

Collision Rules and Digital Circuit Implementation of the FHP-II Lattice Gas Automata in Fluid Mechanics

Ting Li^{1,2}, Boyu Wang¹, Jianhua Chen¹, Guangwu Yan^{1*}

¹College of Mathematics, Jilin University, Changchun Jilin

²College of Science, Jilin Institute of Chemical Technology, Jilin Jilin

Email: lit_jlic@126.com, yangw_jlu@126.com

Received: Nov. 23rd, 2018; accepted: Dec. 11th, 2018; published: Dec. 18th, 2018

Abstract

In this paper, a digital circuit for simulating the evolution rules of the FHP-II lattice gas automaton model for incompressible flow is presented. Using this circuit, the Look-Up table of FHP-II is generated. As an example, we simulate the square cavity flow with small Reynolds number. The classical numerical results are reproduced.

Keywords

Lattice Gas Automata, FHP-II Model, Look-Up Table, Digital Circuit

用于流体力学的FHP-II格子气自动机的碰撞规则数字电路实现

李 婷^{1,2}, 王博宇¹, 陈建华¹, 闫广武^{1*}

¹吉林大学数学学院, 吉林 长春

²吉林化工学院理学院, 吉林 吉林

Email: lit_jlic@126.com, yangw_jlu@126.com

收稿日期: 2018年11月23日; 录用日期: 2018年12月11日; 发布日期: 2018年12月18日

摘 要

本文给出了用于模拟不可压缩流动的FHP-II格子气自动机模型中演化规则的数字电路。利用这个电路, *通讯作者。

文章引用: 李婷, 王博宇, 陈建华, 闫广武. 用于流体力学的 FHP-II 格子气自动机的碰撞规则数字电路实现[J]. 流体动力学, 2018, 6(4): 143-149. DOI: 10.12677/ijfd.2018.64018

生成了FHP-II的Look-Up表。作为算例，我们模拟了小雷诺数的方腔流动，再现了经典的数值结果。

关键词

格子气自动机, FHP-II模型, Look-Up表, 数字电路

Copyright © 2018 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

上个世纪 80 年代出现的格子气自动机(Lattice Gas Automata, 简记 LGA)是模拟流体力学一种方法, 由于其无舍入误差和运行速度快等优点受到学术界广泛关注[1] [2]。Frisch 等人应用正六边形网格, 构造了包含静止粒子的满足泡利不相容原理的格子气自动机, 解决了四阶张量各项同性问题, 得到了低雷诺数限制的 Navier-Stokes 方程, 该模型被称为 FHP-II 模型[1]。随后的 d'Humières, Lallemand 和 Frisch 引入了四维的超四面体 FCHC 网格将 FHP 模型推广到了三维问题上[3]。应用 LGA, 研究者们已经成功地模拟了许多流动, 例如: 卡门涡街[4]、磁流体力学[5] [6]、反应扩散模型[7]、Kelvin 不稳定[8]。

格子气自动机的运算是通过对每点的输入状态进行翻转实现的, 翻转规则又称演化规则。根据演化规则将所有的输入状态翻转成输出状态, 这个二维关系称为 Look-Up 表[8] [9]。这样 LGA 的运算速度很大程度上取决于 Look-Up 表的查找速度。文[9] [10]给出了 Look-Up 表状态编码的抽取和合成方法, 并且用这样的 Look-Up 表实现了几种流动的模拟。到了 21 世纪, 量子格子气自动机应运而生。量子格子气是基于传统格子气的设计思想, 将 Look-Up 表进行量子实现, 预期能使数据的处理和计算速度得到大幅度的提升。由此可见, Look-Up 表是格子气自动机乃至量子格子气自动机的重要组成部分, 而 Look-Up 表的数字逻辑电路的研究是硬件的基础。本文以 FHP-II 格子气自动机为例, 给出了其 Look-Up 表的逻辑电路, 并用这个电路验证了 Look-Up 表的正确性, 进一步, 我们用这样的结果模拟了小雷诺数的方腔流动。

