

# 一种LMI建筑结构振动控制算法

黄炳达, 葛楠, 王永

华北理工大学建筑工程学院, 河北 唐山  
Email: huangbingda@foxmail.com

收稿日期: 2020年10月1日; 录用日期: 2020年10月9日; 发布日期: 2020年10月26日

## 摘要

由于 $H_\infty$ 控制器中Riccati方程较难求解, 本文通过利用李雅普诺夫稳定性理论及Matlab的LMI工具箱推导了一种LMI控制算法, 并建立了一栋20层结构LMI最优主动控制的分析模型, 并利用Matlab语言编制了求解软件, 通过对El-Centro波下结构动力反应进行数值模拟, 从楼层位移、速度、加速度, 层间位移, AMD作动器控制力输出方面对LMI控制算法效果进行分析。计算结果表明: LMI控制能有效降低建筑结构楼层位移、速度、加速度、层间位移响应, 但需要付出一定的控制成本。可以通过调整权重参数 $\alpha$ 达到目标减振效果, 权重 $\alpha$ 越大, 控制效果越好, 控制成本越高。顶层控制力最大, 当 $\alpha = 1e12$ 时减振效果较好, 顶层控制力幅值为楼面重力荷载27.8%。

## 关键词

建筑与土木工程, 主动振动控制, 龙格-库塔方法, 状态变量, 线性矩阵不等式, 李雅普诺夫函数

# An LMI Vibration Control Algorithm for Building Structures

Bingda Huang, Nan Ge, Yong Wang

Architectural Engineering Institute, North China University of Science and Technology, Tangshan Hebei  
Email: huangbingda@foxmail.com

Received: Oct. 1<sup>st</sup>, 2020; accepted: Oct. 9<sup>th</sup>, 2020; published: Oct. 26<sup>th</sup>, 2020

## Abstract

Because Riccati equation in  $H_\infty$  controller is more difficult to solve, in this paper, by using Lyapunov stability theory and LMI toolbox of Matlab, an LMI control algorithm was deduced, an analysis model of LMI optimal active control for a 20-story structure was established, and Matlab language was used to compile the solution software. The structural dynamic response under El-Centro wave was numerically simulated, and the effect of LMI control algorithm was analyzed from floor displacement, velocity, acceleration, inter-floor displacement and AMD actuator control output side. The calculation results show that the LMI control can effectively reduce the floor displacement,

velocity, acceleration and inter-floor displacement response of the building structure, but it needs to pay a certain control cost. The target damping effect can be achieved by adjusting the weight parameters. The greater the weight is, the better the control effect is and the higher the control cost is. The top floor control force is the largest, and the damping effect is better when  $\alpha = 1e12$ ; the amplitude of the top floor control force is 27.8% of the floor gravity load.

## Keywords

Architecture and Civil Engineering, Active Vibration Control, Runge-Kutta Method, State Variables, Linear Matrix Inequality, Lyapunov Function

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

$H_\infty$ 控制是在  $H_\infty$ 空间[1] [2] (Hardy 空间)通过对某些无穷范数优化而获得具有鲁棒性能的控制器的理论。其目的为当名义模型存在不确定性时,如何利用名义模型来设计控制器,使所设计的控制器在能控制被控对象的同时,使某一目标函数的范数  $H_\infty$ 为最小。也就是使控制器具有较好的鲁棒性。 $H_\infty$ 就是现代控制理论中的设计多变量输入输出(MIMO)鲁棒控制系统的一种方法。由于工作状态变动、外部干扰以及建模误差的缘故,实际工业过程的精确模型很难得到,而系统的各种故障也将导致模型的不确定性,因此可以说模型的不确定性在控制系统中广泛存在。如何设计一个固定的控制器,使具有不确定性的对象满足控制品质,也就是鲁棒控制,成为国内外科研人员的研究课题。1981年 Zames 利用  $H_\infty$ 范数作为性能指标,提出最小灵敏度控制问题—— $H_\infty$ 控制问题[3]; 1988年 Zhou 获得  $H_\infty$ 控制问题的状态反馈控制解[4]; 1989年 Doyle 等发表著名的 DGKF 论文,获得  $H_\infty$ 控制问题的输出反馈控制解—— $H_\infty$ 控制理论形成[5]。然而  $H_\infty$ 控制器设计却较难求解。在 Matlab 语言函数中也没有合适的求解函数来求解 Ricatti 方程,即反馈增益方程。本文采用 Matlab 中基于内点法[6]求解凸优化问题的 LMI (Linear Matrix Inequality)工具箱提出了一个控制方法,并以一栋实际的结构为例,计算 LMI 控制算法下的地震动力反应并分析其减震效果验证其有效性。

