

# Wave Propagation in Fluid-Conveying Double-Walled Carbon Nanotubes under Magnetic Field

Yaxin Zhen

School of Mathematics and Physics, North China Electric Power University, Beijing  
Email: yasine\_zhen@163.com

Received: Aug. 15<sup>th</sup>, 2016; accepted: Sep. 10<sup>th</sup>, 2016; published: Sep. 14<sup>th</sup>, 2016

Copyright © 2016 by author and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

---

## Abstract

In this paper, wave propagation in fluid-conveying double-walled carbon nanotubes under magnetic field is investigated based on nonlocal elasticity theory. The wave equation of fluid-conveying double-walled carbon nanotubes under magnetic field is derived utilizing nonlocal Euler beam theory. The interaction of the double tubes is considered with the van der Waals interaction pressure. We analyze the influences of internal fluid, magnetic field intensity and nonlocal coefficient on the wave propagation characteristics of fluid-conveying double-walled carbon nanotubes through the dispersion relations under various circumstances. The results show that the magnetic field plays an important role on the wave propagation frequency. Increasing the magnetic intensity will increase the wave propagation frequency and weaken the nonlocal effect.

## Keywords

Fluid-Conveying Double-Walled Carbon Nanotubes, Wave Propagation, Magnetic Field, Nonlocal Effect

---

# 磁场环境下输流双壁碳纳米管中波的传播

甄亚欣

华北电力大学数理学院, 北京  
Email: yasine\_zhen@163.com

收稿日期：2016年8月15日；录用日期：2016年9月10日；发布日期：2016年9月14日

## 摘要

基于非局部弹性理论，本文研究了磁场环境下输流双壁碳纳米管中弯曲波的传播特性。采用非局部欧拉梁理论，建立磁场作用下输流双壁碳纳米管得波动方程，双壁碳纳米管的两层管之间通过范德华力相互作用。通过绘制不同情况下的色散关系图，分析了管内流体、磁场强度以及非局部参数对输流双壁碳纳米管中波的传播特性的影响，结果表明，磁场对波的传播频率有重要影响，增强磁场将增大波的传播频率，且增强磁场会减弱非局部效应。

## 关键词

输流双壁碳纳米管，波的传播，磁场，非局部效应

## 1. 引言

碳纳米管[1]自其被发现以来，引起了众多学者的关注。碳纳米管由单层或多层石墨烯片按照一定螺旋角度卷曲而成，根据石墨烯片层数的不同，可分成单层和多层碳纳米管。碳纳米管完美的几何结构和极高的强度，使其成为纳米尺度下流体储藏与运输的重要载体[2]。由于碳纳米管具有良好的力学、电学、化学特性，其内壁又是极其光滑的，因此可以被用来快速和安全的输送液氢等燃料，为能源的输送提供新的解决办法。为了碳纳米管更好地应用在纳米工程中，很有必要掌握输流碳纳米管的力学和物理性质，因此研究输流碳纳米管的动力学特性具有重要的实际意义。

由于碳纳米管的尺寸在纳米量级，对碳纳米管的实验研究主要是采取间接的测量方法，获得的实验数据离散性较大，实验研究也没有涉及环境(例如温度、化学环境)对碳纳米管力学性能影响，而分子动力学模拟系统内所有原子的行为，计算规模庞大，难以模拟较大规模或较长时间跨度的问题，同时，在分子动力学模拟过程中对系统能量的获得伴随了一些经验假设，所以在定量分析的准确性方面，分子动力学的结果尚不能尽如人意。已有的研究表明，连续介质模型能够在很多情况下描述碳纳米管的力学性能[3]。因此目前研究输流碳纳米管时，一般采用弹性梁或者弹性壳体模型来分析其动力学行为[4]。尽管经典连续介质梁模型已经成功模拟了一些情况下碳纳米管的力学性质，但是在求解过程中，宏观的连续体模型并不允许涉及对其内在尺寸的依赖性。在纳米尺度中，小尺度效应的影响是非常明显的。为了解释弹性的尺度效应，Eringen 和 Edelen [5] [6]在 1972 年提出了非局部弹性理论。非局部弹性理论认为弹性体内某一参考点  $p$  处的应力不仅取决于  $p$  点的应变，而且与物体内所有其他各点  $p'$  处的应变有关。