2. FHP-II 格子气自动机的演化规则

2.1. FHP-II 碰撞规则

我们将二维空间离散成正六边形的网格, 每个节点有 6 个邻点, 假设粒子满足泡利不相容原理, 则每个节点上的状态变量 $S(i, j, k)$ 是一个 Boolean 量, 当 k 方向存在粒子时 $S(i, j, k) = 1$, 否则为零。其中 i, j 表示节点坐标, k 代表粒子运动的 7 个方向(静止状态也表示为一个方向, 取 $k = 7$), 这 7 个运动方向的定义如图 1。

FHP-II 格子气自动机共提供 4 类碰撞规则, 这些规则满足粒子守恒和动量守恒。基于流体介质的各项同行要求, 碰撞是满足旋转对称的, 这样一共有 17 种具体的规则[9] [10]。

1) 两个粒子对头碰撞, 1、4 方向碰撞, 输出为 3、6 方向, 或者 2、5 方向。通过旋转, 这种对头碰撞有 3 种情况。

2) 一运动粒子与一静止粒子碰撞, 1、7 碰撞, 输出为 2、5 方向, 这种有 6 种情况。

3) 两粒子 120 度输入, 得到一静止粒子和第三个方向, 即 2、6 方向碰撞输出为 1、7 方向, 共 6 种情况。

4) 夹角 120 度的三粒子碰撞，即 1、3、5，碰撞输出为 2、4、6 方向，共 2 种情况。

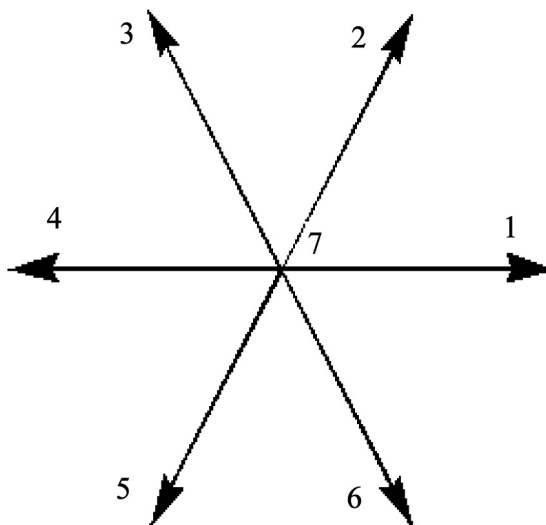


Figure 1. Schematic diagram of node orientation
图 1. 节点方向示意图

2.2. Boolean 动力学方程

上面的 FHP-II 格子气自动机的碰撞规则，可以用 Boolean 动力学方程描述[11]:

$$\begin{aligned}
 R_1 = & S_1 + S_2 S_7 (1 - S_1)(1 - S_3)(1 - S_4)(1 - S_5)(1 - S_6) \\
 & + S_6 S_7 (1 - S_1)(1 - S_2)(1 - S_3)(1 - S_4)(1 - S_5) \\
 & + \frac{1}{2} S_3 S_6 (1 - S_1)(1 - S_2)(1 - S_4)(1 - S_5)(1 - S_7) \\
 & + \frac{1}{2} S_2 S_5 (1 - S_1)(1 - S_3)(1 - S_4)(1 - S_6)(1 - S_7) \\
 & + S_2 S_6 (1 - S_1)(1 - S_3)(1 - S_4)(1 - S_5)(1 - S_7) \\
 & + S_2 S_4 S_6 (1 - S_1)(1 - S_3)(1 - S_5)(1 - S_7) \\
 & - S_1 S_7 (1 - S_2)(1 - S_3)(1 - S_4)(1 - S_5)(1 - S_6) \\
 & - S_1 S_4 (1 - S_2)(1 - S_3)(1 - S_5)(1 - S_6)(1 - S_7) \\
 & - S_1 S_3 (1 - S_2)(1 - S_4)(1 - S_5)(1 - S_6)(1 - S_7) \\
 & - S_1 S_5 (1 - S_2)(1 - S_3)(1 - S_4)(1 - S_6)(1 - S_7) \\
 & - S_1 S_3 S_5 (1 - S_2)(1 - S_4)(1 - S_6)(1 - S_7)
 \end{aligned}$$

