

Kinematic Modeling Method of Four-Bar Mechanism with Screw Pair

Zhensong Ni, Ruikun Wu*

The School of Electronic and Information Engineering, Fuqing Branch of Fujian Normal University, Fuzhou Fujian
Email: 460532802@qq.com, *843772511@qq.com

Received: Feb. 18th, 2016; accepted: Mar. 11th, 2016; published: Mar. 14th, 2016

Copyright © 2016 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

In this paper, kinematic modeling of the robot with a screw pair (H) has been studied. Irregular terrain of the screw pair (H) mobile robot kinematics modeling method—Chebyshev shortening algorithm has been put forward. Based on the analysis of kinematic analysis of spatial linkage mechanism with a screw pair (H), the vector expression of the position and attitude equation of the mechanism has been established. Taking the space HSSH mechanism as an example, the motion analysis has been carried out. According to the established vector equation of HSSH establish motion analysis model of closed loop, motion analysis equations and vector operation are adopted to eliminate intermediate variables by using the Chebyshev polynomials of sine and cosine transformation degree, thus solving degree; Chebyshev approximation method can provide approximate solutions to screw pair (H) of spatial mechanism kinematics problem by measuring means of error. This paper presents the method and the process of Chebyshev shortening algorithm and analyzes the characteristics of the Chebyshev shortening algorithm. The correctness of the proposed modeling method has been verified through experimental studies and simulations.

Keywords

Screw Pair, Chebyshev Shortening Algorithm, Kinematic Analysis, Spatial Linkage Mechanism

带有螺旋副空间四杆机构运动学建模方法

倪振松, 吴瑞坤*

福建师范大学福清分校电子与信息工程系, 福建 福州

*通讯作者。

摘要

本文研究带有螺旋副(H)机器人运动学建模方法问题, 提出用于不规则地形下的螺旋副(H)移动机器人运动学建模方法——切比雪夫缩短算法。在分析带有螺旋副(H)空间连杆机构的运动学分析基础上, 建立机构的位姿方程的矢量表达式。以空间HSSH机构为例, 对其进行运动分析。先根据机构的封闭环建立矢量方程对HSSH机构建立运动分析模型, 得到运动分析方程, 采用矢量运算消除一些中间变量, 得出关于度数和正弦、余弦的方程, 利用切比雪夫多项式将正弦和余弦转化为度的关系式, 从而求解度数。通过误差分析可知, 切比雪夫函数逼近方法可以近似求解具有螺旋副(H)的空间机构学运动学问题。本文从中阐述切比雪夫缩短算法的方法和过程, 并分析切比雪夫缩短算法的特点, 用试验和仿真验证该建模方法的正确性。

关键词

螺旋副, 切比雪夫缩短算法, 运动学分析, 空间连杆机构

1. 引言

空间连杆机构的组成类型, 常用 R、P、C、S、H 分别表示转动副、移动副、圆柱副、球面副、螺旋副。目前对 RSSR、RRSS、RCCC、RSSP 和 RSCS 等机构的研究较多[1]-[4]。螺旋副(H)目前多用于螺旋机构中。在一般的空间连杆机构中的应用还不多见, 主要原因在于含 H 副机构的分析、设计比较困难。得到的研究也很少。这是因为螺旋副存在平移和旋转角度的转化关系。空间连杆机构的分析综合均较平面连杆机构复杂困难, 这在很大程度上影响含有螺旋副空间连杆机构的推广应用。本文采用切比雪夫函数逼近方法对螺旋副 H 中的角度和正弦、余弦的关系, 用切比雪夫多项式来表示方程中的正弦和余弦, 展成都是关于角度的一元高次方程从而求得角度的值。计算表明采用切比雪夫方法可以对机器人和机构学的位置正解和反解进行近似求解提供了一种新思路。切比雪夫函数逼近法可以对一些复杂系统进行近似逼近从而达到求解目的具有很大的优点。

2. 切比雪夫多项式算法

切比雪夫(Chebyshev)多项式是 n 次迭代多项式, 在多项式里面对 $x = \cos \theta$, $\theta = \arccos x$, 则称 $T_n = \cos(n\theta) = \cos(n \arccos x)$ 为 n 阶切比雪夫多项式, 其中 $x \in [-1, 1]$, 切比雪夫多项式有如下递推关系:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \end{aligned} \quad (1)$$