Yoon 等[7]研究了多壁碳纳米管中声波的传播，指出多壁碳纳米管存在临界频率。多壁碳纳米管中高频波的传播速度不仅依赖于系统的频率，同时还依赖于系统的非同轴振动模态。Natsuki 等[8]给出了嵌入弹性介质中的单壁和多壁碳纳米管中波的传播模型，利用温克勒模型描述了周边弹性介质的作用，发现非对称波在单壁碳纳米管和多壁碳纳米管中的传播有较大差异。Dong 等[9]采用弹性壳体模型研究了充液碳纳米管中波的耗散情况。Natsuki 等[10]研究了输流双壁碳纳米管中弹性波的传播，发现弹性波在输流双壁碳纳米管中的传播速度要低于在无流体双壁碳纳米管中的传播速度，系统的临界频率随流体密度的增加而降低，但与流体流速无关。当系统的振动频率大于 1.5 THz 时，内外管的振幅比值严重依赖于流体的速度和密度。Natsuki 等[11]利用弹性波理论研究了输流双壁碳纳米管的动力学特性。系统的一阶模

态频率很大程度上依赖于流体速度及流体密度，而对于二阶模态，流体速度及流体密度对振动频率几乎无影响。王立峰等[12]采用基于二阶应变梯度的非局部弹性铁木辛柯梁模型，分析了输流碳纳米管中弯曲波的传播及频散，发现流体的存在会使相速度最低解支的相速度明显降低，并且随着流体流速的增大，影响也越来越明显。随着弯曲波波数的升高，非局部效应对管中弯曲波传播的影响更加明显。Wang[13]等采用非局部欧拉梁模型研究了输流双壁碳纳米管中波的传播特性。碳纳米管作为纳米机电系统的基本元件，常常需要工作于复杂的物理环境中，如电场，磁场，热场等，因此研究磁场环境下单个多壁碳纳米管中波的传播特性具有非常实际的工程意义。据作者了解，目前尚未有针对磁场环境下输流双壁碳纳米管中弯曲波的传播研究。本文基于非局部弹性理论，采用欧拉梁模型建立磁场环境下输流双壁碳纳米管的波动方程，分析管中弯曲波的传播特性。

## 2. 方程建立

### 2.1. 磁场力

考虑碳纳米管受轴向均匀稳定的磁场作用，简单起见假设磁场对管道中流体的作用可忽略。在磁场作用下，碳纳米管受横向洛伦兹力作用[14]，单位长度上磁场力为

$$F_m = \eta A H_x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (1)$$

其中  $\eta$  是磁导率， $H_x$  是轴向磁通量分量， $A$  表示碳纳米管的截面面积， $w$  表示碳纳米管的横向振动位移。

### 2.2. 波动方程

基于非局部欧拉梁理论，研究磁场环境下双壁输流碳纳米管中波的传播特性简图见图 1。假设双壁碳纳米管内流体是不可压且无旋无粘流体，不考虑重力作用，流体在管道内以恒定流速流动。由文献 13 可知基于非局部欧拉梁模型的输流双壁碳纳米管的波动方程

$$\begin{aligned} EI_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + (m_1 + m_f) \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + 2m_f u \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial t} + m_f u^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - C_{21}(w_2 - w_1) \\ - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ (m_1 + m_f) \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + 2m_f u \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial t} + m_f u^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - C_{21}(w_2 - w_1) \right] = 0. \quad (2) \\ EI_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + m_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} - C_{12}(w_1 - w_2) - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ m_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} - C_{12}(w_1 - w_2) \right] = 0. \end{aligned}$$

