Hans Journal of Computational Biology 计算生物学, 2017, 7(4), 39-45
Published Online December 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/hjcb
https://doi.org/10.12677/hjcb.2017.74005

Qualitative Analysis of a Predator-Prey System with Undifferentiated Predation and Disease Is Spread in the Bait

Hanchuan Chen, Yongjin Xian

Dalian Jiaotong University, Dalian Liaoning
Email: 1172868414@qq.com

Received: Mar. 27th, 2018; accepted: Apr. 11th, 2018; published: Apr. 18th, 2018

Abstract

In this paper, a predator-prey system is studied for the propagation of a class of diseases in the prey. The prey is restricted by density, and the predator does not discriminate whether the food is infected or not. This paper discusses the condition of the boundary equilibrium points of the model, and proves the local stability of the system according to the Routh-Hurwitz criterion by the Jacobian matrix. Using Bendixson-Dulac criterion, the ultimate proof system does not exist all the closed orbits in G. Thus the zero solution of the limit system is global stable. The global asymptotic stability of the original system is obtained by the limit system theory. Finally, the existence of the positive equilibrium and the limit cycle of the limit system are discussed.

Keywords

Predator-Prey System, Limit System, Stability, Limit Cycle

疾病在食饵中进行传播的无差别捕食的捕食–食饵系统的定性分析

陈汉川，咸永锦

大连交通大学，辽宁 大连
Email: 1172868414@qq.com

收稿日期：2018年3月27日；录用日期：2018年4月11日；发布日期：2018年4月18日

摘　要

研究一类疾病在食饵中进行传播的捕食–食饵系统，食饵受到密度制约，且捕食者进行不区分食饵是否

文章引用: 陈汉川, 咸永锦. 疾病在食饵中进行传播的无差别捕食的捕食–食饵系统的定性分析[J]. 计算生物学, 2017, 7(4): 39-45. DOI: 10.12677/hjcb.2017.74005

感染疾病的无差别捕食。讨论了模型存在边界平衡点的条件，并通过计算系统的Jacobian矩阵，根据Routh-Hurwitz判据证明了系统的局部稳定性。利用Bendixson-Dulac判别法，证明极限系统不存在全部位于G内的闭轨线，从而得到极限系统的零解是全局稳定的；由极限系统理论，得到原系统的全局渐近稳定性。最后，讨论了正平衡点的存在性以及极限系统的极限环的存在性。

关键词

捕食－食饵系统，极限系统，稳定性，极限环

1. 引言

捕食是指某物种消耗另一物种活体的全部或部分身体，从而从中直接获得营养以维持自己生命的现象。前者我们称为捕食者，后者称为食饵。在种群动力学中，Lotka-Volterra 模型是最为经典和重要的两个种群之间相互作用的动力学模型，该模型分别由意大利数学家 Volterra 于 1923 年用来解释鱼群变化规律和美国种群学家 Lotka 于 1921 年在研究化学反应时提出。而捕食者－食饵模型是 Lotka-Volterra 模型的一类特殊情况，模型如下：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x\left(a_1 - b_1 x - c_1 y\right) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y\left(a_2 - b_2 y + c_2 x\right) \end{cases}$$

该捕食系统是指一个种群以另外一个种群为食饵，其中 a_1, a_2 分别表示种群 x 和 y 的内禀增长率，$-b_1 x$ 反映了以下事实，即在环境容纳量一定的条件下，x 的增大将会使每一个体平均的生活条件降低，从而影响种群的相对增长率，因此该项被称为密度制约项，$-b_2 y$ 同理。而 $c_1 xy$ 则表示在 t 时刻，y 个捕食者在单位时间内吃掉的食饵总量。其中 $a_i > 0, b_i > 0, c_i > 0$，表示种群 x 为食饵，种群 y 为捕食者，举一个典型的例子就是草原上的猎豹和斑马之间的关系。

