

Joint Operation of Cascade Reservoir in the Upper Hanjiang River

Wangwang Yang, Tao Bai*, Yanping Ha, Qiang Huang

State Key Laboratory of Eco-Hydraulic Engineering in Arid Area, Xi'an University of Technology, Xi'an Shaanxi
Email: *baitao@xaut.edu.cn

Received: Jun. 28th, 2017; accepted: Jul. 12th, 2017; published: Jul. 19th, 2017

Abstract

The reservoirs located in the upper Hanjiang River lack a cascade hydropower station joint control center, which are operated separately, leading to the lower water resources utilization efficiency. The Huangjinxia and Sanhekou hydropower stations are constructing; the argument on cascade reservoir operation center of the upper Hanjiang River is urgent. In this paper, the cascade reservoirs in the upper Hanjiang River are studied by large system decomposition and coordination theory. The results show that each cascade hydropower station has received better compensation benefits, and the cascade control center from the Ankang reservoir should be transferred to the Sanhekou reservoir, owing to the water diversion from the Han to the Wei River. The research has an important theoretical significance and application value for the joint operation of cascade reservoirs in the upper Hanjiang River as well as the improvement of the comprehensive utilization efficiency of water resources.

Keywords

Cascade Reservoirs, Joint Operation, Compensation Benefit, Large-Scale System Decomposition and Coordination

汉江上游梯级水库联合调度研究

杨旺旺, 白涛*, 哈燕萍, 黄强

西安理工大学, 西北旱区生态水利工程国家重点实验室, 陕西 西安
Email: *baitao@xaut.edu.cn

收稿日期: 2017年6月28日; 录用日期: 2017年7月12日; 发布日期: 2017年7月19日

摘要

汉江上游缺乏梯级水库联合调控中心, 各水库单独调度运行, 导致梯级水能资源利用率较低。引汉济渭黄金峡、

作者简介: 杨旺旺(1992-), 男, 河北藁城人, 在读硕士, 主要从事水文水资源工作。

*通讯作者。

三河口水电站正在建设,新形势下汉江上游梯级调度中心位置的论证已迫在眉睫。本文采用大系统分解协调理论对汉江上游梯级水库联合调度进行了研究。结果表明:引汉济渭调水后,各梯级电站均获得了较大补偿效益,梯调中心由安康水库转移至三河口水库。研究成果对于汉江上游梯级水库联合调度运行、提高水资源综合利用效率具有重要的理论意义和应用价值。

关键词

梯级水库, 联合调度, 补偿效益, 大系统分解协调

Copyright © 2017 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

近年来,随着流域梯级开发地逐步深入,原有的单一水库运行管理模式带来的水能开发利用效率低、资源浪费等问题凸显,而在当今资源日渐短缺的危机下,包括水电开发在内的任何资源开发,都应该考虑资源的综合高效利用,因而如何实现梯级水库的综合运行和水能资源高效利用,已成为我国梯级连续滚动开发管理模式[1][2][3][4]研究的重中之重。目前,在众多的水电梯级开发管理模式中,对一个流域内的所有电站实行统一调度的管理模式,获得了一致认可和广泛应用。在国外,如美国的密西西比河、欧洲的莱茵河、多瑙河等梯级水电站的开发建设都实行一家统一管理,不仅获得了巨大的水电能源,而且获得了综合社会经济效益。在国内,如清江梯调中心[5]、黄河上游梯调中心[6]等已经建成,并发挥流域梯级电站统一调度功能,产生了较好的经济效益和社会效益。

汉江上游规划开发了8座梯级水电站,由于缺乏调度中心的统一管理,导致现阶段汉江上游各水库仍然采用单库调节模式,水能利用率较低。伴随着引汉济渭调水工程的展开,单库运行模式中存在的资源浪费问题,无疑将更加严重,因而迫切需要论证梯调中心位置。一般而言,梯调中心的建立需要考虑诸如流域梯级发电、供水、防洪、生态等因素[7],考虑到汉江上游梯级水库以发电为主,本文通过对汉江上游梯级水库发电效益潜力研究,以论证汉江上游梯调中心的位置。