式中  $E$  是弹性模量， $I_j, j=1,2$  是内外管的惯性矩， $m_1, m_2, m_f$  分别表示内外管和流体的质量， $u$  是流体速度， $C_{12}, C_{21}$  表示两层管间的范德华力作用系数，可表示为

$$C_{ij} = \left[ \frac{1001\pi\epsilon\sigma^{12}}{3a^4} H_{ij}^{13} - \frac{1120\pi\epsilon\sigma^6}{9a^4} H_{ij}^7 \right] R_i R_j, \quad (3)$$

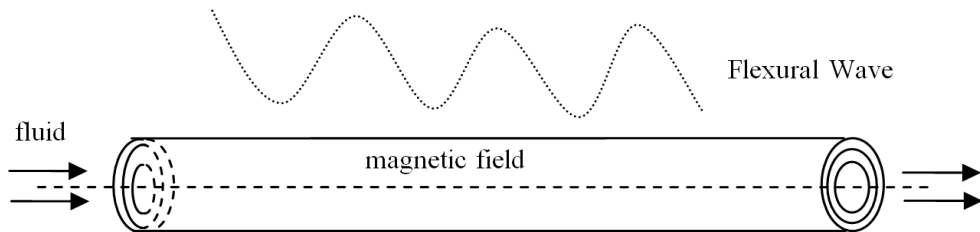


Figure 1. Schematic diagram of wave propagation in fluid-conveying double-walled carbon nanotubes  
图 1. 输流双壁碳纳米管中波的传播示意图

其中

$$H_{ij}^m = (R_i + R_j)^{-m} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{[1 - K_{ij} \cos^2 \theta]^{m/2}} \quad (m=7,13), \quad K_{ij} = \frac{4R_i R_j}{(R_i + R_j)^2}. \quad (4)$$

$\sigma, \varepsilon$  分别表示 Lennard-Jones 势中的范德华半径和势阱深度,  $a = 0.142 \text{ nm}$  是碳-碳键长度,  $R_j$  是第  $j$  层管的半径[15]。考虑磁场的作用, 利用牛顿定律得到磁场环境下输流双壁碳纳米管的波动方程

$$\begin{aligned} & EI_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + (m_1 + m_f) \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + 2m_f u \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial t} + m_f u^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \eta A_1 H_x^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - C_{21} (w_2 - w_1) \\ & - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ (m_1 + m_f) \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + 2m_f u \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial t} + m_f u^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \eta A_1 H_x^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - C_{21} (w_2 - w_1) \right] = 0, \quad (5) \\ & EI_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + m_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} - \eta A_2 H_x^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} - C_{12} (w_1 - w_2) - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ m_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} - \eta A_2 H_x^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} - C_{12} (w_1 - w_2) \right] = 0. \end{aligned}$$

### 3. 波的传播分析

输流双壁碳纳米管的波动方程(5)的解可设为如下形式

$$w_j = W_j \exp(i(kx - \omega t)), \quad j=1,2, \quad (6)$$

其中  $W_j, j=1,2$  表示内外管的振幅,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $k$  是波数,  $\omega$  是波的圆频率。

将(6)式代入方程(5), 得到关系式

$$\begin{aligned} & EI_1 k^4 W_1 - (m_1 + m_f) \omega^2 W_1 + 2m_f u k \omega W_1 - m_f u^2 k^2 W_1 + \eta A_1 H_x^2 k^2 W_1 - C_{21} (W_2 - W_1) \\ & + (e_0 a)^2 k^2 \left[ -(m_1 + m_f) \omega^2 W_1 + 2m_f u k \omega W_1 - m_f u^2 k^2 W_1 + \eta A_1 H_x^2 k^2 W_1 - C_{21} (W_2 - W_1) \right] = 0, \quad (7) \\ & EI_2 k^4 W_2 - m_2 \omega^2 W_2 - C_{12} (W_1 - W_2) + \eta A_2 H_x^2 k^2 W_2 \\ & + (e_0 a)^2 k^2 \left[ -m_2 \omega^2 W_2 - C_{12} (W_1 - W_2) + \eta A_2 H_x^2 k^2 W_2 \right] = 0. \end{aligned}$$