其中， $S_k = S(i, j, k)$ ， $R_k = R(i, j, k)$ ，同理可得类似的 R_2, R_3, \dots, R_7 的 Boolean 动力学方程。上述方程中的运算均为逻辑运算，式子中的 $\frac{1}{2}$ 表示发生概率。我们将输入状态排列成 7 位的二进制数，其对应的整数称为状态数。同样输出状态也可以表示成状态数。这样，在任何一个输入便得到输出，根据上面的演化规则，以及 Boolean 动力学方程，可得到输入输出的二维关系表，即 Look-Up 表。表 1 给出了 FHP-II 模型的 Look-Up 表。图 2 中，我们给出了发生碰撞的输入输出的状态分布。可以发现，大多数的输入数与输出数相同，这表示只有 17 个情况发生碰撞，与前文 2.1 部分的理论结果一致。

Table 1. Look-Up table of FHP-II lattice gas automata
表 1. FHP-II 格子气自动机的 Look-Up 表

碰撞前的状态	碰撞后的状态 1	碰撞后的状态 2	碰撞类型
5	66	66	三
9	36	18	一
10	68	68	三
17	96	96	三
18	36	9	一
20	72	72	三
21	42	42	四
34	65	65	三
36	18	9	一
40	80	80	三
42	21	21	四
65	34	34	二
66	5	5	二
68	10	10	二
72	20	20	二
80	40	40	二
96	17	17	二

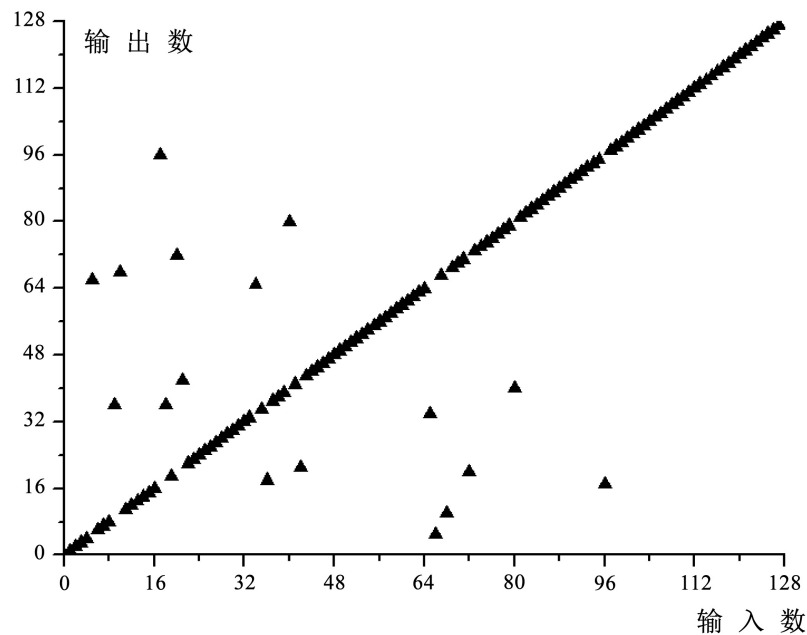


Figure 2. Figure of relation between input number and output number
图 2. 输入数与输出数的关系图

