

椭圆穿孔板超材料的带隙特性计算分析

张祖坚, 郭辉*, 袁涛, 孙裴, 黄双, 马西沛

上海工程技术大学机械与汽车工程学院, 上海

收稿日期: 2023年3月29日; 录用日期: 2023年6月27日; 发布日期: 2023年7月5日

摘要

为研究二维多孔结构的带隙特性, 本文在均质方形板基础上设计一种由三组椭圆孔组成的超材料结构, 建立椭圆穿孔板有限元模型, 利用有限元法研究结构在自由状态和1 mm指定位移时的带隙特征, 分析椭圆穿孔板的带隙特性、传输特性曲线和带隙边界的振型。结果表明, 合理改变结构的边界条件, 不仅可以拓宽带隙宽度, 还可将归一化频率0~0.5范围内方向带隙转化为完全带隙, 能更有效地衰减和抑制弹性波传播。

关键词

边界条件, 超材料, 带隙, 椭圆穿孔板, 有限元法

Calculation and Analysis of Band Gap Characteristics of Elliptical Perforated Plate Metamaterials

Zujian Zhang, Hui Guo*, Tao Yuan, Pei Sun, Shuang Huang, Xipei Ma

School of Mechanical and Automotive Engineering, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai

Received: Mar. 29th, 2023; accepted: Jun. 27th, 2023; published: Jul. 5th, 2023

Abstract

In order to study the bandgap characteristics of two-dimensional porous structures, a metamaterial structure composed of three groups of elliptical holes is designed on the basis of homogeneous square plates, a finite element model of elliptical perforated plates is established, and the

*通讯作者。

bandgap characteristics of the structure in the free state and 1mm specified displacement are studied by the finite element method. The bandgap characteristics, transmission loss curves and modes of the bandgap boundary of elliptical perforated panel were analyzed. The results show that reasonable change of the boundary conditions of the structure can not only expand the width of the wide bandgap, but also convert the directional band gap in the normalized frequency range of 0~0.5 into a complete band gap, which can more effectively attenuate and suppress the propagation of elastic waves.

Keywords

Boundary Conditions, Metamaterials, Bandgap, Elliptical Perforated-Panel, FEM

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

目前,与多孔结构相结合的机械超材料具有典型的周期穿孔结构,正广泛应用于吸声降噪[1][2]、超分辨率成像[3]、水声探测[4]、抵抗抗冲击[5]等方面。

轻质多孔超材料主要有蜂窝结构、手性和反手性结构,以及穿孔板类结构等。因多孔结构具有质地轻、强度高、良好的静力学特性,越来越多研究者将多孔结构应用在减振降噪方面,并取得良好的效果。Gupta等[6]在对周期性梁和板振动的研究过程中,解释了周期结构中弹性波带隙产生的原因,发现了带隙边界和原胞与模态频率之间的关系。Wu等[7]将微穿孔板和卷曲的空间结构组合一起,实现了结构厚度为50 mm时,在归一化频率后的带宽达到0.82。Xiao等[8]在薄板基础上附加周期局域振子,构建的板状超材料可大幅提高隔声量。在此基础上,Song等[9]进一步引入蜂窝层级板结构,将软橡胶和铝制作的局域振子附加在蜂窝夹层板上,在中高频段获得比同等质量的蜂窝板结构更好的隔声效果。

目前对多孔结构的应用研究除了在吸声方面,许多研究人员对多孔结构的减振性能同样作了大量工作。如Sun等[10][11]通过用改进的遗传算法对方形框架结构中材料的分布进行了优化,可有效拓宽和调控低频带隙。Wang等[12][13]对方形、“十”字形和“X”形穿孔板的内部孔型排列方式对结构带隙特性的变化作了深入研究,发现旋转对称的孔型结构更容易打开带隙。Wu等[14]在以螺旋孔为基体的原胞的两侧附加钢柱,在250 Hz以下产生了较宽的低频带隙。然而,目前对多孔结构的研究除了对经典的方形、圆形等孔型结构研究外,因带隙频率高和带宽较窄,因此有必要对穿孔板结构进行设计研究。

本文在第一层级穿孔板结构[15][16]基础上,引入第二、第三组椭圆孔设计建立复合椭圆穿孔板模型,计算了椭圆穿孔板在自由状态和边界受到指定位移作用下的带隙特性。结果表明,结构边界条件改变可以增大带隙宽度,并且在一定范围内打开更多的完全带隙,在 $\Omega \leq 0.5$ 范围内打开频率更低的完全带隙。