改写成,

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

其中  $A_{11} = S_1 k^4 + S_2 k^3 + S_3 k^2 + S_4 k + S_5$ ,  $A_{12} = -C_{21} - C_{21} (e_0 a)^2 k^2$ ,  $A_{21} = -C_{12} - C_{12} (e_0 a)^2 k^2$ ,  $A_{22} = S_6 k^4 + S_7 k^2 + S_8$ ,  $S_1 = EI_1 + (e_0 a)^2 (-m_f u^2 + \eta A_1 H_x^2)$ ,  $S_2 = 2(e_0 a)^2 m_f u \omega$ ,  $S_3 = -m_f u^2 + \eta A_1 H_x^2 + (e_0 a)^2 (-(m_1 + m_f) \omega^2 + C_{21})$ ,  $S_4 = 2m_f u \omega$ ,  $S_5 = -(m_1 + m_f) \omega^2 + C_{21}$ ,  $S_6 = EI_2 + (e_0 a)^2 \eta A_2 H_x^2$ ,  $S_7 = \eta A_2 H_x^2 + (e_0 a)^2 (-m_2 \omega^2 + C_{12})$ ,  $S_8 = -m_2 \omega^2 + C_{12}$ 。

输流双壁碳纳米管中波的传播的色散关系可由方程(9)存在非零解的条件

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

得到。忽略磁场的影响, 模型简化为文献 13 中的波动方程。

### 4. 数值结果及讨论

选取双壁碳纳米管的有效参数如下: 杨氏模量  $E = 1 \text{ TPa}$ , 碳纳米管的密度  $\rho_c = 2300 \text{ kg/m}^3$ , 流体密度  $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$ 。碳纳米管的内管半径  $R = 3.4 \text{ nm}$ , 碳纳米管的壁厚  $h = 0.34 \text{ nm}$ 。根据 Wang [16]关

于非局部参数的理论，选取非局部参数  $e_0a$  在 0 nm~2.0 nm 之间进行计算。

图 2 描述了无流体和管内流体流速  $u = 1000$  m/s，非局部参数  $e_0a = 1.0$  nm，磁通量  $H_x = 0$  时双壁碳纳米管的色散关系。对于无流体和有流体的双壁碳纳米管，随着波数的增大，系统的一阶和二阶模态频率增大，且有流体时的频率小于无流体时的频率。当波数较大时，管内流体对波的二阶频率的影响可忽略，但对一阶频率的影响较明显。随波数增大，管内有流体流动时一阶和二阶模态频率的差异较无流体时显著增大。

选取磁导率  $\eta = 4\pi \times 10^{-7}$ ，管内流体流速  $u = 1000$  m/s，非局部参数  $e_0a = 1.0$  nm，磁场对输流双壁碳纳米管中波的传播特性的影响见图 3。从图 3 可以看出，磁场对输流双壁碳纳米管的波动特性有明显的影 响。轴向磁通量分量越大，输流双壁碳纳米管中波的传播频率也越大。

图 4 和图 5 描述了不同波数和磁通量下非局部参数对波的频率的影响。可以看出，随着非局部参数的增大，波的传播频率减小，与文献 13 的结论一致。当波数较小时，如图 4，波数  $k = 5 \times 10^8$  m<sup>-1</sup>，随着非局部参数增大，对应于磁通量  $H_x = 10^9$  A/m，当非局部参数  $e_0a$  从 0 增大到  $e_0a = 2.0$  nm 时，一阶频率降低 14.06%，二阶频率降低 15.41%，而当磁通量  $H_x = 2 \times 10^9$  A/m 时，随着非局部参数的增大，一阶和二阶频率的降幅分别为 6% 和 7%。当波数较大时，如  $k = 10^9$  m<sup>-1</sup> 时(见图 5)，磁通量  $H_x = 10^9$  A/m，当非局部参数  $e_0a$  从 0 增大到  $e_0a = 2.0$  nm 时，一阶频率降低 41.62%，二阶频率降低 43.75%，磁通量  $H_x = 2 \times 10^9$  A/m 时，对着非局部参数增大，一阶和二阶频率的降幅分别为 25.33% 和 27.97%。由上述数据可知，磁场和非局部参数对输流双壁碳纳米管中波的传播有重要影响。随着波数的增大，非局部效应加强，而增强磁场，会减弱非局部效应。