本文以汉江上游流域为研究对象,以梯级水电站为调控主体,建立汉江上游梯级水库联合调度模型,针对传统算法如动态规划[8][9]、遗传算法[10]等求解梯级水库出现维数灾、局部最优解等问题,采用大系统分解协调理论对梯级水库进行分解协调,并进行梯级效益补偿计算,以期挖掘汉江上游梯级水库最大发电效益潜力,论证梯级联合调度中心位置所在。研究成果将为汉江上游梯调中心的建立提供理论支撑,同时对整个汉江流域电站的安全稳定运行和梯级水库优化调度有着重要的作用和现实意义。

2. 汉江流域概况及数据资料

2.1. 汉江流域概况

汉江是长江中游第一大支流,全长1577 km,流域面积159,000 km²,发源于陕西省宁强县秦岭南麓的潘家山,自陕西白河进入湖北省境内,至汉口注入长江。汉江上游流域和水库位置图,如图1所示。

2.2. 梯级水电站资料

汉江上游梯级规划按8级开发,自上至下分别为黄金峡、三河口、石泉、喜河、安康、旬阳、蜀河和白河水电站,各水电站主要指标值如表1所示。

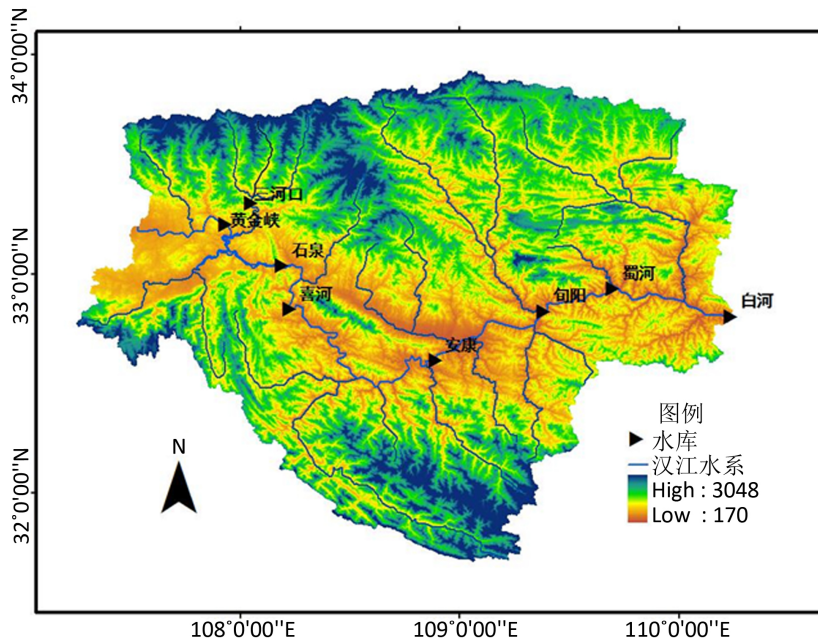


Figure 1. Map of the upper Hanjiang River basin and reservoir location
 图 1. 汉江上游流域水系和水库位置图

Table 1. Main technical indexes of cascade power stations in the upper Hanjiang River
 表 1. 汉江上游梯级各电站主要技术指标

项目	单位	黄金峡	三河口	石泉	喜河	安康	旬阳	蜀河	白河	
水库	正常蓄水位	/m	450	643	410	362	330	240	218	196
	死水位	/m	440	558	400	360	305	238	215	193
	调节库容	/10 ⁸ m ³	0.84	6.50	1.8	0.2	14.72	0.41	0.37	0.29
电站	装机容量	/MW	100	64	225	180	852.5	320	270	270
	保证出力	/MW	15	-	32	21.8	170	48	55	48
	年发电量	/10 ⁸ kW·h	4.64	1.21	7.07	4.92	27.48	8	9.48	7.8
归属	国网	/				√				√
	大唐	/		√	√		√	√		
	国资委	/	√	√						
备注		在建	在建	已建	已建	已建	在建	已建	在建	

2.3. 径流资料

计算所需资料主要包括径流资料、引汉济渭调水过程资料。其中径流资料采用月尺度径流资料，系列长度为 1957~2010 年，主要包括：三河口、石泉、安康、喜河四座水库坝址流量过程，区间支流流量过程；调水过程资料选用 2030 远景水平年调水总量 15 亿 m³ 情景。

