

Regression Analysis on the Relationship between Water Consumption Structure and Industrial Structure in Fujian Province*

Longqiang Su¹, Xingwei Chen², Zongxue Xu¹, Man Zhang²

¹Key Laboratory of Water and Sediment Sciences, Ministry of Education, College of Water Sciences, Beijing Normal University, Beijing

²College of Geographic Sciences, Fujian Normal University, Fuzhou
Email: sulq@mail.bnu.edu.cn

Received: Apr. 24th, 2012; revised: May 7th, 2012; accepted: May 19th, 2012

Abstract: Prediction of water consumption structure on the basis of the relationship between water consumption structure and industrial structure is essential to the exploitation and utilization of water resources. Based on the symmetrical logratio transformation and partial least-squares regression, linear regression model for water consumption structure and industrial structure in Fujian Province is developed in this study. Analysis on the model showed that the compositional data of water consumption structure and industrial structure in Fujian Province had obvious linear relationship. This model fit the data very well with high accuracy and can be used to predict water consumption structure. Agricultural water was highly correlated with primary industry, and so was the industrial water with secondary industry. Agricultural water showed significantly negative correlation with secondary industry and tertiary industry. The variation of domestic water had an insignificant correlation with industrial structure. The capacity to explain water consumption structure of the industrial structure factors was in the order of primary industry > secondary industry > tertiary industry.

Keywords: Water Consumption Structure; Industrial Structure; Compositional Data; Partial Least-Square Regression Analysis; Fujian Province

福建省用水结构与产业结构回归分析*

苏龙强¹, 陈兴伟², 徐宗学¹, 张曼²

¹北京师范大学水科学研究院, 水沙科学教育部重点实验室, 北京

²福建师范大学地理科学学院, 福州
Email: sulq@mail.bnu.edu.cn

收稿日期: 2012年4月24日; 修回日期: 2012年5月7日; 录用日期: 2012年5月19日

摘要: 分析用水结构与产业结构的关系, 合理确定与科学预测用水结构是制定水资源利用规划的基础。本文综合运用对称 logratio 变换与偏最小二乘回归(PLS 回归)方法, 建立了福建省用水结构与产业结构的成分数据线性回归模型。分析结果表明, 福建省用水结构与产业结构的成分数据之间具有显著的线性关系; 模型拟合精度高, 可应用于用水结构的预测; 农业用水与第一产业、工业用水与第二产业均呈高度正相关, 农业用水与第二、三产业呈显著的负相关, 生活用水与产业结构的相关程度较小; 产业结构各因子对用水结构解释能力的排序为第二产业 > 第一产业 > 第三产业。

关键词: 用水结构; 产业结构; 成分数据; 偏最小二乘回归分析; 福建省

*基金项目: 福建省科技计划重大项目(2010Y4001)。

作者简介: 苏龙强(1989-), 男, 汉族, 中共党员, 福建惠安人, 硕士研究生, 主要研究方向为气候变化及流域水文生态模拟。

用水结构是一个国家或地区内农业用水、工业用水和生活用水之间互相关联、互相依存的结合方式, 包括比例关系等^[1]。用水结构的合理确定与科学预测是制定水资源发展利用规划的前提和基础, 对于解决区域水资源供需矛盾, 实现水资源的合理配置, 乃至社会经济的协调发展均具有重要意义^[2]。目前关于用水结构影响因素的研究主要集中于对缺水地区用水结构变化及其驱动力的定性分析^[3-7], 定量分析相对较少。后者如龚宇等^[8]采用投影寻踪回归方法, 量化评估了人为和自然因子对区域农业用水的贡献; 和刚等^[9]建立了以主成分分析法——定额法组成的工业需水预测模型, 定量分析了工业用水定额与其影响因素之间的关系; 曹连海等^[10]利用偏最小二乘法预测城市生活用水量。这些研究分别针对农业用水、工业用水或生活用水, 进行各自影响因素的分析, 没有深入挖掘用水问题的结构性特征。