## 2. LMI 控制器的基本原理

系统的状态空间模型[7]为:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

其中  $x$  是状态向量,  $u$  是控制输入,  $A$  和  $B$  分别是恰当维数的已知的常数矩阵。若采用状态反馈,则有:  $u = Kx$ 。设计 LMI 控制器的目的就是使闭环系统  $\dot{x} = Ax + Bu = (A + BK)x$  具有渐进稳定性,同时控制器具有鲁棒性。

考虑 Lyapunov 函数[7]  $V = x^T Px$ , 根据 Lyapunov 稳定性理论[7]可知,当且仅当以下不等式有可行解  $P > 0$  时,上述的闭环系统是渐近稳定的:

$$(A + BK)^T P + P(A + BK) - P < 0 \quad (2)$$

且  $P = P^T$ 。

对(2)式两端各乘以  $P^{-1}$ , 得:

$$P^{-1}(A + BK)^T + (A + BK)P^{-1} - P^{-1} < 0 \quad (3)$$

令  $X = P^{-1}$ ,  $Y = KP^{-1}$ ,  $K = YP = X^{-1}$  得:

$$(AX + BY)^T + (AX + BY) - X < 0 \quad (4)$$

因此, 根据 Schur 补引理[8]若以下矩阵不等式成立, 则上式即能成立,

$$\begin{bmatrix} (AX + BY)^T + (AX + BY) & 0 \\ 0 & -X \end{bmatrix} < 0 \quad (5)$$

即上述的闭环系统是稳定的, 由于(5)式是一个线性矩阵不等式[8], 可以用 Matlab 中的 LMI 求解器 feasp 求取可行解(X, Y), 则状态反馈控制力即为  $u = \alpha Kx$ , 可通过调节参数调节 LMI 控制器的减震效果, 将其代入到有外扰(地震作用)运动方程得:

$$\dot{x} = Ax + Bu + W\ddot{x}_g \quad (6)$$

就可求得 LMI 控制下的运动方程的地震动力反应, 检验所设计的 LMI 控制器的效果。

因此, 求取 LMI 控制算法可行解的过程如下:

```
setlmis([]); %初始化一个不等式系统
X = lmivar(1,[2 1]); %定义矩阵变量
Y = lmivar(2,[1 2]); %定义矩阵变量
lmiterm([1 1 1 X],A,1,' s' ); %描述线性矩阵不等式
lmiterm([1 1 1 Y],B,1,' s' ); %描述线性矩阵不等式
lmiterm([1 2 2 X],-1,1); %描述线性矩阵不等式
lmis = getlmis; %完成写线性矩阵不等式
[tmin,xffeas] = feasp(lmis,[0,0,10,0,0],-1) %求取可行解
x = dec2mat(lmis,xffeas,X) %得到可行矩阵变量值
y = dec2mat(lmis,xffeas,Y)
K = y*inv(x) %求状态反馈控制器增益
```

对于被控结构的地震动力反应计算预测, 则可采用的数值预测方法有 Newmark 法、经典四阶 Runge-Kuta 法等。

### 3. 计算实例与结果

为评价 LMI 算法对建筑结构的减震效果, 在这里为节约评价成本采用数值预测的方法[9], 采用经典四阶 Runge-Kuta 法来预测建筑结构运动方程动力反应, 以评价 LMI 算法的减震效率, 为确保数值预测结果准确性采用 Nnewmark 法、Runge-Kuta 法同时进行数值模拟, 若数值结果相同则数值预测有效。