2.4. 补偿计算资料

效益单价是进行补偿计算的前提，本文重点分析汉江上游梯调中心，对调水效益单价不作研究，仅参考陕西省引汉济渭工程协调领导小组办公室确定的单价[11]，发电和调水效益单价分别为：0.20 元/kW·h 和 4.46 元/m³，水泵耗能为 0.26 元/m³。其中，发电单价和水泵耗能单价数据来源于《引汉济渭工程初步设计报告》。

3. 汉江梯级水电站优化调度效益估算

3.1. 优化调度模型的建立

从水库的调节能力来看, 汉江上游 8 个梯级水库中, 三河口为多年调节水库, 石泉、安康 2 个水库为季调节水库, 其他梯级均为日调节水库。因此, 整个系统可概化为 3 个有调节能力的水电站发电最优调度运行问题。

目标函数: 梯级发电量最大

$$\max E = \max \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M N_m(k, t) \Delta t \quad (1)$$

式中: $N_m(k, t) = K_m Q F_m(k, t) H_m(k, t)$; K 为长系列资料长度; T 为年内总时段数, $T = 12$; M 为系统内有调节能力的水电站总数, $M = 3$; $Q F_m(k, t)$ 为第 m 水电站第 k 年第 t 时段的发电流量; $H_m(k, t)$ 为第 m 水电站第 k 年到 t 时段的发电水头; K_m 为第 m 水电站出力系数。

约束条件包括: 水库水量平衡、节点水量平衡、水库泄流、出力、水库水位的约束等。

3.2. 模型求解方法

汉江上游梯级水库中长期调度模型, 变量较多, 求解复杂度高, 直接采用诸如粒子群算法等常规智能优化算法进行求解, 难以获得理想可行解, 因此本文采用大系统分解协调理论求解模型。大系统分解协调理论主要包括: 系统优化模型分解和子系统协调。

3.2.1. 系统优化模型分解

从式(1)可以看出, 系统内各水库之间仅存在流量联系, 如式(2)所示

$$Q V_m(k, t) = \sum_{j=1}^M C_{m,j} Q C_m(k, t - \tau) + Q R_m(k, t) - Q y_m(k, t) \quad (2)$$

式中: $C_{m,j}$ 为 $M \times N$ 维布尔矩阵, 其元素由 0 或 1 组成, 反映第 j 水库的下泄流量与第 m 水库入库流量的关联; $Q V_m(k, t)$ 为第 m 水库第 k 年第 t 时段入库流量; $Q C_m(k, t - \tau)$ 为第 m 水库第 k 年第 $t - \tau$ 时段出库流量; τ 为流量传播历时; $Q R_m(k, t)$ 为第 m 水库第 k 年第 t 时段的区间入流; $Q y_m(k, t)$ 为第 m 水库第 k 年第 t 时段的需水流量; 如果把(2)式截开, 则将系统分解成单库子问题。

为了实现对系统的分解, 依照 Lagrange 对偶分解原理, 由(1)和(2)式建立 Langrange 函数:

$$\begin{aligned} L &= \sum_{k \in K} \sum_{t \in T} \sum_{m \in M} \left\{ N_m(k, t) + \lambda_m(k, t) \left[Q V_m(k, t) - \sum_{j=1}^M C_{m,j} \cdot Q C_m(k, t - \tau) + Q R_m(k, t) - Q y_m(k, t) \right] \right\} \\ &= \sum_{m \in M} \left\{ \sum_{k \in K} \sum_{t \in T} N_m(k, t) + \lambda_m(k, t) Q V_m(k, t) - \lambda_m(k, t) \cdot \sum_{j=1}^M C_{m,j} Q C_m(k, t - \tau) + \lambda_m(k, t) \cdot (Q R_m(k, t) - Q y_m(k, t)) \right\} \quad (3) \\ &= \sum_{m \in M} L_m \end{aligned}$$