根据用水结构的定义, 用水结构可以用成分数据表述。同样, 以三次产业分类法划分的产业结构也可以表示为成分数据的形式。由于经典线性回归方法在成分数据建模中难以解决“定和”约束、复杂的参数分布及自变量集合的多重相关性等问题, 因此, 用水结构与产业结构相互关系的定量研究尚少有涉及, 仅见云逸等学者^[11]运用王惠文等^[12]提出的结合对称logratio变换与偏最小二乘回归理论的成分数据回归方法, 分析北京市用水结构与产业结构的关系, 表明用水结构组分变动与产业结构变动有密切相关性。福建省用水结构与产业结构之间关系的研究也不多, 苏

龙强^[13]在分析近年福建省用水结构演变时, 定性分析了产业结构变化的影响。因此, 本文拟采用文献^[12]的方法, 分析福建省用水结构与产业结构的定量关系, 以进一步探讨该方法的适用性; 并通过建立福建省用水结构与产业结构之间的相关关系模型, 揭示福建省用水结构演变与产业结构变化的规律, 为区域水资源合理配置提供参考依据。

1. 福建省用水结构与产业结构分析

1.1. 用水结构变化趋势

农业、工业、生活用水比重可以从一个侧面反映一个国家或地区经济与文明的程度, 也是科技水平的标志之一。一般来讲, 工业用水比重大, 说明工业化程度发达, 生活用水比重大, 说明文明程度较高, 而农业用水比重大, 不仅说明是以农业为主要产业, 而且也从侧面反映农业科技较为落后^[14]。1999~2010年, 福建省总用水量整体呈上升趋势, 由1999年的175.34亿m³增加到2010年的202.45亿m³, 年均增加2.46亿m³。用水结构的年际变化如图1所示, 福建省农业用水比重从1999年的64.52%减少到2010年的48.01%, 年均减少1.50%; 工业用水比重从1999年的24.00%增加到2010年的40.14%, 年均增加1.47%; 相对于农业用水和工业用水, 生活用水比重变化较小, 介于10.00%~12.00%之间, 从1999年~2010年仅增加了0.35%。可见, 农业在福建省国民经济中占有较大比重, 福建省工业化程度也较高, 但是文明程度相对较低。

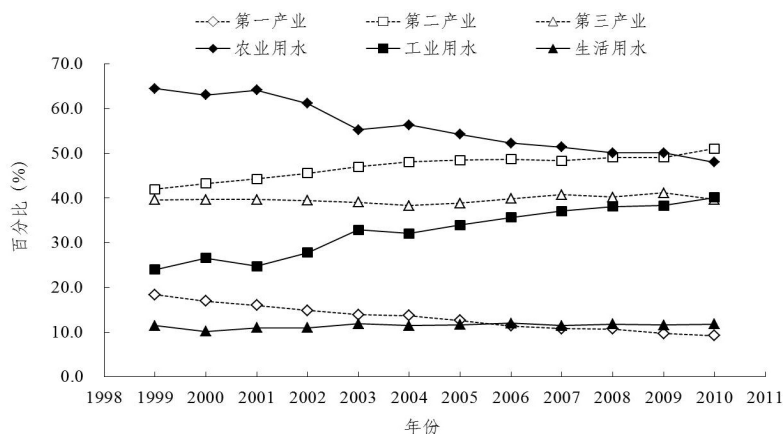


Figure 1. Changes of water consumption structure and industrial structure from 1999 to 2010 in Fujian province (data from Fujian statistical yearbook 2011 and Fujian water resources 1999 to 2010)

图1. 福建省1999~2009年用水结构和产业结构变化(资料来源: 福建统计年鉴(2011)、福建水资源公报(1999~2010))

1.2. 用水结构与产业结构的关系

发达国家的经济发展经验表明, 一个国家或地区的经济增长必然伴随着产业结构的优化与升级, 而用水结构能在一定程度上反映整个地区经济社会发展情况^[11]。因此, 产业结构的升级必然影响着用水结构的变化。

