电气工程学院仪器科学与工程系, 上海
Email: dsliu@sjtu.edu.cn

收稿日期: 2016年10月8日; 录用日期: 2016年10月26日; 发布日期: 2016年10月31日

摘要

4关节欠驱动体操机器人是一个多变量、非线性、强耦合的复杂控制系统。本文针对该类机器人系统, 首先利用拉格朗日法建立了其刚体动力学方程, 然后探讨了非线性机器人数学模型在垂直倒立平衡点附

近的线性化方法,接着采用了线性二次型调节器(LQR)对体操机器人进行了倒立平衡最优控制器的设计,最后通过仿真实验验证了提出方法的有效性。

关键词

体操机器人, 欠驱动系统, 平衡控制, LQR, 倒立稳定

1. 引言

生物力学研究表明,人类和其它生物的运动之所以自然、优美、高效,原因是人类和生物极善于利用躯体各部分的动力耦合来实现运动能量的传递,达到整个机体的高度协调。因此,对基于动力学耦合驱动原理的欠驱动机器人展开研究,将会促进机器人从呆板机械的运动向接近人体或生物的动力协调运动发展。由于欠驱动系统的高度非线性、参数摄动、多目标控制要求及控制量受限等原因,系统的动特性显得非常复杂,其一般力学特性,包括其固有运动在内,理论解析上还很不明确[1]。作为欠驱动机器人家族中的一员,单杠体操机器人可以简化成由一个被动关节和多个主动关节组成的欠驱动连杆系统模型。近年来,国内外相继报道了许多以该类机器人为对象的研究成果[2]-[8]。

在国内外早期关于体操机器人的研究中,大都采用 Acrobot 的欠驱动两关节体操机器人模型[9] [10] [11]。Acrobot 是一种具有 2 个自由度和 1 个主动关节的两关节机器人,它能简单的模拟体操运动员在单杠上的摆起、倒立、大回环等体操动作,其第一个关节是非驱动的,模拟了体操运动员的腕关节,第二个关节是驱动的,模拟了体操运动员的髋关节。随着研究的深入,目前较多采用的是三关节体操机器人模型,它具有 3 个自由度和 2 个主动关节,其中肩关节和髋关节为主动关节,腕关节为被动关节,是一种典型的欠驱动机器人[8] [12]。该机器人可以有效地模拟体操运动员肩关节和髋关节的主动控制作用,相比于 Acrobot,三杆体操机器人具有更强的非线性和耦合性,其控制具有高度的复杂性和非线性,可用于检验控制理论和控制方法在类似复杂控制系统的有效性[13] [14] [15]。

四关节欠驱动体操机器人具有 4 个自由度和 3 个主动关节可有效模拟运动员的肩关节、髋关节和膝关节的主动控制作用。膝关节的加入使得单杠体操机器人能做出更加复杂的体操动作,因此,四关节单杠体操机器人能更好地反映真实体操运动员的肢体运动,当然,这类机器人也具有更复杂的非线性特性,目前国内外尚鲜有相关研究成果报道。4 关节单杠体操机器人的运动控制研究,对于进一步实现更逼真的类人体操机器人具有重要的意义。本文以 4 关节体操机器人在单杠上倒立稳定运动作为控制目标,提出了一种采用 LQR 的平衡控制方法。

2. 动力学分析与建模

2.1. 物理模型

四关节体操机器人能够被抽象为一个如图 1 所示的由 4 节连杆、4 个关节连接构成的刚体。第 i ($i=1,2,3,4$) 个连杆分别定义为机器人的手臂、躯干、大腿和小腿,第 i ($i=1,2,3,4$) 个关节分别对应为腕关节、肩关节、髋关节及膝关节。 l_i , a_i , m_i , I_i 分别定义为第 i ($i=1,2,3,4$) 个连杆的长度、质心-轴心距、质量以及以质心为转轴时的转动惯量, q_i 为第 i ($i=1,2,3,4$) 个关节的角度,角度的正方向为逆时针方向。

4 关节欠驱动体操机器人,腕部的旋转为完全不受限的旋转,转角范围 $0^\circ \sim 360^\circ$,肩关节、髋关节和膝关节不能做完整的旋转。采用拉格朗日力学的方法建立体操机器人的动力学模型,拉格朗日运动方程式为:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad (k=1,2,3,4) \quad (1)$$