2.3. FHP-II 碰撞规则的数字逻辑电路

图 3 中分别给出了输出 $P_1 \dots P_{11}$ ，其中符号 $\square \&$ 表示与门电路，符号 $\square \neg$ 表示非门电路，符号 $\square +$ 表示或门电路，符号 $\square \oplus$ 表示异或门电路，符号 \triangleright 表示在两个输入端中随机取其中一个的判断器。

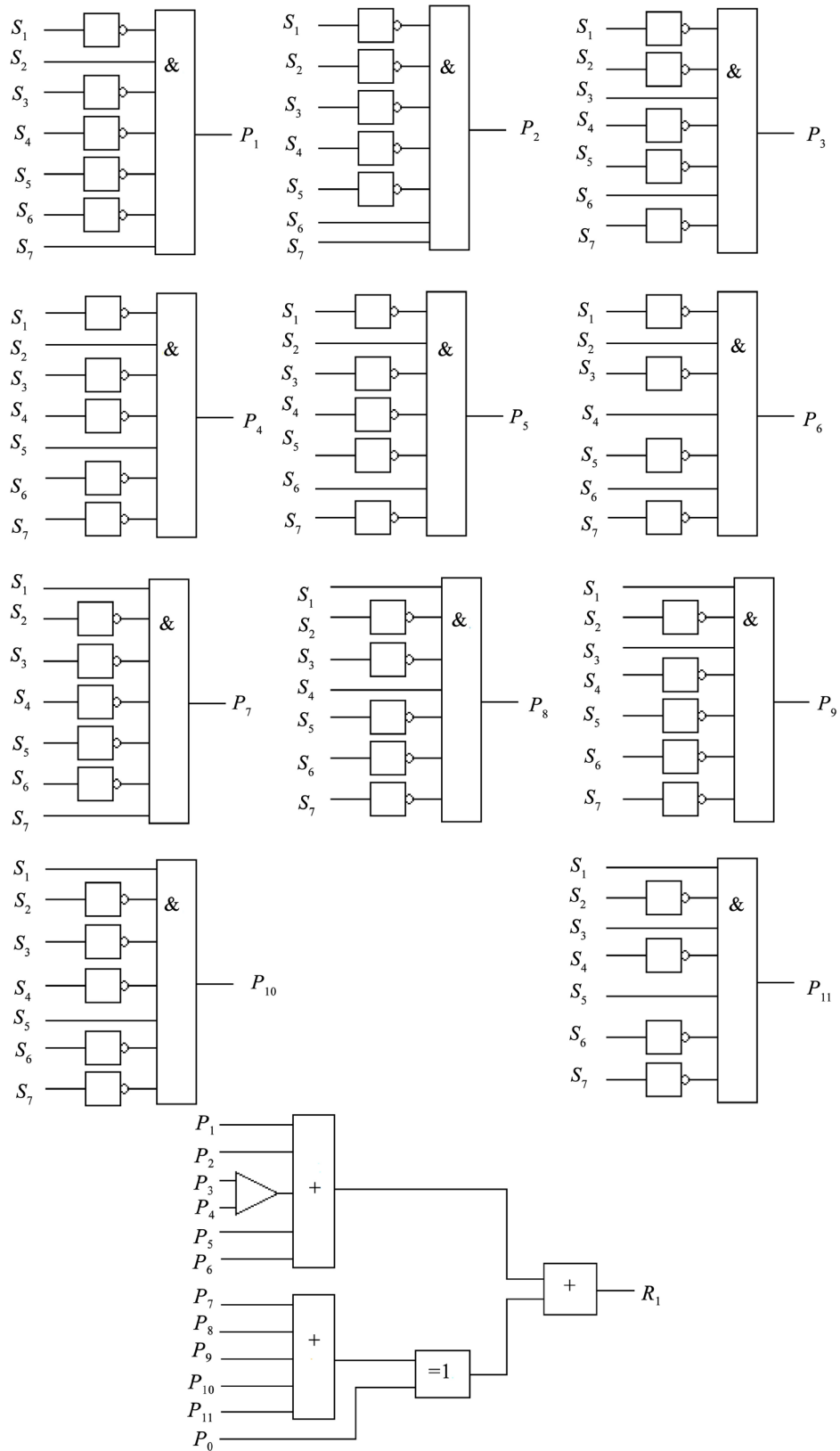


Figure 3. Circuit representation of R_1
 图 3. R_1 的电路表示图

同样的, 如果分别设 $P_0 = S_2, S_3, \dots, S_7$, 我们也可以得到 R_2, \dots, R_7 的电路图。如果将各个 R 的电路表示做成一个小的电路元件, 那么以上的所有电路可以整合成如下的总电路图, 如图 4。

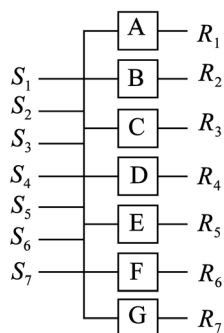


Figure 4. The digital circuit of FHP-II rule

图 4. FHP-II 规则的数字电路

其中, 带小方格的 A, B, \dots, G 分别为表示 R_1, R_2, \dots, R_7 的电路元件。这样, 只要输入一组 S_1, S_2, \dots, S_7 的值, 我们便可以立即得到 FHP-II 规则下对应的 R_1, R_2, \dots, R_7 的值。