图1还绘制了1999~2010年福建省产业结构的年度变化情况。随着社会经济的发展, 福建省产业结构发生了较大的变化, 第一产业:第二产业:第三产业的比例从1999年的18.4:42.0:39.6变为2010年的9.3:51.0:39.7。第一产业的比重不断下降, 第二产业的比重持续上升, 在国民经济中的主导地位不断提升, 第三产业的比重相对稳定。而1999~2010年, 福建省农业用水、工业用水和生活用水的比重也从64.5:24.0:11.5变为48.0:40.1:11.9, 农业用水比重下降, 工业用水比重上升, 生活用水比重变化很小。可以看出, 用水结构与产业结构这两个成分数据的变化有着明显的对应关系。

2. 回归分析方法

2.1. 基本思路

运用对称 logratio 变换对自变量和因变量的原始数据进行统一变换, 然后对数据进行标准化处理, 再运用 SIMCA-P11.5 数据分析软件对处理后的数据进行偏最小二乘回归分析, 得到因变量关于自变量的回归方程。

2.2. 数据预处理

设自变量 $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ 和因变量 $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ 都是成分数据, 在建立模型之前, 需要对原始数据进行如下处理:

1) 对自变量和因变量的原始成分数据分别进行对称 logratio 变换^[15], 以消除成分数据的“定和”约束, 解决成分数据在统计分析中的闭合效应和统计分布这两个问题, 并增强模型的可解释性^[16]。将变换后的自变量和因变量数据分别记为: $V = (v_1, v_2, \dots, v_m)^T$ 和 $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ 。

2) 将变换后的数据进行标准化处理^[17], V 经标准化处理后的矩阵记为 $E_0 = (E_{01}, E_{02}, \dots, E_{0m})^T$, U 经标

准化处理后的矩阵记为 $F_0 = (F_{01}, F_{02}, \dots, F_{0n})^T$ 。

2.3. 偏最小二乘回归分析

偏最小二乘回归分析的主要步骤如下^[12]:

1) 求矩阵 $E_0 F_0 F_0^T E_0$ 最大特征值所对应的特征向量 a_1 , 由此可计算第一个 PLS 成分 t_1 , 以及 E_0 关于 t_1 的线性回归模型:

$$t_1 = E_0 a_1 \tag{1}$$

$$E_0 = t_1 p_1' + E_1 \tag{2}$$

其中回归系数向量: $p_1 = \frac{E_0^T t_1}{\|t_1\|^2}$, E_1 为残差方程的回归矩阵。

2) 根据交叉有效性^[18], 确定回归模型是否有效。如有, 则转到步骤3); 否则, 利用矩阵 E_1 和 F_0 , 重复步骤1), 提取第二个成分 t_2 。在偏最小二乘回归中, 交叉有效性系数 Q_h^2 反映模型预测效果的好坏, 当 $Q_h^2 > 0.0975$ 时, 主成分需要被提取。一般而言要求累计交叉有效性系数 $Q_h^2(\text{cum}) > 0.5$, 否则表示预测效果不好, 需要对模型进行优化改进。

3) 如果共提取了 k 个成分 t_1, t_2, \dots, t_k , 计算偏最小二乘回归模型。

4) 由于 t_1, t_2, \dots, t_k 均可表示成 E_0 的线性组合, 而由 E_0 可求得其对应的 V 。因此, 式(3)还原为 U 和 V 之间的线性回归方程, 即

$$u_j^* = \alpha_{j0} + \alpha_{j1} v_1^* + \alpha_{j2} v_2^* + \dots + \alpha_{jm} v_m^*, \tag{4}$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