传染病在捕食者–食饵系统中的传播，是种群生态学与传染病动力学的一种结合，是目前生物数学研究的热点问题之一，在害虫防治以及保护生态物种方面具有极其重要的实际意义。本文以疾病在受到密度制约的健全食饵中进行传播且捕食者以感染的食饵的捕食－食饵模型[1]为基础进行了进一步的讨论。

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \left(b - \dfrac{\theta r H}{K}\right)H - \left(d + \dfrac{(1-\theta) r H}{K}\right)s - \beta s i \\ \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \beta s i - \left(d + \dfrac{(1-\theta) r H}{K}\right)i - \dfrac{m i y}{\alpha + i} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \left(\dfrac{\varepsilon m i}{\alpha + i} - e\right)y \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，$s(t)$ 表示健全食饵种群的数量，$i(t)$ 表示感染疾病的食饵种群的数量，$y(t)$ 表示捕食者的数量；$H(t) = s(t) + i(t)$，表示食饵的总数；$r = b - d$，表示内禀增长率，其中 b 表示出生率，d 表示死亡

率；$\left(b-\frac{\theta rH}{K}\right)H$ 表示修正后食饵的出生函数，$b>\theta r$；$\left(d+\frac{(1-\theta)rH}{K}\right)H$ 表示修正后食饵死亡函数，其中 $0\le\theta\le1$；K 表示食饵的环境容量；β表示食饵感染率；m 表示捕食者捕食食饵的捕食率；e 表示捕食者的死亡率。

2. 模型改进

通过对相关文章的阅读与分析，发现系统(1.1)中存在一定的局限性，其中的捕食者的捕食目标只是感染的食饵。考虑到捕食者在捕食过程中，并不会区分食饵是否感染疾病，所以改进模型如下：

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\left(b-\frac{\theta rH}{K}\right)H-\left(d+\frac{(1-\theta)rH}{K}\right)s-\beta si-\frac{msy}{\alpha+H}\\ \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\beta si-\left(d+\frac{(1-\theta)rH}{K}\right)i-\frac{miy}{\alpha+H}\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\varepsilon mH}{\alpha+H}-e\right)y\end{cases}\tag{2.1}$$

其中，$\frac{mHy}{H+\alpha}$ 为功能反应函数，表示被捕食者捕获的食饵的数量。与模型(1.1)类似，当 $\theta=0$ 时，说明食饵种群的出生率与食饵种群密度无关，但食饵种群的死亡率与食饵种群密度有关；当 $\theta=1$ 时，说明食饵种群的出生率与食饵种群密度有关，但食饵种群的死亡率与食饵种群密度无关；当 $0<\theta<1$ 时，说明食饵种群的出生率与死亡率都与食饵种群密度有关。

由系统(2.1)的第一个方程可以看出：当 $s(t)=0$ 且 $i(t)\le K$ 时，有 $s'(t)>0$，为了保证解的非负性，让初始值满足 $s(0)+i(0)\le K$，且 $s(0)\ge0$，$i(0)\ge0$，$y(0)\ge0$。

由 $1-\frac{H}{K}\ge0$，可得 $H\le K$，即 $s(t)+i(t)\le K$；$\forall t\ge0$，有 $s(t)\ge s(0)\ge0$；同理，$i(t)\ge0, y(t)\ge0$。即可以得到 $G=\{(s,i,y):s+i\le K, s\ge0, i\ge0, y\ge0\}$ 是方程组(2.1)的正不变集。

3. 平衡点及稳定性

3.1. 平衡点

系统(2.1)具有平衡点 $E_0(0,0,0)$，$E_1(K,0,0)$，$E_2(s_2,i_2,0)$，其中 $s_2=\frac{b-r\theta}{\beta}$，$i_2=\frac{K\beta+r\theta-b}{\beta}$。

当 $K\beta+r\theta-b>0$ 时，系统(2.1)存在边界平衡点 E_2。当 $i=0$ 时，系统将退化为一般的捕食－食饵系统，本文将不做讨论。

3.2. 局部稳定性

系统(1.1)满足任意非零初始条件的解，$E_0(0,0,0)$ 都是不稳定的[1]。由此可以推广到系统(2.1)上也有同样的结论：系统(2.1)满足任意非零初始条件的解，$E_0(0,0,0)$ 都是不稳定的。