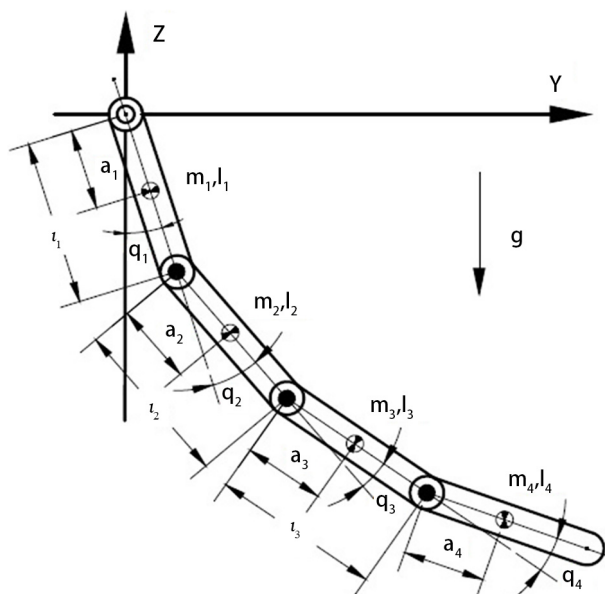


Figure 1. Physical model of four-link gymnastic robots
图 1. 四关节体操机器人物理模型

式中, L 为拉格朗日算子; q_k 为系统的广义坐标; Q_k 称为系统的广义外力。求解拉格朗日算子, 可得到 4 关节欠驱动体操机器人的动力学模型:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) = u \quad (2)$$

式中,

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

其中, $M(q)$ 称为惯性矩阵, 是对阵正定矩阵, $C(q, \dot{q})$ 是离心力矩阵, $G(q)$ 表示加在机器人上的重力项。 $M_{i,j}, C_i, G_i (i=1,2,3,4; j=1,2,3,4)$ 的表达式见附录。

另外, 由于在广义坐标 q_1 上无外力作用, 则下式成立:

$$u_1 \equiv M_{11}\ddot{q}_1 + M_{12}\ddot{q}_2 + M_{13}\ddot{q}_3 + M_{14}\ddot{q}_4 = 0 \quad (3)$$

因此, 4 关节欠驱动机器人是典型的多输入(u_2, u_3, u_4)多输出(q_1, q_2, q_3, q_4)的非线性多变量系统, 在系统的各变量间存在有较强的耦合作用。

2.2. 倒立平衡点附近状态空间模型推导

4 关节欠驱动体操机器人的平衡是把机器人稳定在垂直倒立的不稳定平衡区。虽然体操机器人在整个运动范围内是非线性的, 但在其垂直向上的平衡点附近, 体操机器人的动力学模型可以采用线性化的近似模型来表示。

由方程式(2)可以推导出:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -M^{-1}(q)(C(q, \dot{q}) + G(q)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}(q)E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中, $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ 。

定义状态变量 x 如下:

$$x = [q_1, q_2, q_3, q_4, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{q}_4]^T \quad (5)$$

则可以将式(4)写成:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (6)$$

机器人在垂直向上的倒立位置时, $q_1 = \pi, q_2 = 0, q_3 = 0, q_4 = 0, \dot{q}_1 = 0, \dot{q}_2 = 0, \dot{q}_3 = 0, \dot{q}_4 = 0$, 则可定义 $x_0 = [\pi, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ 。在倒立平衡点 x 附近对系统进行线性化处理, 可得到体操机器人系统的状态空间描述为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du. \end{cases} \quad (7)$$

式中, $x = x - x_0$, $A = \frac{\partial}{\partial x}(f(x) + g(x)u) \Big|_{x=x_0, u=0}$, $B = g(x) \Big|_{x=x_0}$, $C = [I_4, 0_{4 \times 4}]$, $D = 0_{4 \times 3}$ 。

3. 倒立平衡控制

体操机器人倒立稳定控制的目标就是控制机器人在垂直向上不稳定平衡点附近达到并保持倒立状态, 但该过程是一个动态平衡, 因为机器人在平衡位置是不稳定的, 因此需要设计一个平衡控制器才能实现这一目标。