切比雪夫多项式在三角函数逼近中的应用, 这是因为第一类切比雪夫多项式的根可以用于多项式插值, 并且提供多项式在三角函数的最佳逼近。设 $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ 是区间 $[a, b]$ 上 n 个互不相同的点, $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$, 则对任何 $x \in [a, b]$, 存在 $\xi_x \in \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, 使得拉格朗日插值余项 $R_n(x) = f(x) - L_n(x)$ 满足:

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi_x) \omega_n(x) \quad (2)$$

要使拉格朗日插值多项式 $L_n(x)$ 尽量逼近 $f(x)$, 就要使余项 $R_n(x)$ 尽量小, 插值多项式的余项取决于多项式次数 n , 插值节点 x_i 以及被逼近函数 $f(x)$ 的特性, 从公式(2)可以看出, 对于给定的具体问题, ξ_x 是未知数, $f(x)$ 是固定的, 当选择了合适的节点集, 就可以使拉格朗日插值余项 $R_n(x)$ 的最大值为极小。从切比雪夫多项式的定义可知, 只有定义在区间 $[-1,1]$ 上的函数 $f(x)$ 才能利用切比雪夫多项式逼近, 对于定义在区间 $[a,b]$ 上的函数, 可以按照(3)、(4)式进行变换, 将 $f(x)$ 转变为 $F(z)$ 就可以利用切比雪夫算法进行数据的拟合了[5]-[7]。

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} z \quad (3)$$

$$F(z) = f(x) = f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} z\right) \quad (4)$$

3. 空间四杆机构(HSSH)的运动分析

图 1 为空间 HSSH 机构[8]。空间 HSSH 机构由两个螺旋副以及机架连接, 连杆两端通过 B 、 C 两个球面副分别与两连架杆连接。按照 D-H 矩阵坐标系规定, 选取 k_1 、 k_4 轴分别与 A 螺旋副、 D 螺旋副轴线相重合, 因为螺旋副主要是旋转加平移构成的, 并且平移的距离是由旋转角确定的, 它们的比值大小为螺距 p 。

空间 HSSH 机构的结构参数为 h_1 、 h_2 、 h_4 、 $s_3(=1)$ 和 α_1 为常数。其中 s_1 是由螺旋角 θ_2 来判定, 这里假设 $s_1 = p\theta_2$ (p 为旋转 2π 时的螺距); 其中 s_4 是由螺旋角 θ_1 来判定, 这里假设 $s_4 = p\theta_1$ (p 为旋转 2π 时的螺距) 运动参数为输入螺旋角 θ_2 、输出螺旋角 θ_1 以及关于球面副 B 、 C 的两个欧拉变换中的 6 个欧拉角。通过运动学分析可以求得机构的输入输出方程式 $\theta_1 = f(\theta_2)$ 。

空间 HSSH 机构的运动学方程为

$$E_{12}E_{23}E_{34}E_{41} = [I] \quad (5)$$

式(5)中, E_{23} 、 E_{34} 为欧拉变换。式(5)可写为

$$E^{k\theta_2} E^{i\alpha_2} E_{23} E_{34} E^{k\theta_1} E^{i\alpha_1} = [I] \quad (6)$$

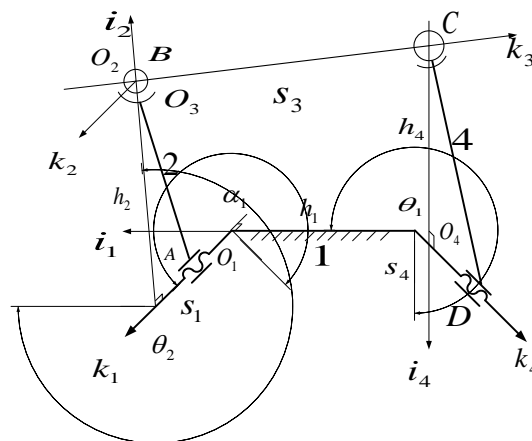


Figure 1. Spatial four-bar mechanism (HSSH)
图 1. 空间四杆结构(HSSH)