2.4. 模型预测与应用

对于一个新的自变量 $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})^T$, 利用对称 logratio 变换得到 $V^{(0)} = (v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, \dots, v_m^{(0)})^T$, 代入式(4)可以求得预测向量 $\hat{U}^{(0)} = \left(\hat{u}_1^{(0)}, \hat{u}_2^{(0)}, \dots, \hat{u}_n^{(0)} \right)^T$ 。然后通过对称 logratio 变换的反变换公式(5)~(7), 可得原始因变量的预测值 $\hat{Y}^{(0)} = \left(\hat{y}_1^{(0)}, \hat{y}_2^{(0)}, \dots, \hat{y}_n^{(0)} \right)^T$ 。

$$w_j = \hat{u}_j^{(0)} - \hat{u}_n^{(0)}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \tag{5}$$

$$\hat{y}_j^{(0)} = \left\{ e^{w_j} / \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} e^{w_i} \right) \right\}, j = 1, 2, \dots, n-1 \quad (6)$$

$$\hat{y}_n^{(0)} = \left\{ 1 / \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} e^{w_i} \right) \right\} \quad (7)$$

3. 回归模型建立与分析

3.1. 模型建立

以福建省产业结构的成分数据作为自变量 X , 以用水结构的成分数据作为因变量 Y , 选取 1999~2008 年的 10 组数据作为样本点, 建立回归模型。按照上述方法, 对成分数据做 logratio 变换, 然后将变换后的数据利用软件 SIMCA-P11.5 进行偏最小二乘回归分析(SIMCA-P11.5 会默认对数据进行标准化处理)。

首先, 选用软件中的自动拟合功能, 对数据进行自动拟合。根据交叉有效性, 从自变量集合中提取了一个主成分, 主成分对自变量 X 的信息利用率达到了 95.9%, 所得因变量的累计解释能力为 0.619, 累计交叉有效性为 0.506。表明模型能高度概括原始数据所携带的信息。第二, 模型的 T^2 椭圆图(图 2)表明, 所有样本点都在椭圆内, 不存在特异点, 模型的拟合效果较好, 不需要再对数据进行调整以重新拟合。

因此, 得到 U 和 V 的线性回归方程如下:

$$u_1 = 1.361 + 0.281v_1 - 0.442v_2 - 0.661v_3 \quad (8)$$

$$u_2 = -0.516 - 0.293v_1 + 0.461v_2 + 0.690v_3 \quad (9)$$

$$u_3 = -0.843 + 0.012v_1 - 0.019v_2 - 0.029v_3 \quad (10)$$

其中, U 和 V 分别指经过对称 logratio 变换后的因变量和自变量。

3.2. 结果分析

3.2.1. 拟合精度分析

采用上述建立的用水结构与产业结构回归模型, 对 1999~2008 年的数据进行拟合。将实测值与模型拟合值相比较, 并绘制曲线如图 3 所示。其中, 农业、工业和生活用水的平均相对误差分别为 0.85%、1.70% 和 2.42%。采用未参加建模的 2009 和 2010 年的数据对模型进行检验, 如表 1 所示, 预测值与实测值间的相对误差都控制在 5% 以内。说明模型的拟合精度较高, 运用成分数据回归模型分析用水结构与产业结构的关系是十分有效的。同时, 表明基于历史数据建立的模型具有较强的预测功能, 通过对产业结构的预测可以预报用水结构的相应变化。

3.2.2. 用水结构与产业结构的成分数据线性关系分析

由于采用成分提取的方式进行回归建模, 利用投影方法计算第一个主成分后, 分别得到 X 和 Y 空间的两条轴线以及各个样本点在 X 和 Y 空间轴上的得分 t_1 、 u_1 。对 X 和 Y 数据的关联分析就是将所有样本在 X 和 Y 空间第一个主成分轴上的得分 t_1 、 u_1 分别作相关分析。因此, 可以用 t_1/u_1 平面图来观测 t_1 与 u_1 的线性关系, 进而判断自变量 X 和因变量 Y 之间的关系。从图 4 可以看出, 原始样本点在 t_1 与 u_1 平面上的投影大致分布在一条直线上, 表明 t_1 与 u_1 的线性关系明显, 即 1999~2008 年福建省用水结构与产业结构的成分数据之间存在显著的线性关系。