LQR(Linear Quadratic Regulator)即线性二次型调节器可得到状态线性反馈的最优控制规律, 易于构成闭环最优控制。由式(7)的状态方程 $\dot{x} = Ax + Bu$ 确定最佳控制向量

$$u = -Kx(t) \quad (8)$$

的反馈矩阵 K , 使得下述二次型性能指标最小

$$J = \int_0^{\infty} (x^T R x + u^T Q u) dt \quad (9)$$

式(8)中, $K = R^{-1} B^T P$, 其中, 对称矩阵 P 为式(10)所示的定常黎卡提(Ricatti)矩阵微分方程

$$A^T P + PA - PBR^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (10)$$

的唯一正定解。此外, 矩阵 Q 和 R 为加权矩阵, 其确定了误差和能量损耗的重要性。

4. 数值仿真

为了验证 LQR 平衡控制器的控制效果, 使用 MATLAB 进行仿真。体操机器人模型参数设置如表 1 所示。

基于表 1 的机器人模型参数, 由式(7)可求得机器人线性化系统的矩阵 A , B 如下:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 19.377 & -65.889 & 4.418 & -0.540 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -20.973 & 156.53 & -22.105 & 2.702 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.15 & -122.053 & 83.828 & -29.954 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.727 & 41.294 & -86.949 & 87.271 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.568 & 0.397 & -0.134 \\ 1.317 & -1.261 & 0.672 \\ -1.261 & 3.209 & -4.130 \\ 0.672 & -4.130 & 8.789 \end{bmatrix}.$$

将求得的系统矩阵 A , B 代入式(10)中, 选取 $Q = \text{diag}(100, 100, 100, 100, 10, 10, 10, 10)$, $R = \text{diag}(1, 1, 1)$, 可得到状态反馈增益矩阵 K 为

$$K = \begin{bmatrix} -6660.115 & -3162.570 & -730.879 & -195.622 & -2318.924 & -1229.864 & -309.421 & -86.520 \\ -3806.982 & -1987.326 & -369.859 & -98.912 & -1329.662 & -717.111 & -170.787 & -47.180 \\ -1415.941 & -741.380 & -162.873 & -15.672 & -495.431 & -268.334 & -66.536 & -14.317 \end{bmatrix}$$

假设系统初始状态分别取下式(11)所示的值,

$$\begin{cases} \text{Case 1: } x_0 = [-3.14, 0.015, -0.02, 0.01, 0.001, -0.001, 0.001, -0.015], \\ \text{Case 2: } x_0 = [3.13, -0.01, 0.01, -0.01, 0.02, -0.01, 0.005, -0.015]. \end{cases} \quad (11)$$

利用求得的 LQR 控制器参数, 仿真可以得到图 1~6 所示的机器人倒立稳定的仿真曲线, 其中, 图 1~3

Table 1. Model parameters of gymnastic robots

表 1. 体操机器人模型参数

	第 1 杆	第 2 杆	第 3 杆	第 4 杆
m_i [kg]	6.87	33.57	14.07	7.54
I_i [kg·m ²]	0.205	1.61	0.173	0.164
l_i [m]	0.548	0.601	0.374	0.362
a_i [m]	0.239	0.337	0.151	0.227

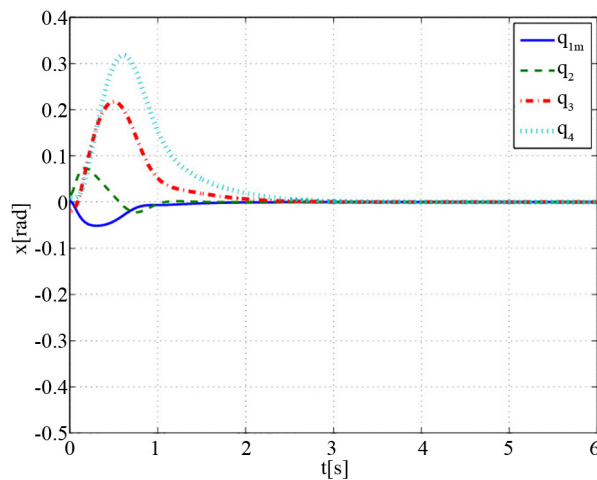


Figure 2. Angular variation of balance control (Case 1)