2. 结构模型的建立

本文所述椭圆穿孔板结构是在均质方形板的基础上设计的,结构内部共分为3组大小不同的椭圆孔。假设 $oxy, o'x'y'$ 是两个坐标系, o 和 o' 分别为原点,且 o' 在 oxy 中坐标为 (x_0, y_0) ,由 x 轴到 x' 轴的角度为 $\pi/4$,图1中 P 点坐标 (x_1, y_1) ,则通过式(1)可得出变换后的 P' 坐标 (x_1', y_1') 。不同椭圆孔的几何参数通过公式(1)~(3)进行定义。

$$\begin{cases} x = x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta + x_0 \\ y = x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta + y_0 \end{cases} \quad (1)$$

$$a_i = \frac{A}{5} - 2(i-1) \quad (2)$$

$$b_i = \frac{A}{2^i \times 5} \quad (3)$$

其中, x 和 y 分别表示, 坐标变化后椭圆上点的横、纵坐标, θ 表示椭圆孔绕 y 轴旋转的角度; A 表示原胞尺寸, a_i 表示第 i ($i \leq 3$) 组椭圆孔的长半轴大小, b_i 表示第 i 组椭圆孔的短半轴大小。

如图 1 所示, 根据公式(1)将坐标系中心的椭圆变换得到三组不同大小的椭圆孔。第一、二组均由 4 个椭圆孔组成, 第三组由 8 个椭圆孔组成, 如图 2 所示。其中, 第 1 组在方形板四个角的位置处, 该组的 4 个椭圆长半轴均与各自所在卦限的角平分线垂直, 第 2 组和第 3 组椭圆长半轴则均与坐标轴垂直。

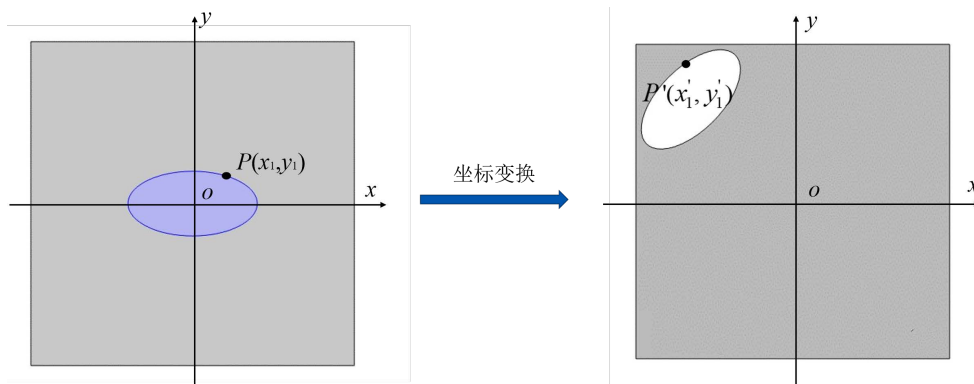


Figure 1. Schematic diagram of elliptical hole position transformation
图 1. 椭圆孔位置变换示意图

该结构选用的基体材料为尼龙, 材料的弹性模量、密度和泊松比分别为 $E_0 = 1.8 \times 10^9$ (Pa)、 $\rho_0 = 1010$ (kg/m^3)、 $\nu_0 = 0.38$ 。同时, 在结构中间填充半径 $r = 8\text{mm}$ 的铜质圆柱体, 其材料参数分别为 $E_0 = 1.8 \times 10^9$ (Pa)、 $\rho_0 = 1010$ (kg/m^3)、 $\nu_0 = 0.38$ 。

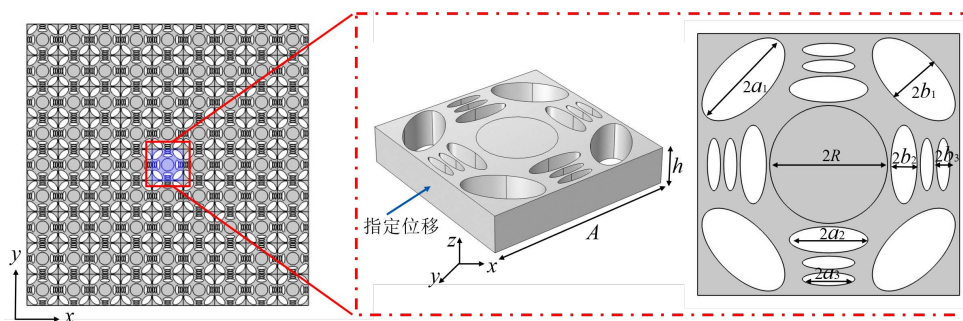


Figure 2. Elliptical perforated-plate model
图 2. 椭圆穿孔板模型

根据公式(2)与公式(3)建立的椭圆穿孔板模型的相关几何结构参数如图 2 所示。根据椭圆孔几何参数的定义公式, 原胞的几何结构参数数值如表 1 所示。

Table 1. Geometric parameters value of unit cell
表 1. 原胞结构几何参数数值

参数	值/mm	说明
A	40	晶格尺寸
h	8	穿孔板厚度
a_1	8	第一组椭圆孔长半轴
b_1	4	第一组椭圆孔短半轴
a_2	6	第二组椭圆孔长半轴
b_2	2	第二组椭圆孔短半轴
a_3	4	第三组椭圆孔长半轴
b_3	1	第三组椭圆孔短半轴
R	8	填充体半径