3.2.3. 用水结构与产业结构之间的相关性分析

为了进一步分析用水结构与产业结构之间的相关

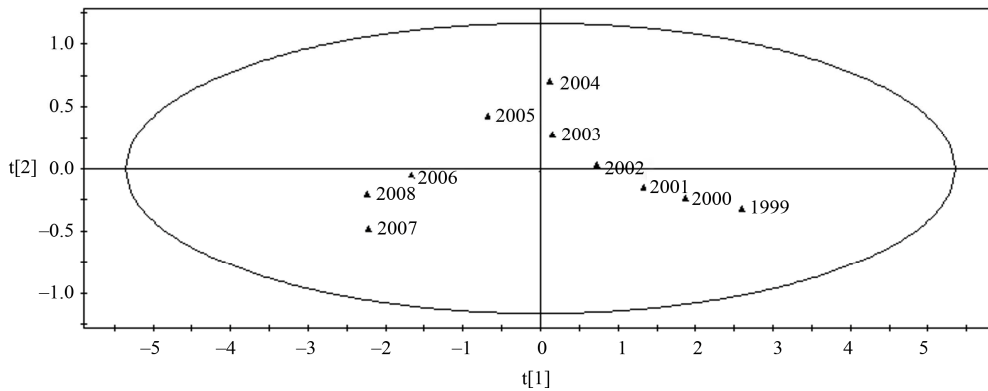


Figure 2. Elliptic figure of T^2
图 2. T^2 椭圆图

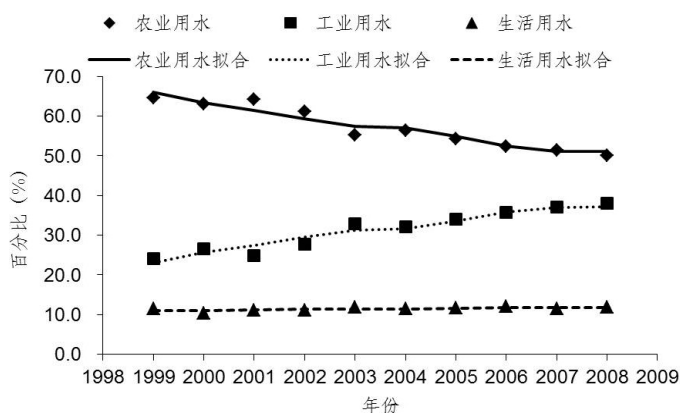


Figure 3. Measured and fitted values of water consumption structure based on the compositional data
图 3. 基于成分数据的用水结构实测值与拟合值

Table 1. Comparison between predicted and measured value
表 1. 预测值与实测值的比较

年份	实测值(%)			预测值(%)			相对误差(%)		
	农业用水	工业用水	生活用水	农业用水	工业用水	生活用水	农业用水	工业用水	生活用水
2009	50.05	38.32	11.63	48.02	40.23	11.75	4.06	4.98	1.06
2010	48.01	40.14	11.85	47.20	41.05	11.75	1.69	2.26	0.82