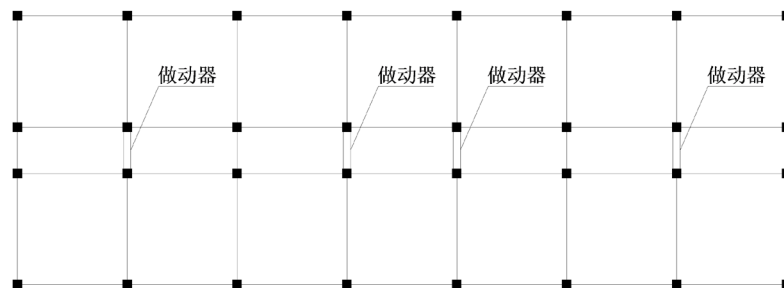


Figure 1. Structural plane layout  
图 1. 结构模型平面图

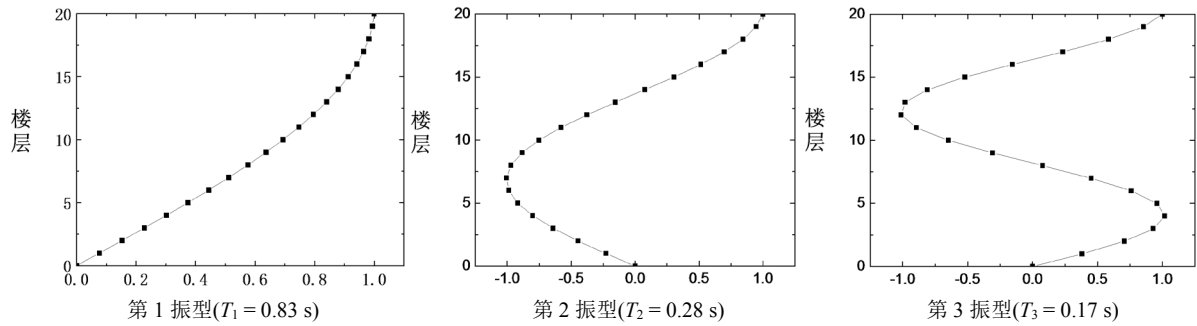


Figure 2. 1st, 2nd and 3rd for modal structural  
图 2. 前三阶振型图

建立一栋 20 层建筑结构模型，其模型平面图如图 1 所示，为方便数值模拟将其简化为 20 个集中质量的多自由度体系。结构每个集中质量  $m_i = 2933 \text{ t}$ ，每层层间侧移刚度  $k_i = 28,950,000 \text{ kN/m}$ ，其一、二、三阶振型如图 2 所示。阻尼矩阵采用振型阻尼比为 0.05 时的 Rayleigh 阻尼的形式[10]。以 El-Centro 波为受控建筑结构外部干扰输入，并使其峰值为  $4.0 \text{ m/s}^2$  以检验建筑结构在 8 级地震下的控制效果。

从图 3、图 4 可以看出，当  $\alpha = 1e10 - 1e12$  时，LMI 控制算法减振效果显著。通过调节系数  $\alpha$  可以达到调节目标减振效果的效果，随着调节系数  $\alpha$  相应的位移、层间位移、速度、加速度减振效果也随之增加，反之，随着调节系数  $\alpha$  的减小，相应的控制效果也随之减弱，在实际工程设计中，可根据目标建筑结构抗震设防等级选取相应级别的地震波以通过不断调节参数试算以确定其参数  $\alpha$ 。