图 2. 平衡控制的角度变化(Case 1)

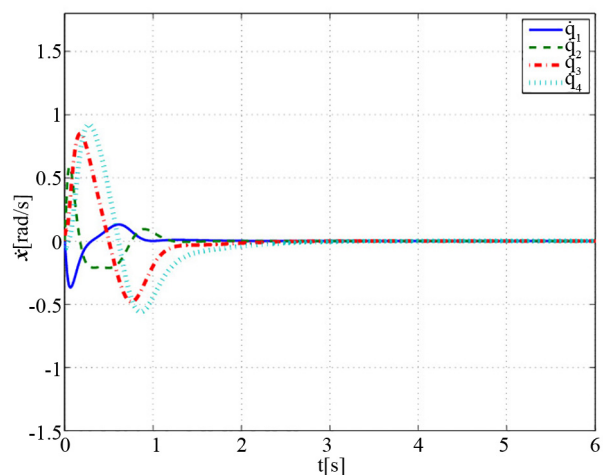


Figure 3. Angular velocity variation of balance control (Case 1)
图 3. 平衡控制的角速度变化(Case 1)

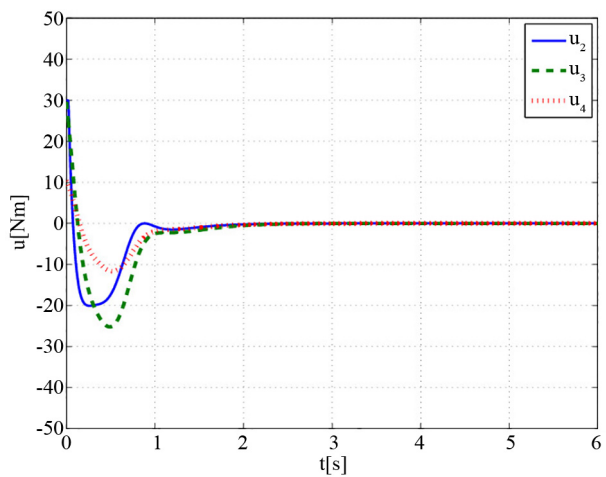


Figure 4. Torque variation of balance control (Case 1)
图 4. 平衡控制的力矩变化(Case 1)

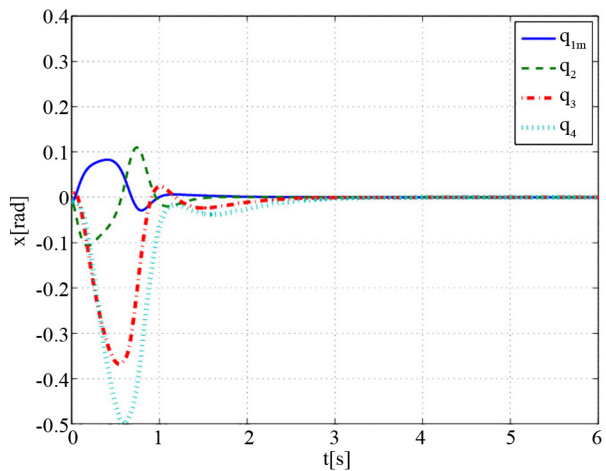


Figure 5. Angular variation of balance control (Case 2)
图 5. 平衡控制的角度变化(Case 2)

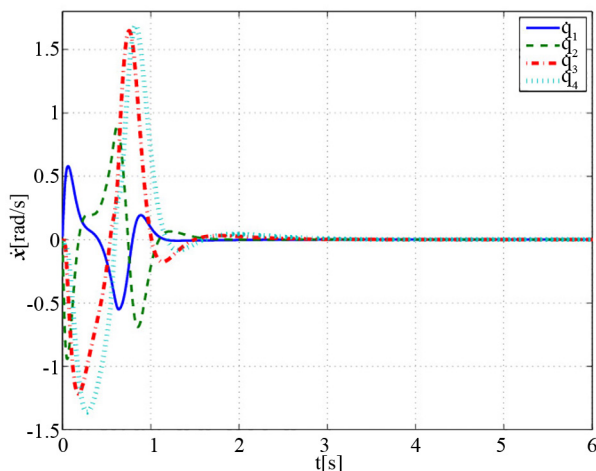


Figure 6. Angular velocity variation of balance control (Case 2)
图 6. 平衡控制的角速度变化(Case 2)