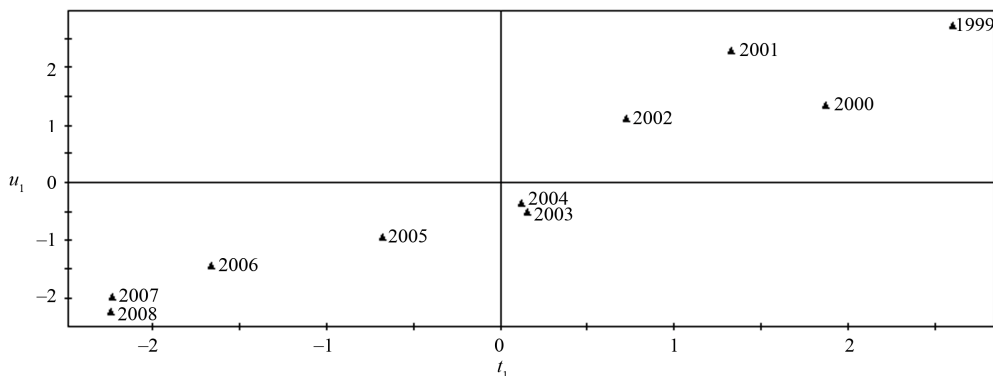


Figure 4. Plane graph of t_1/u_1
图 4. t_1/u_1 平面图

性, 绘制了变量与成分的相关系数图, 如图 5 所示。
 w 为 X 数据集权重, c 为 Y 数据集权重, 第一个主成分可以得到 X 、 Y 数据综合权重 $w*c[1]$, 第二个主成分可以得到 X 、 Y 数据综合权重 $w*c[2]$ 。

从图中可以看出: 首先, 农业用水与第一产业、工业用水与第二产业均呈高度正相关, 即随着产业比重的增大或减小, 用水比重也相应增大或减小。图 1 结果也显示, 1999~2008 年以来, 福建省第一产业比重呈明显下降趋势, 农业用水比重也不断下降, 第二产业比重和工业用水比重均呈快速增长之势。第二, 农业用水与第二、三产业呈显著的负相关。随着福建省经济发展和人

民生活水平的提高, 农业用水不断减少, 这在一定程度上是受工业用水和生活用水增多的影响。第三, 生活用水与产业结构的相关程度较小, 这说明福建省生活用水量与产业之间的互动关系不显著, 其变化不仅受产业结构的影响, 还与其它因素有关。

3.2.4. 三次产业比重对用水结构的解释能力分析

在 PLS 中可以用变量投影重要性(VIP_j)来衡量自变量 x_j 对因变量 Y 的解释能力, 一般 VIP_j 值大于 1.0 的自变量比较重要, 小于 0.5 的不太重要^[17]。由 VIP_j 值绘制的直方图如图 6 所示, 从图中可以看出第二

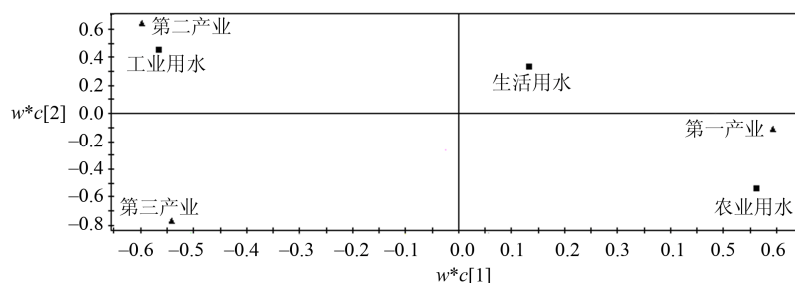


Figure 5. Plane graph of $w*c[1]/w*c[2]$
图 5. $w*c[1]/w*c[2]$ 平面图

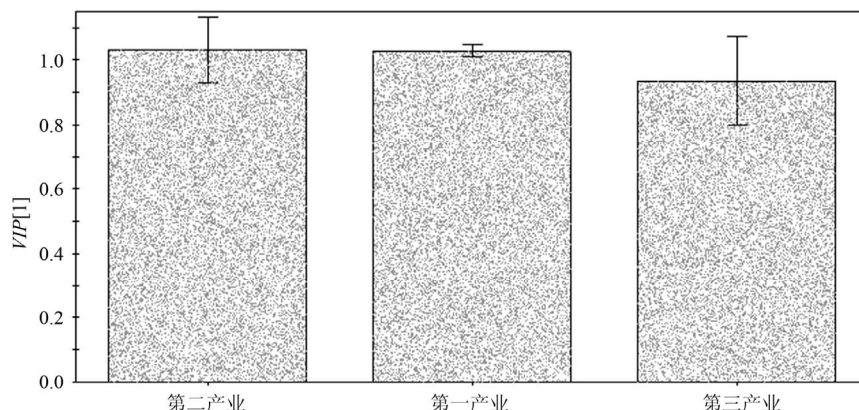


Figure 6. Histogram of VIP
图 6. VIP 直方图

产业比重对用水结构的解释能力最强, 其次是第一产业比重, 而第三产业比重的解释作用较小, 即第二产业比重对用水结构的影响最大。这在一定程度上是由于福建省现处于工业化中期, 第二产业在国民经济中占主导地位。