为了验证电路图的可靠性, 我们给出所有的 S_1, S_2, \dots, S_7 的取值, 利用上述电路图得出的 R_1, R_2, \dots, R_7 的值, 与利用碰撞规则和 Boolean 动力学的结果完全一致。

3. 算例

作为算例, 我们利用上面的逻辑电路生成 Look-Up 表进行计算。在程序中, 先将 Look-Up 表读入内存, 然后, 在每个迭代步中进行查表。具体的例子是方腔流动。

选择网格数 128×128 , 方腔上边界速度 $U = 0.2$, 雷诺数 $Re = 30.71$, 迭代 50,000 步, 从 48,000 步开始做时间统计平均。方腔的下、左、右边界均为无滑移边界条件[12], 在方腔上边界处放置一个均匀向右运动的薄板, 这意味着上边界是均匀流动并且方腔内的流体质点运动到上边界后“回弹”至方腔流体内部。

从图 5(a)中可以看到, 方腔内部存在一个顺时针的大涡旋, 方腔右下角处存在类似涡旋的混乱, 图 5(b)给出了方腔流动的流线图。可以清楚看到涡旋出现, 再现了该问题经典算法的定性结果[13]。

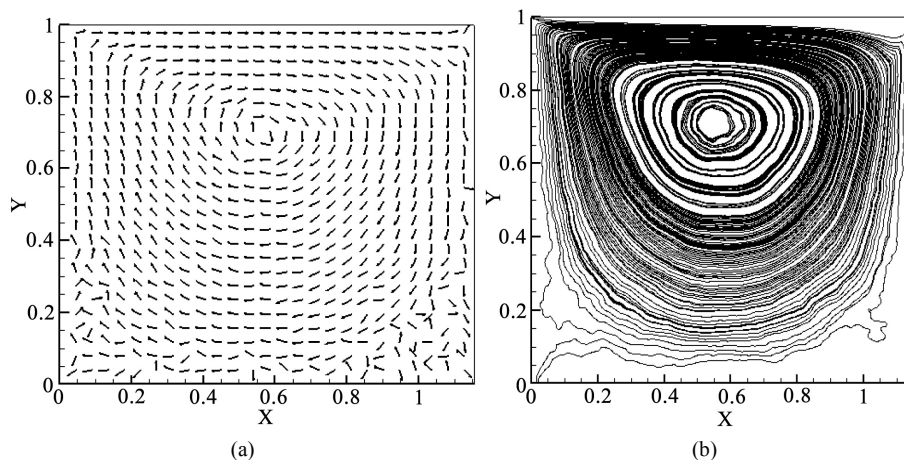


Figure 5. (a) Velocity field in square cavity flow, (b) Streamline

图 5. (a) 方腔流动速度场, (b) 流线

4. 结论

本文给出了 FHP-II 格子气自动机的演化规则的数字逻辑电路, 利用此逻辑电路达到的结果与利用碰撞规则和 Boolean 动力学的结果完全一致。在此基础上, 我们计算了小雷诺数的方腔流动, 结果是令人满意的。