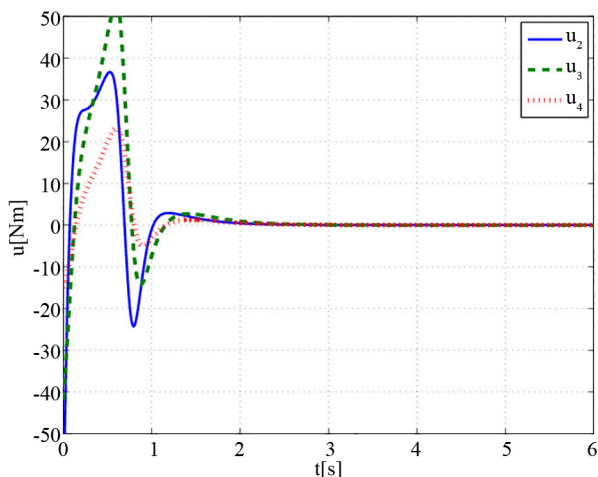


Figure 7. Torque variation of balance control (Case 2)
图 7. 平衡控制的力矩变化(Case 2)

为取式(11)中的 Case 1 所示的初始状态所得到的响应曲线, 图 4~6 为取式(11)中的 Case 2 的初始状态所得到的响应曲线。图 1 和图 4 分别显示两种状态下的 4 个关节角度 ($q_1 - \pi, q_2, q_3, q_4$) 的变化曲线, 图 2 和图 5 分别为 4 个关节角速度 ($\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{q}_4$) 的变化曲线, 而 3 个主动关节的控制力矩 (u_2, u_3, u_4) 的变化曲线分别如图 3、图 6、图 7 所示。仿真结果表明, 机器人即使在不同的初始条件下, 不改变控制器参数, 基于 LQR 的控制器仍然能够使系统达到倒立稳定。

5. 结束语

本文在分析并建立四关节欠驱动单杠体操机器人的数学模型及其在倒立平衡点附近线性化方法的基础上, 基于 LQR 设计了一种控制器以实现对该机器人直体倒立的稳定控制, 仿真实验验证了该控制方法的有效性。本文的工作为下一步实现四关节单杠体操机器人更加复杂的运动动作控制奠定了基础。

基金项目

教育部留学回国人员科研启动基金项目, 上海交通大学新进青年教师启动计划基金项目。

参考文献 (References)