系统(2.1)在平衡点 $E_1(K,0,0)$ 的 Jacobian 矩阵为：

$$J_{E_1}=\begin{pmatrix}-r & d-r\theta-K\beta & -\frac{mK}{\alpha+K}\\ 0 & K\beta-(d+(1-\theta)r) & 0\\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon mK}{\alpha+K}-e\end{pmatrix}\tag{3.1}$$

定义基本再生数 $R_1=\dfrac{K\beta}{\left(d+(1-\theta)r\right)},R_2=\dfrac{\varepsilon mK}{e(\alpha+K)}$，当 $R_1<1$ 且 $R_2<1$ 时，平衡点 E_1 局部稳定；否则，平衡点 E_1 不稳定。

系统(2.1)在平衡点 $E_2\left(s_2,i_2,0\right)$ 的 Jacobian 矩阵为：

$$J_{E_2}=\begin{pmatrix}-\left(\theta r+\dfrac{(1-\theta)rs_2}{K}+\beta i_2\right) & b-2r\theta-\dfrac{(1-\theta)rs_2}{K}-\beta s_2 & -\dfrac{ms_2}{\alpha+K}\\ \beta i_2-\dfrac{(1-\theta)ri_2}{K} & \beta s_2-d-(1-\theta)r-\dfrac{(1-\theta)r}{K} & -\dfrac{mi_2}{\alpha+K}\\ 0 & 0 & \dfrac{\varepsilon mK}{\alpha+K}-e\end{pmatrix}\tag{3.2}$$

当 $R_1>1$ 且 $R_2<1$ 时，由 Routh-Hurwitz 判据可知 $\dfrac{\varepsilon mK}{\alpha+K}-e<0$，考察以下矩阵：

$$\tilde{J}_{E_2}=\begin{pmatrix}-\left(\theta r+\dfrac{(1-\theta)rs_2}{K}+\beta i_2\right) & b-2r\theta-\dfrac{(1-\theta)rs_2}{K}-\beta s_2\\ \beta i_2-\dfrac{(1-\theta)ri_2}{K} & \beta s_2-d-(1-\theta)r-\dfrac{(1-\theta)r}{K}\end{pmatrix}\tag{3.3}$$

可知，矩阵 J_{E_2} 的特征值均具有负实部，从而平衡点 E_2 局部稳定；当 $R_1>1$ 且 $R_2>1$ 时，平衡点 E_2 不稳定。

3.3. 全局稳定性

定理 3.1：当 $R_1<1$ 且 $R_2<1$ 时，平衡点 E_1 在 G 内全局渐近稳定。

证明：由 $H\le K$，可得 $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\le\left(K\beta-(1-\theta)r-d\right)i$，又 $i\ge 0$，则

$$i\ge C\mathrm{e}^{(K\beta-(1-\theta)r-d)t}\tag{3.4}$$

当 $t\to+\infty$ 时，$\mathrm{e}^{(K\beta-(1-\theta)r-d)t}\to 0$；由 $i\ge 0$ 和式(3.4)可知 $i=0$，即

$$M=\left\{(s,i,y):\dot{V}=0\right\}=\{i=0\}\tag{3.5}$$

显然，系统(2.1)在 M 中的最大不变子集就是 M 本身。由 Lasalle 不变集原理[2]可知，当 $t\to+\infty$ 时，(2.1)在 G 中的解都有 $i(t)\to 0$。由此可知系统(2.1)的极限系统为：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=rs\left(1-\dfrac{s}{K}\right)-\dfrac{msy}{\alpha+s}\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\left(\dfrac{\varepsilon ms}{\alpha+s}-e\right)y\end{cases}\tag{3.6}$$