因为 $\alpha_2 = 0$, 所以有 $\mathbf{E}^{i\alpha_2} = [I]$, 式(6)可写为

$$\mathbf{E}^{k\theta_2} \mathbf{E}_{23} \mathbf{E}_{34} \mathbf{E}^{k\theta_1} \mathbf{E}^{i\alpha_1} = [I] \quad (7)$$

$$\mathbf{P} = h_1 \mathbf{i}_1 + s_1 \mathbf{k}_1 + h_2 \mathbf{i}_2 + l \mathbf{k}_3 + h_4 \mathbf{i}_4 - s_4 \mathbf{k}_4 = 0 \quad (8)$$

式(8)中

$$\mathbf{i}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i}_2 = \mathbf{E}^{k\theta_2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{E}^{k\theta_2} \mathbf{E}_{23} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i}_4 = \mathbf{E}^{k\theta_2} \mathbf{E}_{23} \mathbf{E}_{34} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

在式(7)等号两边依次右乘 $(\mathbf{E}^{i\alpha_1})^{-1}$ 、 $(\mathbf{E}^{i\theta_1})^{-1}$ 得

$$\mathbf{E}^{k\theta_2} \mathbf{E}_{23} \mathbf{E}_{34} = (\mathbf{E}^{i\alpha_1})^{-1} (\mathbf{E}^{k\theta_1})^{-1} = (\mathbf{E}^{i(-\alpha_1)}) (\mathbf{E}^{k(-\theta_1)}) \quad (10)$$

$$\mathbf{i}_4 = \mathbf{E}^{k\theta_2} \mathbf{E}_{23} \mathbf{E}_{34} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{E}^{i(-\alpha_1)} \mathbf{E}^{k(-\theta_1)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \\ -\cos \alpha_1 \sin \theta_1 \\ \sin \alpha_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{E}^{k\theta_2} \mathbf{E}_{23} \mathbf{E}_{34} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}^{i(-\alpha_1)} \mathbf{E}^{k(-\theta_1)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \alpha_1 \\ \cos \alpha_1 \end{bmatrix}$$

上面各式中, \mathbf{k}_3 因为有欧拉变换 \mathbf{E}_{23} , 所以设法将其消去。式(10)就可以改写为

$$l \mathbf{k}_3 = s_4 \mathbf{k}_4 - h_1 \mathbf{i}_1 - s_1 \mathbf{k}_1 - h_2 \mathbf{i}_2 - h_4 \mathbf{i}_4 \quad (11)$$

式(11)两边平方, 得到

$$\begin{aligned} (l \mathbf{k}_3)^2 &= (s_4 \mathbf{k}_4 - h_1 \mathbf{i}_1 - s_1 \mathbf{k}_1 - h_2 \mathbf{i}_2 - h_4 \mathbf{i}_4)^2 \\ &= s_4^2 + h_1^2 + s_1^2 + h_2^2 + s_4^2 - 2s_4 h_1 (\mathbf{k}_4 \cdot \mathbf{i}_1) \\ &\quad - 2s_4 s_1 (\mathbf{k}_4 \cdot \mathbf{k}_1) - 2s_4 h_2 (\mathbf{k}_4 \cdot \mathbf{i}_2) - 2s_4 h_4 (\mathbf{k}_4 \cdot \mathbf{i}_4) \\ &\quad + 2h_1 s_1 (\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k}_1) + 2h_1 h_2 (\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_2) + 2h_1 h_4 (\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_4) \\ &\quad + 2s_1 h_2 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i}_2) + 2s_1 h_4 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i}_4) + 2h_2 h_4 (\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_4) \end{aligned} \quad (12)$$