## 5. 结论

本文研究了磁场环境下输流双壁碳纳米管中弯曲波的传播特性。基于欧拉梁理论和非局部弹性理论，考虑磁场的影响对输流双壁碳纳米管进行建模，通过绘制不同情况下的色散关系图，经过分析得到以下结论：

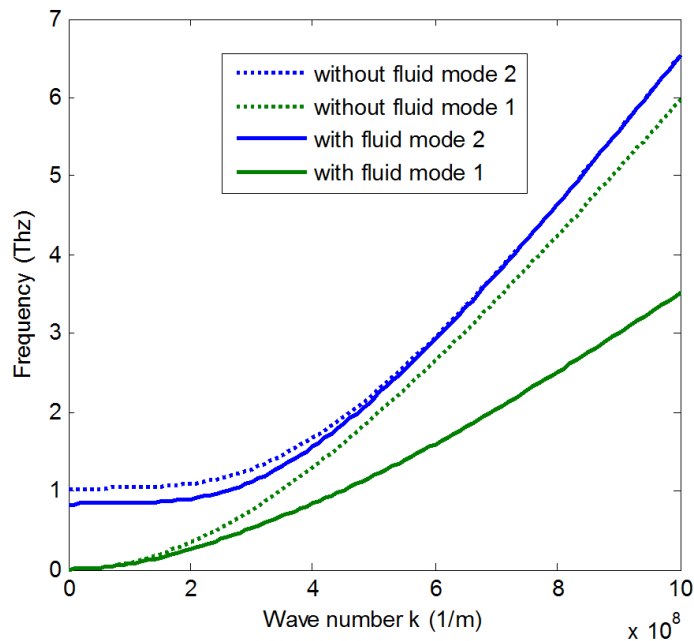
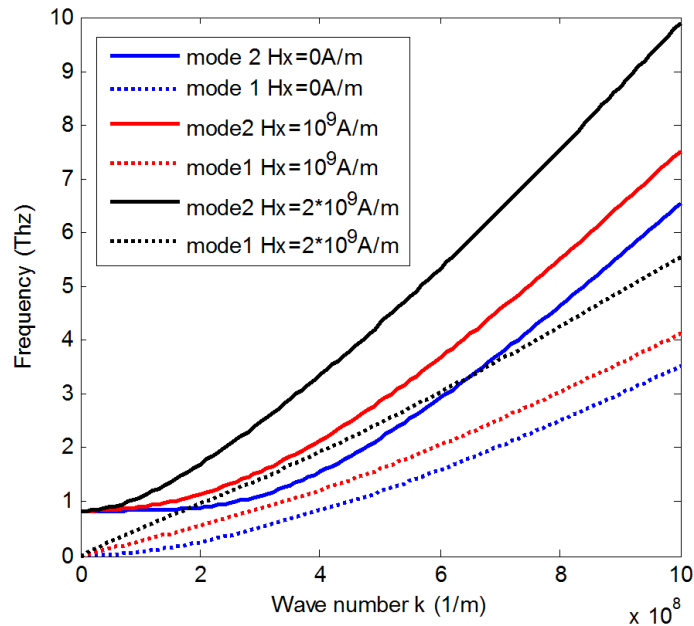


Figure 2. Dispersion relation for the doubled-walled nanotubes with  $e_0a = 1$  nm