由文献[3]，极限系统理论，直接可以证明该极限系统：当 $R_1<1$ 且 $R_2<1$ 时，平衡点 E_1 在 G 内全局渐近稳定。

定理 3.2：当 $R_1>1$ 且 $R_2<1$ 时，平衡点 E_2 在 G 内全局渐近稳定。

证明：先考虑下面的方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=rH\left(1-\dfrac{H}{K}\right)\\ \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\beta si-\left(d+\dfrac{(1-\theta)rH}{K}\right)i\end{cases}\tag{3.7}$$

作变换 $x=\dfrac{i}{H}$，得到

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=rH\left(1-\dfrac{H}{K}\right)\\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-(d+r)x+\left(\beta+\dfrac{rH}{K}\right)Hx-\beta Hx^2\end{cases}\tag{3.8}$$

方程组(3.8)满足初始条件的解 $N=\{(H,x):0\le x\le 1,0\le H\le K\}$。

由方程组(3.8)的第一个方程可知：满足上述非零初始条件的解都有当 $t\to+\infty$ 时，$H(t)\to K$。

当 $R_1>1$ 且 t 充分大时，极限系统(3.7)在 N 中的解以 $\dfrac{K\beta+\theta r-b}{K\beta}$ 为极限。由此可知系统(3.8)的平衡点 $\left(K,\dfrac{K\beta+\theta r-b}{K\beta}\right)$ 在 N 中全局渐近稳定，进而有等价系统(3.7)的平衡点 $W_2(K,i_2)$ 在 G 内全局渐近稳定。

对于系统(2.1)，将前两个方程相加得到一个新的方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=rH\left(1-\dfrac{H}{K}\right)-\dfrac{mHy}{\alpha+H}\\ \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\beta si-\left(d+\dfrac{(1-\theta)rH}{K}\right)i-\dfrac{miy}{\alpha+H}\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\left(\dfrac{\varepsilon mH}{\alpha+H}-e\right)y\end{cases}\tag{3.9}$$

根据比较原理可得，方程组(3.9)的解，对 $\forall\delta>0$，存在 T，使得 $t>T$ 时有 $i(t)\le i_1+\delta$，从而当 $R_2<1$ 且 t 充分大时，方程组(3.9)的第三个方程有：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}<0$，由此可知当 t 充分大时 $y(t)\to 0$，也就是说，系统(3.9)有极限系统如下：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=rH\left(1-\dfrac{H}{K}\right)-\dfrac{mHy}{\alpha+H}\\ \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\beta si-\left(d+\dfrac{(1-\theta)rH}{K}\right)i-\dfrac{miy}{\alpha+H}\end{cases}\tag{3.10}$$

与定理 3.1 的证明类似，系统(3.10)的平衡点 (K,i_2) 全局渐近稳定，由极限系统理论可知(3.9)的平衡点 $(K,i_2,0)$ 也全局渐近稳定。

综上所述，当 $R_1>1$ 且 $R_2<1$ 时，平衡点 E_2 在 G 内全局渐近稳定。

3.4. 正平衡点及极限环

考虑系统(2.1)的正平衡点 E^* 的稳定性，则可将系统(2.1)转化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=rH\left(1-\dfrac{H}{K}\right)-\dfrac{mHy}{\alpha+H}\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\left(\dfrac{\varepsilon mH}{\alpha+H}-e\right)y\end{cases}\tag{3.11}$$

系统(3.11)可以存在正平衡点 $\overline{E}^*(H^*,y^*)\left(H^*=s^*+i^*>0,y^*>0\right)$，其中

$$H^*=\frac{\alpha e}{\varepsilon m-e},\ y^*=\frac{r}{m}\left(1-\frac{H^*}{K}\right)(\alpha+H^*),$$

当 $\varepsilon m-e>0$，且 $K-\frac{\alpha e}{\varepsilon m-e}>0$。

由系统(2.1)的前两个方程相减得：

$$AH^{*}-Cs+\left(C-2\beta s\right)i=0 \tag{3.12}$$

所以

$$i=\frac{Cs-AH^{*}}{C-2\beta s} \tag{3.13}$$

代入 $H=s+i$，得

$$g\left(s\right)=2\beta s^{2}-\left(2\beta H^{*}+2C\right)s+\left(C+A\right)H^{*}=0 \tag{3.14}$$