式(12)中

$$(l \mathbf{k}_3)^2 = l^2 (\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{i}_4) = l^2$$

$$\mathbf{k}_4 \cdot \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_4 \cdot \mathbf{i}_4 = \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i}_2 = 0$$

$$\mathbf{k}_4 \cdot \mathbf{i}_2 = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \sin \alpha_1 \\ \cos \alpha_1 \end{bmatrix} \right)^T \left(\begin{bmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \sin \alpha_1 \sin \theta_2$$

$$\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_2 = \cos \theta_2; \quad \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_4 = \cos \theta_1$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i}_4 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ -\cos \alpha_1 \sin \theta_1 \\ \sin \alpha_1 \sin \theta_1 \end{pmatrix} = \sin \alpha_1 \sin \theta_1 \\ \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_4 &= \begin{pmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ -\cos \alpha_1 \sin \theta_1 \\ \sin \alpha_1 \sin \theta_1 \end{pmatrix} \\ &= \cos \theta_2 \cos \theta_1 - \sin \theta_2 \cos \alpha_1 \sin \theta_1 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} l^2 &= s_4^2 + h_1^2 + s_1^2 + h_2^2 + h_4^2 - 2s_4s_1 \cos \alpha_1 - 2s_4h_2 \sin \alpha_1 \sin \theta_2 \\ &\quad + 2h_1h_2 \cos \theta_2 + 2h_1h_4 \cos \theta_1 + 2s_1h_4 \sin \alpha_1 \sin \theta_1 \\ &\quad + 2h_2h_4 (\cos \theta_2 \cos \theta_1 - \sin \theta_2 \cos \alpha_1 \sin \theta_1) \end{aligned} \quad (13)$$

这里假设 h_1 、 h_2 、 h_4 、 $s_1 = p\theta_2$ 、 $s_3 (=l)$ 、 α_1 和 θ_2 这些参数都是已知数, 并且 $s_4 = p\theta_1$, 要末端位姿角 θ_1 的值。式(13)可以简化为

$$A \sin \theta_1 + B \cos \theta_1 + C + D\theta_1 + E\theta_1^2 = 0 \quad (14)$$

其中 $A = \cos \alpha_1 \sin \theta_2 - (p\theta_2) \sin \alpha_1 / h_2$, $B = h_1 / h_2 - \cos \theta_2$, $E = \frac{p^2}{2h_2h_4}$,

$$C = \frac{h_2^2 - l^2 + h_4^2 + (p\theta_2)^2 + h_1^2}{2h_2h_4} - \frac{h_1 \cos \theta_2}{h_3}, \quad D = -\frac{p^2 \theta_2 \cos \alpha_1}{h_2h_4} - \frac{p \sin \theta_2 \sin \alpha_1}{h_4},$$

这里通过设 $\theta_1 = \pi x$, $-\pi \leq \theta_1 \leq \pi$, 即考虑 θ_1 在一个周期内取, 并且可以根据需要也可以在 n 各周期内进行取值。

设 $f(x) = \cos(\pi x)$, $-1 \leq x \leq 1$, 通过切比雪夫多项式可以展开为:

$$f(x) = \frac{1}{2}b_0T_0(x) + b_1T_1(x) + \cdots + b_nT_n(x) + R'_n \quad (15)$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) T_k(x) dx, \quad k = 0, 1, \dots \quad (16)$$

当 k 为奇数时, 由于 $1/\sqrt{1-x^2} \cos \pi x$ 为偶函数, 而 $T_k(x)$ 为奇函数, 根据定积分性质, 奇函数在对称区间上的积分为零, 也即在上述系数中 $b_{2k-1} = 0$ ($k = 1, 2, \dots$)。 $f(x) = \cos \pi x$ 的切比雪夫级数可以写成:

$$\begin{aligned} \cos \pi x &= \frac{1}{2}b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k} T_{2k}(x), \quad |x| \leq 1 \\ b_{2k} &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cos(\pi x) T_k(x) dx, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

如果要 b_k 精确到小数点后第 13 位, 则从 b_{14} 开始, 以后的所有系数实际上已经都是零, 而

$$b_0 = -0.608484, b_2 = -0.970868, b_4 = 0.302849, b_6 = -0.0290919, b_8 = 0.00139224, b_{10} = -0.0000401899, b_{12} = 7.782767 \times 10^{-7}.$$