- [1] Spong, M.W. (1995) The Swing Up Control Problem For The Acrobot. *IEEE Control Systems*, **15**, 49-55. <http://dx.doi.org/10.1109/37.341864>
- [2] She, J.-H., Lai, X.-Z., Xin, X. and Guo, L.-L. (2010) A Rewinding Approach to Motion Planning for Acrobot Based on Virtual Friction. 2010 *IEEE International Conference on Industrial Technology (ICIT)*, Vi a del Mar, 14-17 March 2010, 471-476.
- [3] Xin, X. and Yamasaki, T. (2012) Energy-Based Swing-Up Control for a Remotely Driven Acrobot: Theoretical and Experimental Results. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, **20**, 1048-1056. <http://dx.doi.org/10.1109/TCST.2011.2159220>
- [4] 曹胜强, 赖旭芝, 吴敏. 基于平面 Acrobot 轨迹特性的运动控制方法[C]//中国科学技术大学. 第31届中国控制会议论文集. 合肥: 中国学术期刊电子杂志出版社, 2012: 49010-4915.
- [5] Van Heerden, K., Fujimoto, Y. and Kawamura, A. (2014) A Combination of Particle Swarm Optimization and Model Predictive Control on Graphics Hardware for Real-Time Trajectory Planning of the Under-Actuated Nonlinear Acrobot. 2014 *IEEE 13th International Workshop on Advanced Motion Control (AMC)*, Yokohama, 14-16 March 2014, 464-469.
- [6] Henmi, T., Chujo, M., Ohta, Y. and Deng, M.C. (2014) Reproduction of Swing-Up and Giant Swing Motion of Acrobot Based on a Technique of the Horizontal Bar Gymnast. 2014 *11th World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA)*, Shenyang, 29 June-4 July 2014, 2613-2618.
- [7] Liu, D., Yan, G. and Yamaura, H. (2014) Dynamic Delayed Feedback Control for Stabilizing the Giant Swing Motions of an Underactuated Three-Link Gymnastic Robot. *Nonlinear Dynamics*, **78**, 147-161. <http://dx.doi.org/10.1007/s11071-014-1428-8>
- [8] Zhang, A.C., Lai, X.Z., Wu, M. and She, J.H. (2015) Global Stabilization of Underactuated Spring-Coupled Three-Link Horizontal Manipulator Using Position Measurements Only. *Applied Mathematical Modelling*, **39**, 1917-1928. <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2014.10.010>
- [9] 赖旭芝, 黄灿. 体操机器人控制的李雅普诺夫方法[J]. 计算技术与自动化, 2004, 23(2): 4-7.
- [10] Smith, M.H., Tiehua, Z. and Gruver, W.A. (1998) Dynamic Fuzzy Control and System Stability for the Acrobot. *Fuzzy Systems Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on IEEE World Congress on Computational Intelligence*, Anchorage, 4-9 May 1998, 286-291. <http://dx.doi.org/10.1109/fuzzy.1998.687499>
- [11] Michitsuji, Y., Sato, H. and Yamakita, M. (2001) Giant Swing via Forward Upward Circling of the Acrobat-Robot. *Proceedings of the 2001 American Control Conference*, Arlington, 25-27 June 2001, 3262-3267. <http://dx.doi.org/10.1109/ACC.2001.946425>
- [12] Xin, X. and Kaneda, M. (2007) Swing-Up Control for a 3-DOF Gymnastic Robot with Passive First Joint: Design and Analysis. *IEEE Transactions on Robotics*, **23**, 1277-1285. <http://dx.doi.org/10.1109/TRO.2007.909805>
- [13] 李祖枢, 张华, 古建功, 等. 3 关节单杠体操机器人的动力学参数辨识[J]. 控制理论与应用, 2008, 25(2): 242-246.
- [14] 薛方正, 厚之成, 李祖枢. 一类三关节体操机器人的类等效建模[J]. 控制与决策, 2012, 27(2): 308-312.
- [15] Lai, X.Z., Zhang, A.C., Wu, M. and She, J.H. (2015) Singularity-avoiding Swing-Up Control for Underactuated Three-Link Gymnast Robot Using Virtual Coupling between Control Torques. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **25**, 207-221. <http://dx.doi.org/10.1002/rnc.3082>

附录

$$\begin{aligned}
M_{11} = & m_2 (2a_2 l_1 \cos(q_2) + a_2^2 + l_1^2) + m_3 \{2a_3 l_1 \cos(q_2 + q_3) + 2a_3 l_2 \cos(q_3) \\
& + a_3^2 + 2l_1 l_2 \cos(q_2) + l_1^2 + l_2^2\} + m_4 \{2a_4 l_1 \cos(q_2 + q_3 + q_4) \\
& + 2a_4 l_2 \cos(q_3 + q_4) + 2a_4 l_3 \cos(q_4) + a_4^2 + 2l_1 l_2 \cos(q_2) \\
& + 2l_1 l_3 \cos(q_2 + q_3) + 2l_2 l_3 \cos(q_3) + l_1^2 + l_2^2 + l_3^2\} + a_1^2 m_1 + i_1 + i_2 + i_3 + i_4
\end{aligned} ;$$

$$\begin{aligned}
M_{12} = & m_2 (a_2 l_1 \cos(q_2) + a_2^2) + m_3 \{a_3 l_1 \cos(q_2 + q_3) + 2a_3 l_2 \cos(q_3) \\
& + a_3^2 + l_1 l_2 \cos(q_2) + l_2^2\} + m_4 \{a_4 l_1 \cos(q_2 + q_3 + q_4) \\
& + 2a_4 l_2 \cos(q_3 + q_4) + 2a_4 l_3 \cos(q_4) + a_4^2 + l_1 l_2 \cos(q_2) \\
& + l_1 l_3 \cos(q_2 + q_3) + 2l_2 l_3 \cos(q_3) + l_2^2 + l_3^2\} + i_2 + i_3 + i_4
\end{aligned} ;$$