其中 $A=b-\frac{\theta rH^{*}}{K},B=d+\frac{\left(1-\theta\right)rH^{*}}{K},C=B+\frac{my^{*}}{\alpha+H^{*}}=A$。

所以

$$\left(C+A\right)H^{*}=2AH^{*}>0 \tag{3.15}$$

再将方程(3.14)化为：

$$\frac{1}{2}g\left(s\right)=\beta s^{2}-\left(\beta H^{*}+C\right)s+AH^{*}=0 \tag{3.16}$$

当 $\Delta=\left(\beta H^{*}+A\right)^{2}-4\beta AH^{*}=\left(\beta H^{*}-A\right)^{2}=0$，即 $R_{3}=\frac{\left(\beta K+\theta r\right)H^{*}}{b}=1$ 时，方程(3.16)存在唯一正根 s^{*}；此时，系统(2.1)有唯一的正平衡点 $E^{*}\left(s^{*},i^{*},y^{*}\right)$，其中 $i^{*}=\frac{As-AH^{*}}{A-2\beta s^{*}},y^{*}=\frac{r}{m}\left(1-\frac{H^{*}}{K}\right)\left(\alpha+H^{*}\right)$。由定理 3.1 的证明过程可知，

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\tau}=H\left(\bar{a}_{1}+\bar{a}_{2}H+\bar{a}_{3}H^{2}-y\right)\triangleq P\left(H,y\right)\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}=y\left(-1+H\right)\triangleq Q\left(H,y\right)\end{cases} \tag{3.17}$$

那么可以与(3.11)的证明方法类似，根据文献[3]，文献[4]直接得出 $\bar{a}_{2}+2\bar{a}_{3}>0$ 时，系统(3.11)在 G 内至少存在一个包含正平衡点 $\bar{E}^{*}\left(H^{*},y^{*}\right)$ 的稳定极限环。

4. 结论

本文首先提出了一类疾病在食饵中进行传播的无差别捕食的捕食－食饵系统。其次，讨论了边界平衡点的稳定性：当 $R_{1}<1$ 且 $R_{2}<1$ 时，平衡点 E_{1} 在 G 内全局渐近稳定；当 $R_{1}>1$ 且 $R_{2}<1$ 时，平衡点 E_{2} 在 G 内全局渐近稳定。最后，讨论正平衡点 E^{*} 时，将系统转化为二维系统后，证明了极限系统在 G 内至少存在一个包含正平衡点 $\bar{E}^{*}$ 的稳定极限环。由此，我们可以知道，在捕食者不区分食饵是否感染而进行捕食的时候，当 $R_{1}<1$ 且 $R_{2}<1$ 时，最后整个系统会只剩下健康未染病的食饵；当 $R_{1}>1$ 且 $R_{2}<1$ 时，整个系统会只剩下食饵，而捕食者则灭绝。在实际生活中可以通过向系统中投放感染的食饵，从而对捕食者和食饵的数量进行控制，比如在蛇－鼠这一系统中，用来灭蛇，或者控制蛇类与鼠的数量。

参考文献 (References)

[1] 赵姣，魏春金，王宝童，张树文．疾病在食饵中传播的捕食－食饵模型[J]．生物数学学报，2015(4): 709-713.

[2] Lasalle, J.P. (1968) Stability Theory for Ordinary Differential Equations. *Journal of Differential Equations*, **4**, 57-65. https://doi.org/10.1016/0022-0396(68)90048-X

[3] 陈兰荪, 井竹君. 捕食者－食饵相互作用中微分方程的极限环存在性和唯一性[J]. 科学通报，1984，29(9): 521-523.

[4] 马知恩, 周义仓, 李承治. 常微分方程定性与稳定性方法[M]. 第二版. 北京: 科学出版社, 2015.