Look-Up 表的逻辑线路是格子气自动机电路的主要部分, 仍然有许多问题需要研究, 例如将流的过程加入数字电路中, 更进一步, 整体格子气自动机的线路的实现将是非常有意义的。

致 谢

国家自然科学基金(NO. 11602033, NO. 11272133)资助。

参考文献

- [1] Frisch, U., Hasslacher, B. and Pomeau, Y. (1986) Lattice Gas Automaton for the Navier-Stokes Equation. *Physical Review Letters*, **56**, 1505-1508. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.56.1505>
- [2] Wolfram, S. (1986) Cellular Automaton Fluids I: Basic Theory. *Journal of Statistical Physics*, **45**, 471-526. <https://doi.org/10.1007/BF01021083>
- [3] Frisch, U., d'Humières, D., Hasslacher, B., Lallemand, P., Pomeau, Y. and Riet, J.-P. (1987) *Lattice Gas Hydrodynamics in Two and Three Dimensions*. *Complex Systems*, **1**, 649-707.
- [4] Clavin, P., d'Humieres, D., Lallemand, P. and Pomeau, Y. (1986) Cellular Automata for Hydrodynamics with Free Boundaries in Two and Three Dimensions. *C. R. Acad. Sci. Paris II*, **303**, 1169-1174. https://www.researchgate.net/publication/279591285_Cellular_automata_for_hydrodynamics_with_free_boundaries_in_two_and_three_dimensionsAutomates_cellulaires_pour_les_problemes_a_frontieres_libres_en_hydrodynamique_a_deux_et_trois_dimensions
- [5] Vahala, L., Vahala, G. and Yopez, J. (2003) Lattice Boltzmann and Quantum Lattice Gas Representations of One-Dimensional Magneto Hydrodynamic Turbulence. *Physics Letters A*, **306**, 227-234. [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(02\)01599-2](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(02)01599-2)
- [6] Chen, H. and Metthaeua, W.H. (1987) New Cellular Automaton Model for Magneto Hydrodynamics. *Physical Review Letters*, **58**, 1845-1848. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.58.1845>
- [7] Montgomery, D. and Doolen, G. (1987) Two Cellular Automata for Plasma Computations. *Complex Systems*, **4**, 831-838.
- [8] Clavin, P., Lallemand, P., Pomeau, Y. and Searby, G.Y. (1988) Simulation of Free Boundaries in Flow Systems by Lattice-Gas Models. *Journal of Fluid Mechanics*, **188**, 437-464. <https://doi.org/10.1017/S0022112088000795>
- [9] 陈建华. FHP-II 格子气自动机的碰撞规则及数字电路实现[D]: [硕士学位论文]. 长春: 吉林大学, 2018.
- [10] 王博宇. 用于求解流体动力学问题的 FHP-II 格子气自动机及程序实现[D]: [硕士学位论文]. 长春: 吉林大学, 2017.
- [11] Wolf-Glodrow, D.A. (1991) *Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [12] 闫广武. 二维直角弯道中粘性流动的格子气体仿真[D]: [硕士学位论文]. 长春: 吉林大学, 1988.
- [13] Yan, B. and Yan, GW. (2011) A Steady-State Lattice Boltzmann Model for Incompressible Flows. *Computers and Mathematics with Applications*, **61**, 1348-1354. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2010.12.078>

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2328-0557，即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：ijfd@hanspub.org