因此, 定义在区间 $[-2, 2]$ 上的函数 $f(x) = \cos \pi x$ 可以用如下多项式来逼近:

$$\begin{aligned} f(x) = \cos \pi x &\approx 1 - 4.934801x^2 + 4.058695x^4 - 1.335158x^6 \\ &\quad + 0.2350298x^8 - 0.0253589836x^{10} + 0.00159391068x^{12} \end{aligned} \quad (17)$$

$f(x) = \cos \pi x$ 与切比雪夫多项式逼近如图 2 所示。

从图 2 中可以看出, $f(x) = \cos \pi x$ 与 $f(x) = \cos \pi x$ 切比雪夫多项式展开式在 $[-1, 1]$ 区间很好拟合在一起, 而在区间外拟合就不好。这说明通过切比雪夫函数逼近, 逼近精度在 $[-1, 1]$ 是可以达到保证计算结果。

同理, 由上面的思路得出定义在区间 $[-1, 1]$ 上的函数 $f(x) = \sin \pi x$ 用下面的多项式进行逼近:

$$\begin{aligned} f(x) = \sin \pi x \approx & 3.14159264x - 5.16771213x^3 + 2.55015699x^5 \\ & - 0.599230763x^7 + 0.082062648x^9 - 0.00725992322x^{11} \\ & + 0.000390544292x^{13} \end{aligned} \quad (18)$$

$f(x) = \sin \pi x$ 与切比雪夫多项式逼近如图 3 所示。

如图 3 所示用切比雪夫多项式逼近函数 $f(x) = \cos \pi x$ 和 $f(x) = \sin \pi x$ 时, 在区间 $[-1, 1]$ 上可以精确到小数点后第 13 位。

误差分析例如 $x = 1/2$ 时, $\cos 1/2\pi = 0$, 而切比雪夫多项式得到的值为 -5.35558×10^{-9} 逼近为 0, $\sin 1/2\pi = 1$, 而切比雪夫多项式得到的值为 1, 没有误差。 $x = 1/3$ 时, $\cos 1/3\pi = 0.5$, 而切比雪夫多项式得到的值为 0.5, 没有误差, $\sin 1/3\pi = 0.866025$, 而切比雪夫多项式得到的值为 0.866025, 没有误差。 $x = -1$ 时, $\cos(-\pi) = -1$, 而切比雪夫多项式得到的值为 -1, 没有误差, $\sin(-\pi) = 0$, 而切比雪夫多项式得到的值为 0×10^{-9} , 没有误差。从误差分析可以说明, 可以用切比雪夫多项式来计算函数近似值求螺旋副算法。

把上面得到的 $\cos \pi x$ 和 $\sin \pi x$ 的切比雪夫多项式代入到(14)式中可以得到 x 的一元高次方程, 再由 $\theta_1 = \pi x$, $-\pi \leq \theta_1 \leq \pi$ 求得 θ_1 的值。

4. 计算结果与仿真分析

为了与本人在北京工业大学学报发表的文章对应, 所以 HSSH 的结构参数与以前写的 RSSH 的结构参数基本取值一致, 就是把本来是转动副改成可以旋转的旋转副, 参数取值如下:

$h_1 = 3$ 、 $h_2 = 4$ 、 $h_4 = 5$ 、 $s_3(=l) = 7.6$ 和 $\alpha_1 = 0.5$, 还有 $p = 2$ 。输入运动角 $\theta_2 = 0.5$ 。

通过上面的公式推导即可以计算出 HSSH 输出螺旋角 θ_1 , 并且最终得到 13 组关节角, 见表 1。并且把这 13 组关节角分成两种结果情况: 一种是代入切比雪夫逼近的多项式, 另外一种为了验证把它代入(13)式可以得到的 l 值如表 1 所示, 其中 7、8 两组为实数解, 并且这两组解都是在区间 $[-1, 1]$ 内。都是采用切比雪夫多项式进行迭代, 把本来是复杂的正弦和余弦的值都化成角度的关系, 这样就利用了多项式求解的方法可以求出其末端的运动学方程, 求出 13 组解来, 再通过对 l 值的验证可知, 这两组实数解是准确解, 从表 1 可以看到, 切比雪夫多项式逼近值在区间范围内是比较准确的, 而在区间范围外就不那么准确了, 比如第 13 组解得到 l 值非常大, 而实际值并不那么大。