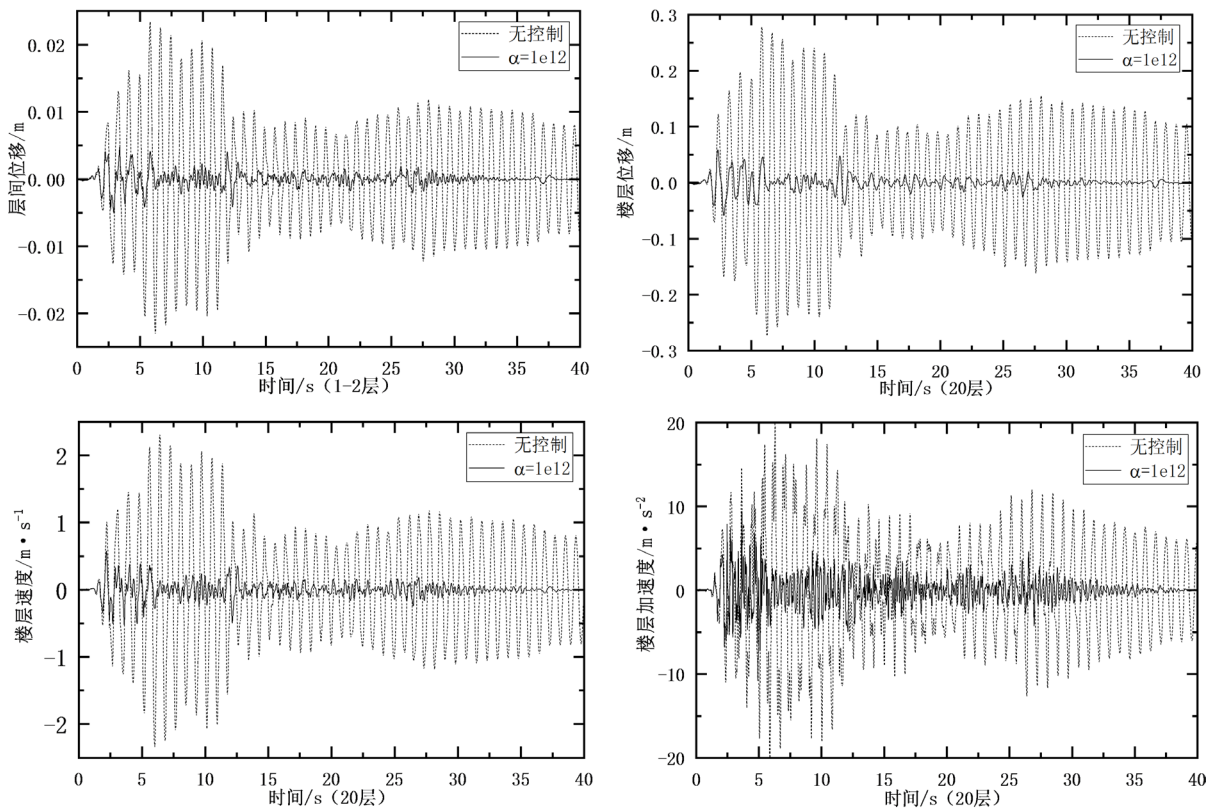
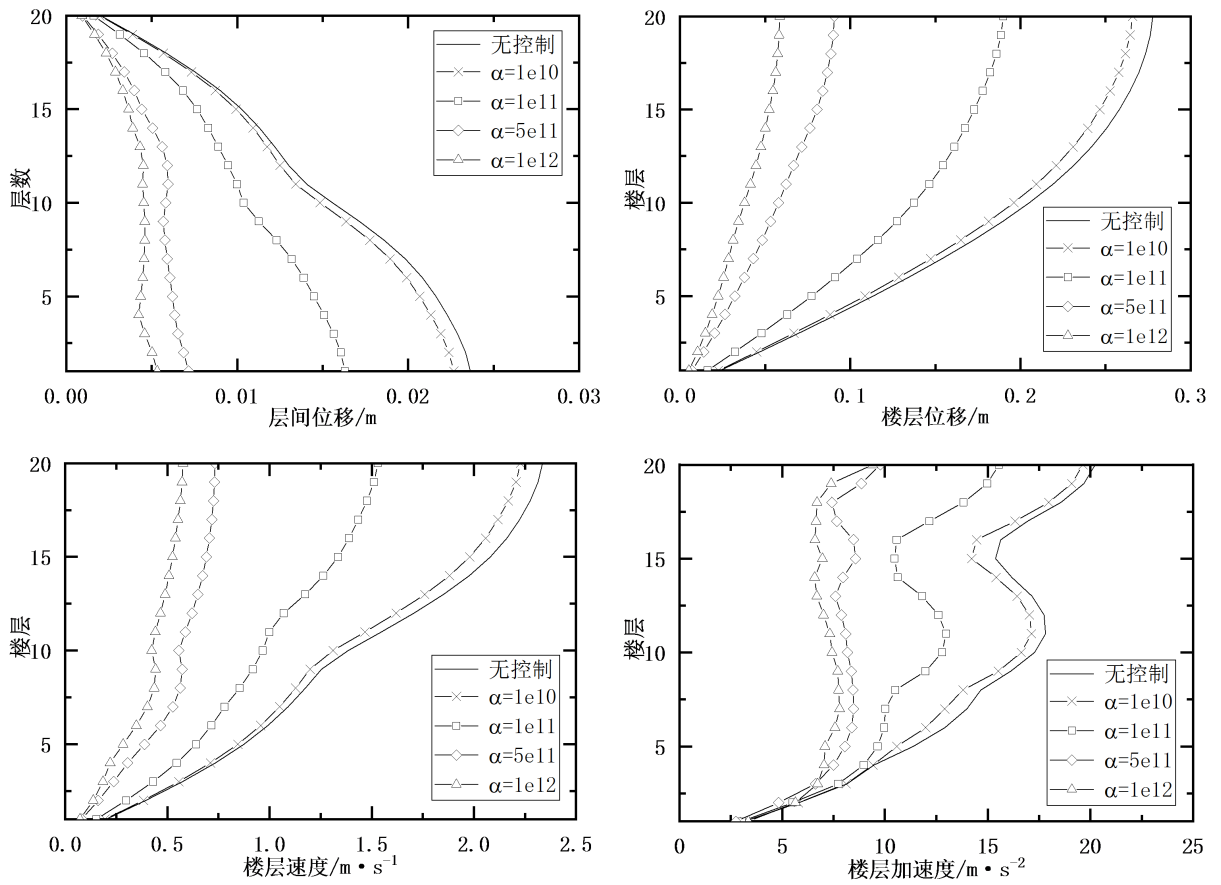