4. 结论

通过本文的研究工作, 可以初步得到以下几点结论:

- 1) 基于对称 logratio 变换与偏最小二乘回归相结合的方法, 通过提取 1 个主成分建立了福建省用水结构与产业结构的回归模型, 有效地解决了成分数据之间的“定和”约束和多重相关性等问题, 可用于用水结构与产业结构的相关分析。
- 2) 模型结果与实际数据拟合精度高, 可以通过产业结构变化的预测来预报用水结构的变化。
- 3) 福建省用水结构与产业结构的成分数据间存在显著的线性关系; 农业用水与第一产业、工业用水与第二产业均呈高度正相关, 农业用水与第

二、三产业呈显著的负相关, 生活用水与产业结构的相关程度较小; 产业结构各因子对用水结构解释能力的排序为第二产业 > 第一产业 > 第三产业。

参考文献 (References)

- [1] 潘雄锋, 刘凤朝, 郭蓉蓉. 我国用水结构的分析与预测[J]. 干旱区资源与环境, 2008, 22(10): 11-14.
PAN Xiongfeng, LIU Fengchao and GUO Rongrong. Analysis and forecast of water utilization structure in China. Journal of Arid Land Resources and Environment, 2008, 22(10): 11-14. (in Chinese)
- [2] 刘宝勤, 姚治君, 高迎春. 北京市用水结构变化趋势及驱动力分析[J]. 资源科学, 2003, 25(2): 38-43.
LIU Baoqin, YAO Zhijun and GAO Yingchun. Trend and driving forces of water consumed structure changes in Beijing. Resources Science, 2003, 25(2): 38-43. (in Chinese)
- [3] 王红瑞, 王岩, 吴峙山, 等. 北京市用水结构现状分析与对策研究[J]. 环境科学, 1994, 16(2): 31-34.
WANG Hongrui, WANG Yan, WU Zhishan, et al. Analysis of the current structure of beijing municipal water use and a study on the response strategy for water conservation. Chinese Journal of Environment Science, 1994, 16(2): 31-34. (in Chinese)
- [4] 高训宇, 郑建华, 卢静, 等. 北京市水资源结构变化及其驱动力分析[J]. 北京水务, 2008, 5: 10-13.
GAO Xunyu, ZHENG Jianhua, LU Jing, et al. Trend and driving forces of water resource structure changes in Beijing. Beijing Water, 2008, 5: 10-13. (in Chinese)