式中: $\lambda_m(k, t)$ 为第 m 水库第 k 年第 t 时段的拉格朗日乘子; 其余变量同式(2)。

3.2.2. 子系统协调

引入子系统协调器[12], 用梯度法[13]实现对 λ 的迭代修正, $\lambda_m(k, t)$ 的迭代式为:

$$\lambda_m^{l+1}(k, t) = \lambda_m^l(k, t) + \alpha \left[Q V_m(k, t) - \sum_{j=1}^M C_{m,j} Q C_m(k, t - \tau) \right] + Q R_m(k, t) - Q y_m(k, t) \quad (4)$$

式中: l 为迭代次数; α 为步长。

3.2.3. 模型求解步骤

模型求解首先用大系统分解原理将 M 库联系分解, 然后把子系统分解成二级结构, 第一级为 M 个独立子问题(单库优化), 然后通过第二级协调器把各个子问题联在一起, 并协调各个子问题最优解, 使之满足关联约束。其中子问题求解采用 Howson [14]提出的逐步优化算法(POA), 具体算法不再赘述。

上述求解过程可归纳如下步骤:

Step 1: 协调器初步拟定 $\lambda_m^0(k, t)$, $m \in M$, $k \in K$, $t \in T$, 并置迭代次数 $l = 0$ 。

Step 2: 将 $\lambda_m^l(k, t)$ 送给下一级各子问题, 然后分别对子问题求解, 并将优化结果送给上级协调器(3)式。

Step 3: 协调器判断 λ 的梯度分量绝对值是否小于给定的精度 ε , 若是则转向 Step 4, 否则按(4)式计算 $\lambda^{l+1}(k, t)$, 转向 Step 2。

Step 4: 迭代计算停止, 输出最优运行策略。

4. 计算结果分析

本文设置两种计算模式: 引汉济渭调水前和引汉济渭调水后, 分别优化计算汉江上游梯级发电效益潜力。

4.1. 调水前梯级水库优化计算

首先对引汉济渭调水前汉江上游黄-白段梯级电站进行联合调度, 采用大系统分解协调和 POA 对梯级发电量最大模型进行求解, 结果如表 2 所示。

由表 2 可知:

(1) 石泉、喜河、旬阳、蜀河、白河多年平均发电量相比设计值分别提高 1.59%、14.57%、18.38%、1.48%、9.74%, 安康降低 4.96%, 三河口和黄金峡发电量没有变化。整个梯级发电量提高了 2.50%, 可见实施梯级水库联合调度存在较大发电潜力。

(2) 由于整个梯级效益的增加是建立在安康水库效益减小的基础上, 表明安康水库是梯级调度的关键控制性水库, 同时考虑水库调节库容, 安康水库是梯级联合调控中心最佳位置。

实施梯级水库联合调度的前提是利益的合理分摊, 常用的分摊方法有: 按梯级各电站兴利库容比例分摊法; 按梯级各电站水头比例分摊法; 按梯级各电站装机容量比例分摊法; 按梯级各电站保证出力分摊法等。本文主要针对梯级调度中心选取进行研究, 因此不对分摊方法的公平性进行研究, 直接采用梯级电站兴利库容比例分摊方法进行水库补偿效益的分摊, 计算结果如表 3 所示。

由表 3 可知: 由于安康水库调节库容最大, 因此获得补偿效益最大, 而大唐集团管控水库虽然较多, 但大多水库为径流式, 调节性能较小, 因此获得的补偿效益较小。总体而言, 国资委、大唐和国网分别可增加发电效益 0.115、0.040 和 0.215 亿元, 各家单位均有不同程度的效益补偿, 进一步表明选取安康水库作为梯级调度中心控制性水库在经济效益上的可行性。

4.2. 调水后梯级水库优化计算

考虑到 2030 远景水平年引汉济渭调水 15 亿 m^3 情形下, 梯级发电效益受损, 上述论证的梯调中心可能发生变化, 因此需要重新进行梯调中心论证, 计算结果如表 4 所示。

由表 4 可知: 引汉济渭调水后, 各电站发电量明显减少, 喜河电站发电量减幅最大为 31.63%, 蜀河电站发电量减幅最小为 7.48%, 整个梯级电站减幅达 16.40%。可见调水工程对下游水库发电产生了较大影响, 即使有安康水库调节, 也不可避免安康下游水库的电量损失, 表明梯级调度中心发生了转移。