Figure 3. Time histories of structural seismic dynamic response  
图 3. 结构地震动力反应历程



**Figure 4.**  $\alpha$  vs structural seismic dynamic response  
**图 4.** 调节系数  $\alpha$  值与结构地震动力反应最大值

**Table 1.** Control mode vs seismic dynamic response  
**表 1.** 控制方式与地震动力反应

层间 (楼层)	$\alpha = 1e11$				$\alpha = 1e12$				无控制	
	层间位 移/mm	效率 /%	楼层加速 度/ $m \cdot s^{-2}$	效率 /%	层间位 移/mm	效率 /%	楼层加速 度/ $m \cdot s^{-2}$	效率 /%	层间位 移/mm	楼层加速 度/ $m \cdot s^{-2}$
0~1(1)	16.29	31.06	3.02	-15.71	5.33	77.44	3.34	-27.97	23.63	2.61
1~2(2)	16.06	31.22	5.51	-7.20	5.02	78.50	5.64	-9.73	23.35	5.14
2~3(3)	15.64	31.64	7.73	-4.46	4.59	79.94	6.72	9.19	22.88	7.40
3~4(4)	15.09	32.27	8.97	4.68	4.24	80.97	7.03	25.29	22.28	9.41
4~5(5)	14.48	33.02	9.65	15.13	4.37	79.79	7.08	37.73	21.62	11.37
5~6(6)	13.89	33.32	9.96	22.91	4.48	78.49	7.57	41.41	20.83	12.92
6~7(7)	13.19	33.48	10.02	28.38	4.56	77.00	7.79	44.32	19.83	13.99
7~8(8)	12.31	33.78	10.51	28.36	4.60	75.26	7.74	47.24	18.59	14.67
8~9(9)	11.26	34.34	11.97	25.74	4.60	73.18	7.71	52.17	17.15	16.12
9~10(10)	10.38	33.33	12.79	26.03	4.53	70.91	7.43	57.03	15.57	17.29
10~11(11)	9.99	28.95	12.98	27.16	4.47	68.21	7.32	58.92	14.06	17.82

Continued

11~12(12)	9.47	27.21	12.60	29.01	4.52	65.26	7.01	60.51	13.01	17.75
12~13(13)	8.89	27.07	11.81	31.18	4.31	64.64	6.68	61.07	12.19	17.16
13~14(14)	8.31	26.53	10.63	34.30	3.90	65.52	6.58	59.33	11.31	16.18
14~15(15)	7.65	25.44	10.47	31.92	3.65	64.42	6.96	54.75	10.26	15.38
15~16(16)	6.83	24.20	10.57	32.42	3.31	63.26	6.59	57.86	9.01	15.64
16~17(17)	5.80	23.08	12.16	25.26	2.88	61.80	6.65	59.13	7.54	16.27
17~18(18)	4.56	22.05	13.82	22.88	2.33	60.17	6.70	62.61	5.85	17.92
18~19(19)	3.14	21.50	14.98	22.26	1.66	58.50	7.38	61.70	4.00	19.27
19~20(20)	1.60	21.18	15.56	22.32	0.92	54.68	9.40	53.07	2.03	20.03