从表 1 可以看到 5、6 两组解也可能是所要求的实数解, 为了求解区间 $[-1, 1]$ 外的解, 只要在原来的区间加上 2 (一个周期), 得到一组解如表 2 所示, 从表 2 可以看出, 表 2 中的 5、6 两组解实际上是表 1 中的 7、8 两组解, 而表 2 中的 7、8 组解也是所要求的实数解。如果在原来的区间加上 4 (就是两个周期) 或者减去 2 (一个周期), 求解得到表 3、表 4 所示。因为表 3 和表 4 得到都是虚数解, 所以应舍弃。也可以再加上 n 个周期的值, 但是理论上其求得值不可能是实数解, 所以就只求在区间 $[-1, 1]$ 范围内进行估算。

5. 结论

本文是在原来的基础上对 HSSH 机构进行分析和求解求出其末端运动学分析, 通过利用切比雪夫多项式的逼近理论把正弦与余弦的复杂形势用简单的角度来分析, 从而近似求解带有螺旋副的空间机构的运动学问题。这是对螺旋副的求解的一种新的想法, 以达到抛砖引玉的目的。

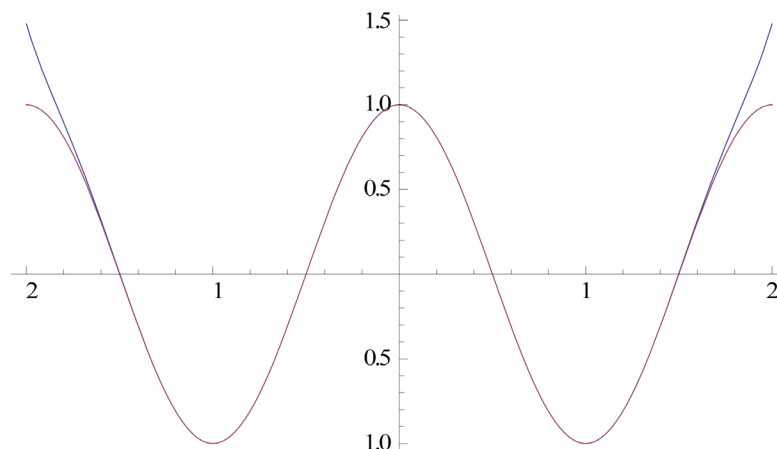


Figure 2. $f(x) = \cos\pi x$ and Chebyshev polynomial approximation figure in $[-2, 2]$
图 2. $f(x) = \cos\pi x$ 与切比雪夫多项式在 $[-2, 2]$ 逼近图

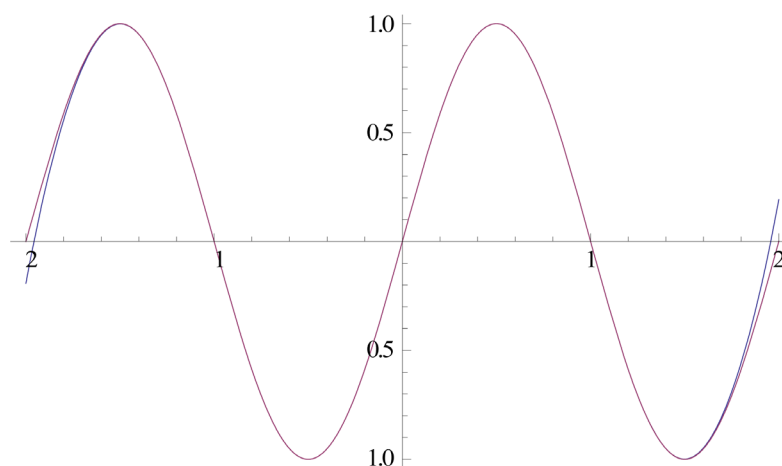


Figure 3. $f(x) = \sin\pi x$ and Chebyshev polynomial approximation figure in $[-2, 2]$
图 3. $f(x) = \sin\pi x$ 与切比雪夫多项式在 $[-2, 2]$ 逼近图