为进一步论证梯调中心位置, 考虑发电效益、调水效益和水泵耗能进行梯级效益补偿计算, 计算结果如表 5 所示。

由表 5 可知: 由于调水单价远远大于发电单价和水泵耗能单价, 因此实施引汉济渭工程后, 整个梯级效益将大大提升, 调水效益完全可以弥补发电损失。

Table 2. Optimization results of cascade power generation before water diversion
表 2. 调水前梯级发电量优化结果

电站名称	设计发电量/亿 kW·h	多年平均发电量/亿 kW·h	多年平均发电量比设计值 增加的电量/亿 kW·h	多年平均发电量比设计值 增减百分比/%
黄金峡	4.46	4.46	0.00	0.00
三河口	2.92	2.92	0.00	0.00
石泉	6.30	6.40	0.10	1.59
喜河	4.94	5.66	0.72	14.57
安康	28.00	26.61	-1.39	-4.96
旬阳	8.00	9.47	1.47	18.38
蜀河	9.48	9.62	0.14	1.48
白河	7.80	8.56	0.76	9.74
合计	71.90	73.70	1.80	2.50

Table 3. Benefit compensation of cascade hydropower stations before water diversion
表 3. 调水前梯级电站效益补偿

公司	水库	库容/亿 m ³	补偿电量/亿 kW·h	补偿效益/亿元	合计/亿元
国资委	黄金峡	0.84	0.06	0.012	0.115
	三河口	6.5	0.47	0.093	
	石泉	1.8	0.13	0.026	
大唐	喜河	0.2	0.01	0.003	0.040
	旬阳	0.41	0.03	0.006	
	蜀河	0.37	0.03	0.005	
国网	白河	0.29	0.02	0.004	0.215
	安康	14.72	1.05	0.211	

Table 4. Optimization results of cascade power generation after water diversion
表 4. 调水后梯级发电量优化结果

电站名称	调水前多年平均发电量/亿 kW·h	调水后多年平均发电量/亿 kW·h	调水后比调水前 增加的电量/亿 kW·h	调水后比调水前 增减百分比/%
黄金峡	4.46	3.83	-0.63	-14.13
三河口	2.92	2.50	-0.42	-14.38
石泉	6.40	5.00	-1.40	-21.88
喜河	5.66	3.87	-1.79	-31.63
安康	26.61	22.96	-3.65	-13.72
旬阳	9.47	7.20	-2.27	-23.97
蜀河	9.62	8.90	-0.72	-7.48
白河	8.56	7.35	-1.21	-14.14
合计	73.70	61.61	-12.09	-16.40

同样采用梯级电站兴利库容比例分摊方法进行水库补偿效益的分摊，计算结果如表 6 所示。

由表 6 可知：国资委、大唐和国网分别可增加发电效益 17.69、6.70 和 36.18 亿元，而这一补偿效益主要来源于黄金峡和三河口的调水效益。由于黄金峡为日调节水库，虽然位于汉江干流，但不能作为梯调中心控制水库，反观三河口水库，为多年调节水库，虽然位于汉江支流，但可通过黄、三水库不同调水量任务分配，间接控制干流水量分配，因此三河口可作为远景年梯级调控中心。

综合上述调水前后两种模式下梯级发电量和梯级效益计算结果，如图 2、图 3 所示。

由图 2、图 3 可知：

(1) 无论是引汉济渭调水前还是调水后，实施梯级水库联合调度均存在不同程度发电效益提升，表明实施梯调中心统一管理模式，将提高流域水能利用率。

(2) 引汉济渭调水前后，梯级效益发生了巨大变化，对应的梯调中心也发生了转移，由安康水库转移至上游具有多年调节性能的三河口水库，可见新形势下，汉江上游梯调中心论证的必要性。

Table 5. Calculation results of total benefit

表 5. 总效益计算结果

效益	单价	调水前后变化量	补偿效益
发电效益	0.20 元/kW·h	-12.09/亿 kW·h	-2.42 亿元
调水效益	4.46 元/m ³	15/亿 m ³	66.90 亿元
水泵耗能	0.26 元/m ³	15/亿 m ³	-3.90 亿元

Table 6. Benefit compensation of cascade hydropower stations after water diversion