$$\begin{aligned}
M_{13} = & m_3 (a_3 l_1 \cos(q_2 + q_3) + a_3 l_2 \cos(q_3) + a_3^2) + m_4 \{a_4 l_1 \cos(q_2 + q_3 + q_4) \\
& + a_4 l_2 \cos(q_3 + q_4) + 2a_4 l_3 \cos(q_4) + a_4^2 + l_1 l_3 \cos(q_2 + q_3) \\
& + l_3 (l_2 \cos(q_3) + l_3)\} + i_3 + i_4
\end{aligned} ;$$

$$M_{14} = m_4 (a_4 l_1 \cos(q_2 + q_3 + q_4) + a_4 l_2 \cos(q_3 + q_4) + a_4 l_3 \cos(q_4) + a_4^2) + i_4 ;$$

$$M_{21} = M_{12} ;$$

$$\begin{aligned}
M_{22} = & m_3 (2a_3 l_2 \cos(q_3) + a_3^2 + l_2^2) + m_4 \{2a_4 l_2 \cos(q_3 + q_4) + 2a_4 l_3 \cos(q_4) \\
& + a_4^2 + 2l_2 l_3 \cos(q_3) + l_2^2 + l_3^2\} + a_2^2 m_2 + i_2 + i_3 + i_4
\end{aligned} ;$$

$$\begin{aligned}
M_{23} = & m_3 (a_3 l_2 \cos(q_3) + a_3^2) + m_4 \{a_4 l_2 \cos(q_3 + q_4) \\
& + 2a_4 l_3 \cos(q_4) + a_4^2 + l_2 l_3 \cos(q_3) + l_3^2\} + i_3 + i_4
\end{aligned}$$