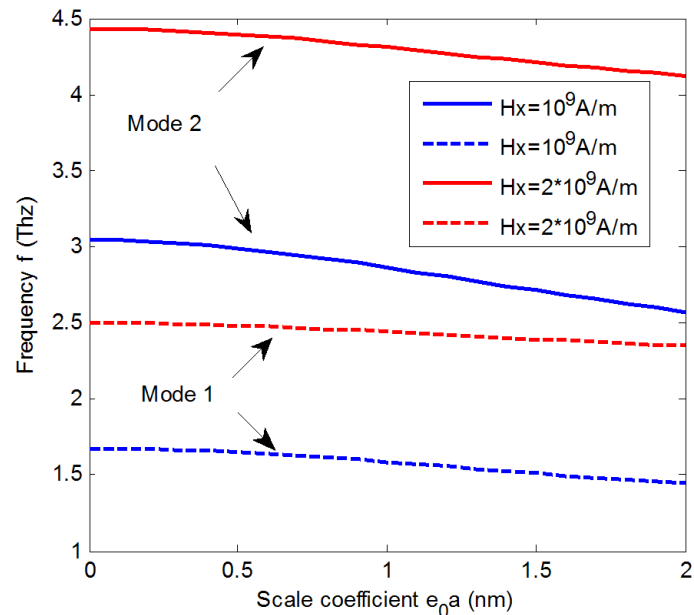
图 2.  $e_0a = 1$  nm 时双壁碳纳米管的色散关系图

1) 对于双壁碳纳米管，随着波数的增大，系统的一阶和二阶模态频率增大，且管内有流体流动时的频率小于无流体时的频率。当波数较大时，管内流体对波的二阶频率的影响可忽略，但对一阶频率的影响较明显。随波数增大，管内有流体流动时一阶和二阶模态频率的差异较无流体时显著增大。



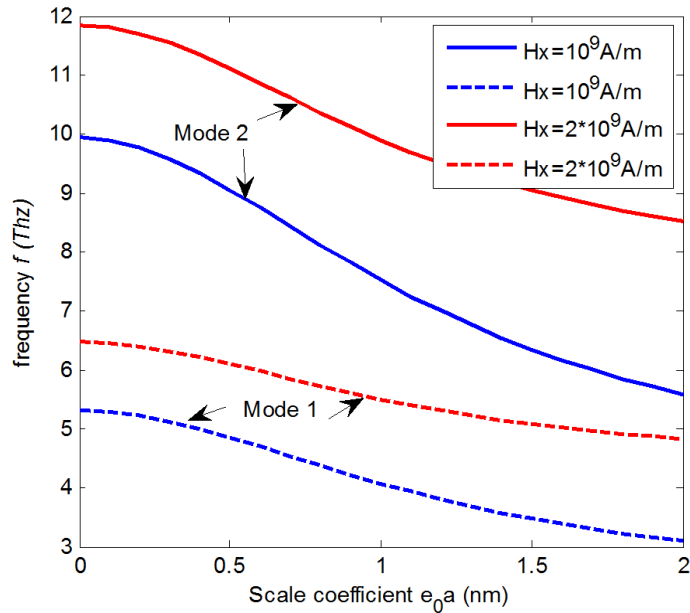
**Figure 3.** Dispersion relation for the doubled-walled nanotubes with  $e_0a = 1$  nm

**图 3.**  $e_0a = 1$  nm 时双壁碳纳米管的色散关系图



**Figure 4.** Scale coefficient vs. frequency with different magnetic flux, fluid velocity  $u = 500$  m/s, wave number  $k = 5 \times 10^8$  m<sup>-1</sup>

**图 4.** 不同磁通量下频率随非局部参数的变化图，流体流速  $u = 500$  m/s，波数  $k = 5 \times 10^8$  m<sup>-1</sup>



**Figure 5.** Scale coefficient vs. frequency with different magnetic flux, fluid velocity  $u = 500$  m/s, wave number  $k = 10^9$  m<sup>-1</sup>

**图 5.** 不同磁通量下频率随非局部参数的变化图, 流体流速  $u = 500$  m/s, 波数  $k = 10^9$  m<sup>-1</sup>

2) 磁场对输流双壁碳纳米管的波动特性有明显的影响。轴向磁通量分量越大, 输流双壁碳纳米管中波传播频率也越大。随着波数的增大, 非局部效应加强, 而增强磁场, 则会减弱非局部效应。研究结果可为纳米材料的应用提供理论依据。