表 6. 调水后梯级电站效益补偿

公司	水库	库容/亿 m ³	效益补偿/亿元	合计/亿元
国资委	黄金峡	0.84	2.02	17.69
	三河口	6.50	15.67	
	石泉	1.80	4.34	
大唐	喜河	0.20	0.48	6.70
	旬阳	0.41	0.99	
	蜀河	0.37	0.89	
国网	白河	0.29	0.70	36.18
	安康	14.72	35.48	

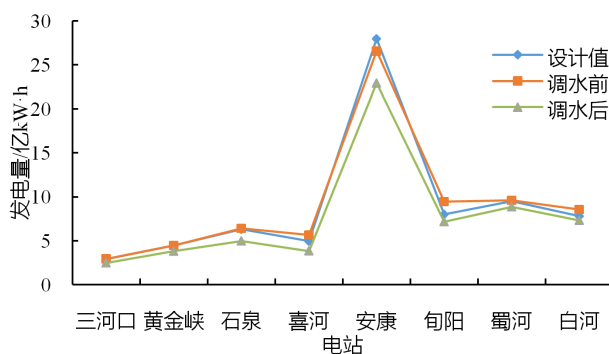


Figure 2. Power generation of each station in different modes

图 2. 不同模式下各电站发电量

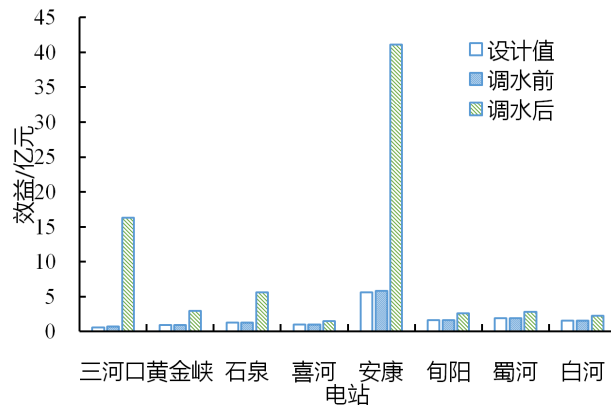


Figure 3. Benefits of each station in different modes
图 3. 不同模式下各电站效益

综上所述,新形势下以多年调节性能的三河口水库作为梯级水库联合调度中心,进行调水、发电综合调控,虽然梯级各电站发电量有所损失,但整个梯级效益得到了巨大提升,完全可以弥补电量损失,增加的效益远远大于调水前增加的效益。

5. 结论

(1) 引汉济渭调水前,安康电站多年平均发电量降低 4.96%,三河口、黄金峡电站没有变化,其余各电站较设计值均有所提高。其中,旬阳电站增幅最大,为 18.4%。整个梯级多年平均发电量与设计值相比,提高了 2.5%,表明梯级联合调度存在较大发电潜能,安康电站为梯级调度中心最佳位置。

(2) 引汉济渭调水后,梯级电站发电量均有不同程度减小,但巨大的调水效益,使得各电站所属公司获得了较大效益补偿,梯级调度中心由安康水库转移至上游三河口水库。

基金项目

国家自然科学基金(51409210; 91325201); 水利部公益性行业科研专项(201501058); 陕西省水利科技计划项目(2016slkj-8; 2017slkj-16); 西安理工大学水利水电学院科研项目(2016ZZKT-15)。

参考文献 (References)