$$M_{24} = m_4 (a_4 l_2 \cos(q_3 + q_4) + a_4 l_3 \cos(q_4) + a_4^2) + i_4 ;$$

$$M_{31} = M_{13} ;$$

$$M_{32} = M_{23} ;$$

$$M_{33} = m_4 (2a_4 l_3 \cos(q_4) + a_4^2 + l_3^2) + a_3^2 m_3 + i_3 + i_4 ;$$

$$M_{34} = m_4 (a_4 l_3 \cos(q_4) + a_4^2) + i_4 ;$$

$$M_{41} = M_{14} ;$$

$$M_{42} = M_{24} ;$$

$$M_{43} = M_{34} ;$$

$$M_{44} = a_4^2 m_4 + i_4 ;$$

$$\begin{aligned}
C_1 = & m_3 \{-a_3 l_2 \dot{q}_3 (2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + \dot{q}_3) \sin(q_3) - a_3 l_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \sin(q_2 + q_3) \\
& - l_1 l_2 \dot{q}_2 (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin(q_2)\} - a_2 l_1 m_2 \dot{q}_2 (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin(q_2) \\
& + m_4 \{-a_4 l_3 \dot{q}_4 (2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + \dot{q}_4) \sin(q_4) \\
& - a_4 l_2 (\dot{q}_3 + \dot{q}_4) (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) \sin(q_3 + q_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -a_4 l_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) \sin(q_2 + q_3 + q_4) \\
& + l_2 l_3 \dot{q}_3^2 (-\sin(q_3)) - 2l_2 l_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \dot{q}_3 \sin(q_3) - l_1 l_2 \dot{q}_2 (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin(q_2); \\
& -l_1 l_3 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \sin(q_2 + q_3) \} \\
C_2 = & a_2 l_1 m_2 \dot{q}_1^2 \sin(q_2) + m_3 \{ a_3 l_1 \dot{q}_1^2 \sin(q_2 + q_3) - 2a_3 l_2 \dot{q}_3 \dot{q}_1 \sin(q_3) - a_3 l_2 \dot{q}_3^2 \sin(q_3) \\
& - 2a_3 l_2 \dot{q}_2 \dot{q}_3 \sin(q_3) + l_1 l_2 \dot{q}_1^2 \sin(q_2) \} + m_4 \{ a_4 l_1 \dot{q}_1^2 \sin(q_2 + q_3 + q_4) \\
& - 2a_4 l_3 \dot{q}_4 \dot{q}_1 \sin(q_4) - 2a_4 l_2 \dot{q}_3 \dot{q}_1 \sin(q_3 + q_4) - 2a_4 l_2 \dot{q}_4 \dot{q}_1 \sin(q_3 + q_4) \\
& - a_4 l_3 \dot{q}_4^2 \sin(q_4) - 2a_4 l_3 \dot{q}_2 \dot{q}_4 \sin(q_4) - 2a_4 l_3 \dot{q}_3 \dot{q}_4 \sin(q_4) - a_4 l_2 \dot{q}_3^2 \sin(q_3 + q_4); \\
& - a_4 l_2 \dot{q}_4^2 \sin(q_3 + q_4) - 2a_4 l_2 \dot{q}_2 \dot{q}_3 \sin(q_3 + q_4) - 2a_4 l_2 \dot{q}_2 \dot{q}_4 \sin(q_3 + q_4) \\
& - 2a_4 l_2 \dot{q}_3 \dot{q}_4 \sin(q_3 + q_4) + l_1 l_2 \dot{q}_1^2 \sin(q_2) + l_1 l_3 \dot{q}_1^2 \sin(q_2 + q_3) \\
& - 2l_2 l_3 \dot{q}_3 \dot{q}_1 \sin(q_3) - l_2 l_3 \dot{q}_3^2 \sin(q_3) - 2l_2 l_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3 \sin(q_3) \} \\
C_3 = & m_3 \{ a_3 l_1 \dot{q}_1^2 \sin(q_2 + q_3) + a_3 l_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \sin(q_3) \} \\
& + m_4 \{ a_4 l_1 \dot{q}_1^2 \sin(q_2 + q_3 + q_4) - 2a_4 l_3 \dot{q}_4 \dot{q}_1 \sin(q_4) \\
& + a_4 l_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \sin(q_3 + q_4) - a_4 l_3 \dot{q}_4^2 \sin(q_4) \quad ; \\
& - 2a_4 l_3 \dot{q}_2 \dot{q}_4 \sin(q_4) - 2a_4 l_3 \dot{q}_3 \dot{q}_4 \sin(q_4) + l_1 l_3 \dot{q}_1^2 \sin(q_2 + q_3) \\
& + l_2 l_3 \dot{q}_1^2 \sin(q_3) + 2l_2 l_3 \dot{q}_2 \dot{q}_1 \sin(q_3) + l_2 l_3 \dot{q}_2^2 \sin(q_3) \} \\
C_4 = & m_4 \{ a_4 l_1 \dot{q}_1^2 \sin(q_2 + q_3 + q_4) + a_4 l_3 \dot{q}_1^2 \sin(q_4) \\
& + 2a_4 l_3 \dot{q}_2 \dot{q}_1 \sin(q_4) + 2a_4 l_3 \dot{q}_3 \dot{q}_1 \sin(q_4) \\
& + a_4 l_3 \dot{q}_2^2 \sin(q_4) + a_4 l_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \sin(q_3 + q_4) \}; \\
& + a_4 l_3 \dot{q}_3^2 \sin(q_4) + 2a_4 l_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3 \sin(q_4) \} \\
G_1 = & g \{ m_2 (a_2 \sin(q_1 + q_2) + l_1 \sin(q_1)) \\
& + m_3 (a_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3) + l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2)) \}; \\
& + m_4 (a_4 \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) + l_1 \sin(q_1) \\
& + l_2 \sin(q_1 + q_2) + l_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3)) + a_1 m_1 \sin(q_1) \} \\
G_2 = & g \{ m_3 (a_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3) + l_2 \sin(q_1 + q_2)) \\
& + m_4 (a_4 \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) + l_2 \sin(q_1 + q_2) \\
& + l_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3)) + a_2 m_2 \sin(q_1 + q_2) \} \\
G_3 = & g \{ m_4 (a_4 \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) + l_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3)) + a_3 m_3 \sin(q_1 + q_2 + q_3) \}; \\
G_4 = & a_4 g m_4 \sin(q_1 + q_2 + q_3 + q_4).
\end{aligned}$$

期刊投稿者将享受如下服务：

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：dsc@hanspub.org