## 基金项目

国家自然科学基金资助(No. 11402087)和中央高校专项科研业务费(No. 2016MS64)。

## 参考文献 (References)

- [1] Iijima, S. (1991) Helical Microtubules of Graphitic Carbon. *Nature*, **354**, 56-58. <http://dx.doi.org/10.1038/354056a0>
- [2] 甄亚欣. 输流碳纳米管的动力学行为研究[D]: [博士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2012.
- [3] Govindjee, C.F. and Sackman, J.L. (1999) On the Use of Continuum Mechanics to Estimate the Properties of Nanotubes. *Solid State Communications*, **110**, 227-230. <http://dx.doi.org/10.1038/354056a0>
- [4] Sohlberg, K., Sumpter, B.G., Tuzun, R.E., et al. (1998) Continuum Methods of Mechanics as a Simplified Approach to Structural Engineering of Nanostructures. *Nanotechnology*, **9**, 30-36. <http://dx.doi.org/10.1088/0957-4484/9/1/004>
- [5] Eringen, A.C. (1972) Nonlocal Polar Elastic Continua. *International Journal of Engineering Science*, **10**, 1-16. [http://dx.doi.org/10.1016/0020-7225\(72\)90070-5](http://dx.doi.org/10.1016/0020-7225(72)90070-5)
- [6] Eringen, A.C. and Edelen, D.G.B. (1972) On Nonlocal Elasticity. *International Journal of Engineering Science*, **10**, 233-248. [http://dx.doi.org/10.1016/0020-7225\(72\)90039-0](http://dx.doi.org/10.1016/0020-7225(72)90039-0)
- [7] Yoon, J., Ru, C.Q. and Mioduchowski, A. (2003) Sound Wave Propagation in Multiwall Carbon Nanotubes. *Journal of Applied Physics*, **93**, 4801-4806. <http://dx.doi.org/10.1063/1.1559932>
- [8] Natsuki, T., Tantrakarn, K. and Endo, M. (2004) Prediction of Elastic Properties for Single-Walled Carbon Nanotubes. *Carbon*, **42**, 39-45. <http://dx.doi.org/10.1016/j.carbon.2003.09.011>
- [9] Dong, K., Wang, X. and Sheng, G.G. (2007) Wave Dispersion Characteristics in Fluid-Filled Carbon Nanotubes Embedded in an Elastic Medium. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, **15**, 427-439. <http://dx.doi.org/10.1088/0965-0393/15/5/004>
- [10] Natsuki, T., Ni, Q.Q., Hayashi, T., et al. (2008) Wave Propagation in Double-Walled Carbon Nanotubes Conveying

- Fluid. *Journal of Applied Physics*, **103**, 094312(1-5).
- [11] Natsuki, T., Ni, Q.Q. and Endo, M. (2009) Analysis of the Vibration Characteristics of Fluid-Conveying Double-Walled Carbon Nanotubes. *Journal of Applied Physics*, **105**, 094328(1-5).
- [12] 王立峰, 郭万林, 胡海岩. 管内流体对单壁碳纳米管中弯曲波频散的影响[J]. 力学季刊, 2009, 30(1): 23-27.
- [13] Wang, Y.Z., Li, F.M. and Kishimoto, K. (2010) Wave Propagation Characteristics in Fluid-Conveying Double-Walled Nanotubes with Scale Effects. *Computational Materials Science*, **48**, 413-418.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.commatsci.2010.01.034>
- [14] Narendar, S., Gupt, S.S. and Gopalakrishnan, S. (2012) Wave Propagation in Single-Walled Carbon Nanotube under Longitudinal Magnetic Field Using Nonlocal Euler-Bernoulli Beam Theory. *Applied Mathematical Modelling*, **36**, 4529-4538. <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2011.11.073>
- [15] He, X.Q., Kitipornchai, S. and Liew, K.M. (2005) Buckling Analysis of Multi-Walled Carbon Nanotubes: A Continuum Model Accounting for Van Der Waals Interaction. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, **53**, 303-326.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.jmps.2004.08.003>
- [16] Wang, Q. (2005) Wave Propagation in Carbon Nanotubes via Nonlocal Continuum Mechanics. *Journal of Applied Physics*, **98**, 124301(1-6).

**期刊投稿者将享受如下服务:**

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>