注：某一控制方案的减震效率是指相对于无控制方案而言。

结合表 1 及图 4 可以看出，采用 LMI 控制后，随着调节系数  $\alpha$  的增大，楼层加速度减震效果也随之增加，但底部结构的减震效果较不明显甚至出现增加建筑结构楼层加速度的情况，且在相同设计参数  $\alpha$ ，从而能够在一定程度上降低工程试算难度；在统一设计参数  $\alpha$  下，作动器控制成本随着楼层的提高而提高，因此，最大作动器控制力在顶层，取  $\alpha = 1e12$  时，顶层控制力的幅值达到 8000 kN 左右，为本层楼面重量(或等效重力荷载代表值)的 27.8%。

从图 5 可以看出，随着设计参数的增大(控制效果越好)，每一楼层的作动器控制力也随之增加即意味着控制成本的增加；与 LQR、IOC 等经典控制算法相比，LMI 算法只有一个设计参数，从而能够在一定程度上降低工程试算难度；在统一设计参数下，作动器控制成本随着楼层的提高而提高，因此，最大作动器控制力在顶层，取时，顶层控制力的幅值达到 8000 kN 左右，为本层楼面重量(或等效重力荷载代表值)的 27.8%。

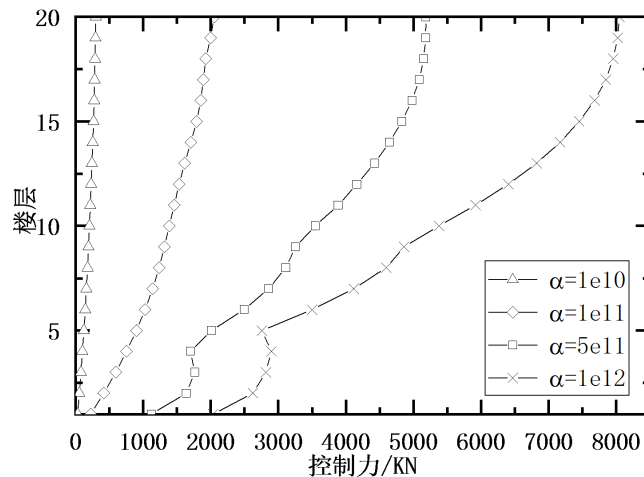


Figure 5.  $\alpha$  vs structural seismic dynamic response

图 5. 调节系数  $\alpha$  值与楼层控制力幅值

#### 4. 结论

1) LMI 控制有显著减振效果，调节系数  $\alpha$  越大，控制效果越好，控制成本越高，调节系数  $\alpha$  越小，控制效果越差，控制成本越低。

2) LMI 控制, 顶层控制力最大, 当  $\alpha = 1e12$  时减振效果较好时, 顶层控制力幅值为楼面重力荷载 27.8%。

## 参考文献

- [1] Hardy, G.H. (1915) On the Mean Value of the Modulus of an Analytic Function. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **14**, 269-277. [https://doi.org/10.1112/plms/s2\\_14.1.269](https://doi.org/10.1112/plms/s2_14.1.269)
- [2] Riesz, F. (1923) Über die Randwerte einer analytischen Funktion. *Mathematische Zeitschrift*, **18**, 87-95. <https://doi.org/10.1007/BF01192397>
- [3] Zames, G. (1981) Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **26**, 301-320. <https://doi.org/10.1109/TAC.1981.1102603>
- [4] Zhou, K. and Khargonekar, P.P. (1988) Robust Stabilization of Linear Systems with Norm-Bounded Time-Varying Uncertainty. *Systems & Control Letters*, **10**, 17-20. [https://doi.org/10.1016/0167-6911\(88\)90034-5](https://doi.org/10.1016/0167-6911(88)90034-5)
- [5] Glover, D.J., Khargonekar, P.P. and Francis, B.A. (1989) State-Space Solution to Standard and Control Problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **34**, 831-847. <https://doi.org/10.1109/9.29425>
- [6] Nesterov, Y. and Nemirovsky, A. (1994) Interior Point Polynomial Methods in Convex Programming. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia. <https://doi.org/10.1137/1.9781611970791>
- [7] 欧进萍. 结构振动控制: 主动、半主动和智能控制[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [8] 陈东彦, 石宇静, 吴玉虎. 控制系统中的矩阵理论[M]. 北京: 科学出版社, 2011.
- [9] 黄炳达, 富腾, 葛楠. 结构瞬时 AMD 最优控制减震效果计算研究[J]. 动力系统与控制, 2020, 9(2): 129-137.
- [10] 田石柱. 建筑结构的 AMD 主动控制[D]: [博士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨建筑大学, 1999.