Table 1. Position solution of spatial four-bar mechanism (HSSH) in the interval $[-1, 1]$ and the comparison of l
表 1. 空间 HSSH 在区间 $[-1, 1]$ 的位置解及 l 的比较值

序号	θ_i/π	切比雪夫逼近的 l 值	l 的实际值
1	$-2.23272 - 0.48755i$	$11.9458 + 8.949i$	$22.009 + 2.0535i$
2	$-2.23272 + 0.48755i$	$11.9458 - 8.949i$	$22.009 - 2.0535i$
3	$-2.1694 - 1.72387i$	$119.891 + 420.056i$	$109.436 + 26.94i$
4	$-2.1694 + 1.72387i$	$119.891 - 420.056i$	$109.436 - 26.94i$
5	$-1.2958 - 0.156198i$	$8.00047 - 0.00063366i$	$8.00118 - 0.0007169i$
6	$-1.2958 + 0.156198i$	$8.00047 + 0.00063366i$	$8.00118 + 0.0007169i$
7	0.4670	8.0	8.
8	0.8988	8.0	8.
9	$2.36383 - 0.326961i$	$14.632 + 32.0304i$	$9.519 + 5.6563i$
10	$2.36383 + 0.326961i$	$14.632 - 32.0304i$	$9.519 - 5.6563i$
11	$2.45352 - 1.62358i$	$484.942 + 827.467i$	$32.84 + 88.9414i$
12	$2.45352 + 1.62358i$	$484.942 - 827.467i$	$32.84 - 88.9414i$
13	2.9176	805.87	9.2666

Table 2. Position solution of spatial four-bar mechanism (HSSH) in the interval [1,3] and the comparison of l
表 2. 空间 HSSH 在区间[1,3]的位置解及 l 的比较值

序号	$\theta_i/\pi - 2$	切比雪夫逼近的 l 值	l 的实际值
1	$-2.20723 - 0.48929i$	$8.03257 + 9.289i$	$20.4369 + 2.374i$
2	$-2.20723 + 0.48929i$	$8.03257 - 9.289i$	$20.4369 - 2.374i$
3	$-2.1679 - 1.723i$	$115.638 + 420.2i$	$108.997 + 27.05i$
4	$-2.1679 + 1.723i$	$115.638 - 420.2i$	$108.997 - 27.05i$
5	-1.5309	7.9969	7.9720
6	-1.10	7.99999	7.99999
7	0.50104	8.0	$8.$
8	0.816849	8.0	$8.$
9	$2.3728 - 0.387065i$	$29.9808 + 24.6736i$	$11. + 5.58105i$
10	$2.3728 + 0.387065i$	$29.9808 - 24.6736i$	$11. - 5.58105i$
11	$2.4513 - 1.62352i$	$483.70 + 815.135i$	$33.05 + 88.4679i$
12	$2.4513 + 1.62352i$	$483.70 - 815.135i$	$33.05 - 88.4679i$
13	2.9385	894.553	12.6541

Table 3. Position solution of spatial four-bar mechanism (HSSH) in the interval [3,5] and the comparison of l
表 3. 空间 HSSH 在区间[3,5]的位置解及 l 的比较值

序号	$\theta_i/\pi - 4$	切比雪夫逼近的 l 值	l 的实际值
1	$-2.20089 - 0.48553i$	$7.85631 + 8.76975i$	$20.0353 + 2.1969i$
2	$-2.20089 + 0.48553i$	$7.85631 - 8.76975i$	$20.0353 - 2.1969i$
3	$-2.16738 - 1.72268i$	$113.715 + 418.617i$	$108.753 + 26.9293i$
4	$-2.16738 + 1.72268i$	$113.715 - 418.617i$	$108.753 - 26.9293i$
5	-1.49719	7.54093	7.98165
6	-1.18316	6.99856	7.99989
7	$0.641542 - 0.284941i$	$2.30551 + 1.56135i$	$8. + 2.35011 \times 10^{-7}i$
8	$0.641542 + 0.284941i$	$2.30551 - 1.56135i$	$8. - 2.35011 \times 10^{-7}i$
9	$2.39647 - 0.467088i$	$51.1451 + 6.96633i$	$13.5262 + 5.36307i$
10	$2.39647 + 0.467088i$	$51.1451 - 6.96633i$	$13.5262 - 5.36307i$
11	$2.44791 - 1.62442i$	$487.122 + 795.193i$	$33.5876 + 87.81i$
12	$2.44791 + 1.62442i$	$487.122 - 795.193i$	$33.5876 - 87.81i$
13	2.96742	1032.15	17.0023