- [1] 李义昌. 国家与地方相结合的流域水电开发管理体制[J]. 湖北水力发电, 1993(1): 5-8.
LI Yichang. National and local combination of river basin hydropower development management system. Hubei Water Power, 1993(1): 5-8. (in Chinese)
- [2] 王祥干, 宋海红, 王宜军. 国外水库开发管理实例[J]. 水利发展研究, 2006(7): 40-42.
WANG Xianggan, SONG Haihong, WANG Yijun. Examples of foreign reservoir development and management. Water Resources Development Research, 2006(7): 40-42. (in Chinese)
- [3] 徐宏宇. 水库运行管理[A]. 中国大坝协会, 2011: 2.
XU Hongyu. Reservoir operation management. Chinese National Committee on Large Dams, 2011: 2.
- [4] 关杰林, 余波, 李晖, 李天智. 溪洛渡 - 向家坝梯级电站“调控一体化”调度运行管理模式研究[J]. 华东电力, 2010(8): 1185-1187.
GUAN Jielin, YU Bo, LI Hui, LI Tianzhi. Investigation on operating and scheduling management mode with integration of dispatch and control in Xiluodu-Xiangjiaba cascade hydropower stations. East China Electric Power, 2010(8): 1185-1187. (in Chinese)
- [5] 郑威. 梯级水电厂集中控制运行模式探索[J]. 湖北水力发电, 2007(4): 49-51.
ZHENG Wei. Research on centralized control of operating mode of cascade hydropower plants. Hubei Water Power, 2007(4): 49-51. (in Chinese)
- [6] 可素娟, 周康军. 黄河流域水资源一体化管理机制研究[J]. 人民黄河, 2007, 29(1): 5-7.

- KE Sujuan, ZHOU Kangjun. Study on the integrated management mechanism of water resources in the Yellow River basin. *Yellow River*, 2007, 29(1): 5-7. (in Chinese)
- [7] 王学斌, 畅建霞, 孟雪姣, 王义民. 基于改进 NSGA- II 的黄河下游水库多目标调度研究[J]. *水利学报*, 2017(2): 135-145+156.
WANG Xuebin, CHANG Jianxia, MENG Xuejiao, WANG Yimin. Research on multi-objective operation based on improved NSGA-II for the lower Yellow River. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2017(2): 135-145+156. (in Chinese)
- [8] 赵铜铁钢, 雷晓辉, 蒋云钟, 王浩. 水库调度决策单调性与动态规划算法改进[J]. *水利学报*, 2012(4): 414-421.
ZHAO Tongtiegang, LEI Xiaohui, JIANG Yunzhong, WANG Hao. Monotonicity in operation decision of reservoir and improved dynamic programming algorithm. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2012(4): 414-421. (in Chinese)
- [9] 纪昌明, 李传刚, 刘晓勇, 王渤权, 张培. 基于泛函分析思想的动态规划算法及其在水库调度中的应用研究[J]. *水利学报*, 2016(1): 1-9.
JI Changming, LI Chuangang, LIU Xiaoyong, WANG Boquan, ZHANG Pei. Research and application of dynamic programming algorithm in reservoir operation based on functional analysis. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2016(1): 1-9. (in Chinese)
- [10] 王旭, 雷晓辉, 蒋云钟, 王浩. 基于可行空间搜索遗传算法的水库调度图优化[J]. *水利学报*, 2013(1): 26-34.
WANG Xu, LEI Xiaohui, JIANG Yunzhong, WANG Hao. Reservoir operation chart optimization searching in feasible region based on genetic algorithms. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2013(1): 26-34. (in Chinese)
- [11] 葛雁. 引汉济渭工程供水价格初探[J]. *陕西水利*, 2016(4): 13-16.
GE Yan. A preliminary study on the water supply price of the Yangtze River. *Shaanxi Water Resources*, 2016(4): 13-16. (in Chinese)
- [12] 吴昊, 纪昌明, 蒋志强, 张验科. 梯级水库群发电优化调度的大系统分解协调模型[J]. *水力发电学报*, 2015(11): 40-50.
WU Hao, JI Changming, JIANG Zhiqiang, ZHANG Yanke. Large system decomposition-coordination model for optimal power-generation scheduling of cascade reservoirs. *Journal of Hydroelectric Engineering*, 2015(11): 40-50. (in Chinese)
- [13] 陈元媛, 高岩, 刘志敏, 杜守强. 一类特殊优化问题的光滑梯度法[J]. *运筹学学报*, 2017(2): 119-125.
CHEN Yuanyuan, GAO Yan, LIU Zhimin, DU Shouqiang. The smoothing gradient method for a kind of special optimization problem. *Operations Research Transactions*, 2017(2): 119-125. (in Chinese)
- [14] HOWSON, H. R., SANCHO, N. G. F. A new algorithm for the solution of multi-state dynamic programming problems. *Mathematical Programming*, 1975, 8(1): 104-116. <https://doi.org/10.1007/BF01580431>