- [5] 粟晓玲, 赵晨, 马黎华. 关中地区近 20 年用水结构演变及其驱动力研究[J]. 灌溉排水学报, 2008, 27(5): 71-73.
SU Xiaoling, ZHAO Chen and MA Lihua. Water consumed structure evolution and its driving forces for Guanzhong region in the past 20 years. Journal of Irrigation and Drainage, 2008, 27(5): 71-73. (in Chinese)
- [6] 王雁林, 王文科, 段磊, 等. 黄河流域陕西段的用水结构分析及趋势探讨[J]. 水利发展研究, 2004, 8: 18-21.
WANG Yanlin, WANG Wenke, DUAN Lei, et al. Water consumed structure and its trend in shanxi section of Yellow River Basin. Water Resources Development Research, 2004, 8: 18-21. (in Chinese)
- [7] 马黎华, 康绍忠, 粟晓玲. 西北干旱内陆区石羊河流域用水结构演变及其驱动力分析[J]. 干旱地区农业研究, 2008, 26(1): 125-130.
MA Lihua, KANG Shaozhong and SU Xiaoling. Study on evolution and its driving forces of water utilization structure of Shiyang River Basin in northwest arid areas. Agricultural Research in the Arid Areas, 2008, 26(1): 125-130. (in Chinese)
- [8] 龚宇, 王聪玲, 王璞. 区域农业用水驱动因子及驱动贡献评估分析——以河北沧州为例[J]. 节水灌溉, 2008, 8: 1-4.
GONG Yu, WANG Congling and WANG Pu. Regional agricultural water driver factors and contribution ratio analysis for cangzhou district of Hebei Province. Water Saving Irrigation, 2008, 8: 1-4. (in Chinese)
- [9] 张雅君, 刘全胜. 北京工业需水量的多元回归分析及预测[J]. 给水排水, 2002, 28(11): 53-55.
ZHANG Yajun, LIU Quansheng, et al. Water demand analysis and forecasting in Beijing by multivariate linear regression. Water & Wastewater Engineering, 2002, 28(11): 53-55. (in Chinese)
- [10] 曹连海, 陈南祥, 徐建新. 城市生活用水量预测的 PLS-ANN 模型[J]. 华中科技大学学报(城市科学版), 2006, 23(3): 20-22.
CAO Lianhai, CHEN Nanxiang and XU Jianxin. Model of neural network coupling with partial least-squares method for urban life-water quantity prediction. Journal of Huazhong University of Science and Technology (Urban Science Edition), 2006, 23(3): 20-22. (in Chinese)
- [11] 云逸, 邹志红, 王惠文. 北京市用水结构与产业结构的成分数据回归分析[J]. 系统工程, 2008, 26(4): 67-71.
YUN Yi, ZOU Zhihong and WANG Huiwen. A regression model based on the compositional data of Beijing's water consumed structure and industrial structure. Systems Engineering, 2008, 26(4): 67-71. (in Chinese)
- [12] 王惠文, 黄薇. 成分数据的线性回归模型[J]. 系统工程, 2003, 21(2): 102-106.
WANG Huiwen, HUANG Wei. A simple linear regression model based on the compositional data. Systems Engineering, 2003, 21(2): 102-106. (in Chinese)
- [13] 苏龙强. 福建省近 10 年用水结构变化及驱动力分析[J]. 水资源与水工程学报, 2010, 21(1): 101-104.
SU Longqiang. Analysis of water consumed structure change and its driving forces last 10 years in Fujian Province. Journal of Water Resources and Water Engineering, 2010, 21(1): 101-104. (in Chinese)
- [14] 吴普特, 冯浩, 牛文全, 等. 中国用水结构发展态势与节水对策分析[J]. 农业工程学报, 2003, 19(1): 1-6.
WU Pute, FENG Hao, NIU Wenquan, et al. Analysis of developmental tendency of water distribution and water-saving strategies. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering, 2003, 19(1): 1-6. (in Chinese)
- [15] 王惠文, 张志慧, TENENHAUS M. 成分数据的多元回归建模方法研究[J]. 管理科学学报, 2006, 9(4): 27-32.
WANG Huiwen, ZHANG Zhihui and TENENHAUS M. Multiple linear regression modeling method based on the compositional data. Journal of Management Sciences in China, 2006, 9(4): 27-32. (in Chinese)
- [16] 张尧庭. 成分数据统计分析引论[M]. 北京: 科学出版社, 2000.
ZHANG Yaoting. Analysis on component data. Beijing: Science Press, 2000. (in Chinese)
- [17] 禹茜, 王建湘, 周杰良, 等. 泡桐生长与土壤因子偏最小二乘回归分析[J]. 安徽农业科学, 2008, 36(7): 2605-2606.
YU Qian, WANG Jianxiang, ZHOU Jieliang, et al. The analysis of partial least squares regression model on paulownia growth and soil factors. Journal of Anhui Agricultural Sciences, 2008, 36(7): 2605-2606. (in Chinese)
- [18] FERRERS, N. M. An elementary treatise on trilinear coordinates. London: Macmillan, 1866: 54-63.