Table 4. Position solution of spatial four-bar mechanism (HSSH) in the interval [-3,-1] and the comparison of l
表 4. 空间 HSSH 在区间[-3,-1]的位置解及 l 的比较值

序号	$\theta_i/\pi + 2$	切比雪夫逼近的 l 值	l 的实际值
1	$-2.27047 - 0.486029i$	$14.4796 + 9.8426i$	$24.5696 + 1.51286i$
2	$-2.27047 + 0.486029i$	$14.4796 - 9.8426i$	$24.5696 - 1.51286i$
3	$-2.17187 - 1.72393i$	$126.296 + 418.271i$	$110.073 + 26.5975i$
4	$-2.17187 + 1.72393i$	$126.296 - 418.271i$	$110.073 - 26.5975i$
5	$-1.28351 - 0.40428i$	$1.26928 - 8.01819i$	$7.99487 + 0.00163136i$
6	$-1.28351 + 0.40428i$	$1.26928 + 8.01819i$	$7.99487 - 0.00163136i$
7	$0.704136 - 0.156302i$	$6.18213 - 0.638802i$	$8. - 3.36612 \times 10^{-7}i$
8	$0.704136 + 0.156302i$	$6.18213 + 0.638802i$	$8. + 3.36612 \times 10^{-7}i$
9	$2.37274 - 0.319632i$	$13.824 + 34.1845i$	$9.35662 + 5.90112i$
10	$2.37274 + 0.319632i$	$13.824 - 34.1845i$	$9.35662 - 5.90112i$
11	$2.45438 - 1.62452i$	$490.71 + 831.978i$	$32.9637 + 89.2231i$
12	$2.45438 + 1.62452i$	$490.71 - 831.978i$	$32.9637 - 89.2231i$
13	2.91156	781.677	8.17829

基金项目

福建省教育厅中青年教师科研项目(JA15573)。

参考文献 (References)

- [1] Su, H.J., Collins, C.L. and McCarthy, J.M. (2002) Classification of RRSS Linkages. *Mechanism and Machine Theory*, **37**, 1413-1433. [http://dx.doi.org/10.1016/S0094-114X\(02\)00060-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0094-114X(02)00060-5)
- [2] Marble, D.S. and Pennock, R.G. (2000) Algebraic-Geometric Properties of the Coupler Curves of the RCCC Spatial Linkages Based on Reliability Concept. *Mechanism and Machine Theory*, **35**, 675-693. [http://dx.doi.org/10.1016/S0094-114X\(99\)00039-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0094-114X(99)00039-7)
- [3] Shi, Z. (1997) Synthesis of Mechanical Error in Spatial Linkages Based on Reliability Concept. *Mechanism and Machine Theory*, **32**, 255-259. [http://dx.doi.org/10.1016/S0094-114X\(96\)00049-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0094-114X(96)00049-3)
- [4] Sun, J.W., Chu, J.K. and Wei, J. (2008) Research on RCCC Mechanism Function Generation by Using Numerical Atlas Method. *China Mechanical Engineering*, **19**, 713-717.
- [5] 倪振松, 廖启征, 魏世民, 等. 基于切比雪夫逼近的空间 RSSH 机构运动分析[J]. 北京工业大学学报, 2011, 37(12): 1767-1772.
- [6] 肖蒙, 李军. 切比雪夫多项式及其插值法在检测中的应用研究[J]. 自动化与仪器仪表, 2006(3): 13-16.
- [7] 张云芝, 刘付永红, 林万荣. 用切比雪夫最佳逼近理论求拟合直线方法[J]. 华南理工大学学报, 1999(1): 117-119.
- [8] Xie, C.-X. and Li, L. (2008) Innovative Design and Application of Space Agencies. Machinery Industry Press, Beijing.