3. 带隙机理及布里渊区

根据弹性波在固体中传播的波动方程,利用有限元软件 COMSOL 对弹性波在椭圆穿孔板结构中的传播过程进行仿真,通过弹性波理论求解特征方程,得到结构的本征频率。弹性波在 xoy 平面中的传播时,其波动方程如公式(4)所示:

$$\rho(\mathbf{r})\ddot{\mathbf{u}}_{xy}(\mathbf{r},t)=[\lambda(\mathbf{r})+\mu(\mathbf{r})]\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}_{xy}(\mathbf{r},t)+\mu(\mathbf{r})\nabla^2\mathbf{u}_{xy}(\mathbf{r},t) \quad (4)$$

其中, ρ 为介质的密度, $\mathbf{u}(x,y)$ 和 $\mathbf{r}=(x,y)$ 分别表示位移矢量、位置矢量。此外,因结构周期性可将位移表示为公式(5):

$$\mathbf{u}_d = \mathbf{u}_s e^{-ik(\mathbf{r}_d \cdot \mathbf{r}_s)} \quad (5)$$

式中, \mathbf{k} 为波矢, \mathbf{u}_s 是与各材料参数具有相同周期的函数。

当波矢 \mathbf{k} 沿着不可约 Brillouin 区(阴影部分)边界扫掠,如图 3 所示。由于弹性波受到内部周期性结构作用形成特殊的色散关系,可绘制出频率 f 和波矢 \mathbf{k} 的变化曲线,即能带结构。

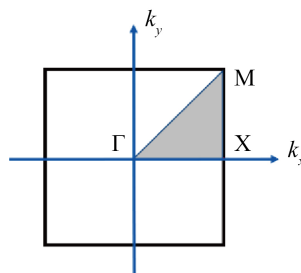


Figure 3. Irreducible Brillouin zone
图 3. 不可约布里渊区

基于弹性波理论和有限元法计算出各层级的能带结构及相应振型,考虑到精确度和计算效率,本研究前 20 阶振型。为便于观察带隙频率与材料参数、结构参数之间的关系,将能带结构图的纵坐标数值通过公式(6)进行归一化处理:

$$\Omega = \frac{f \times a}{c_l} \quad (6)$$

其中, Ω 为归一化频率, f 为频率, a 为晶格常数, c_t 为横波波速。

4. 结果与分析

通过位移法研究该椭圆穿孔板结构 1×6 单元的传输损耗模型, 如图 4 所示。根据第 2 节中带隙产生的基本理论, 计算得到的椭圆穿孔板能带结构如图 5(a) 所示, 图 5(a) 中灰色阴影部分表示完全带隙, 黑色阴影部分表示方向带隙。

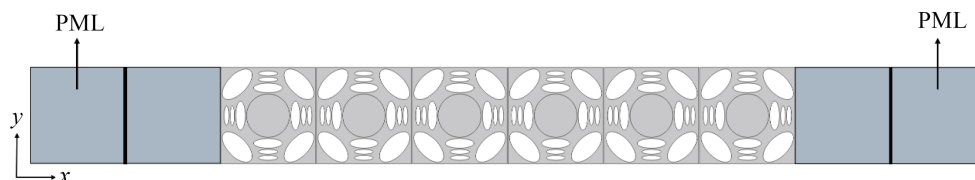


Figure 4. Transmission loss model before boundary conditions change

图 4. 边界条件改变前的传输损耗模型

计算得到传输损耗曲线如图 5(b) 所示。从图 5(a) 中可知, 该结构在前 20 条能带打开了 2 个完全带隙, 且在 $M\Gamma$ 、 ΓX 和 XM 方向上各打开了 2 个方向带隙, 其中第一个完全带隙同时也是带宽最大的带隙, Ω 范围为 $0.58 \sim 0.76$, 分布在第 6、7 能带之间; 第二个完全带隙分布于第 12、13 能带之间, Ω 范围是 $1.02 \sim 1.17$; 此外, 在第 3 和第 4 能带之间形成了 XM 方向带隙, 带宽范围为 $0.37 \sim 0.40$ 。

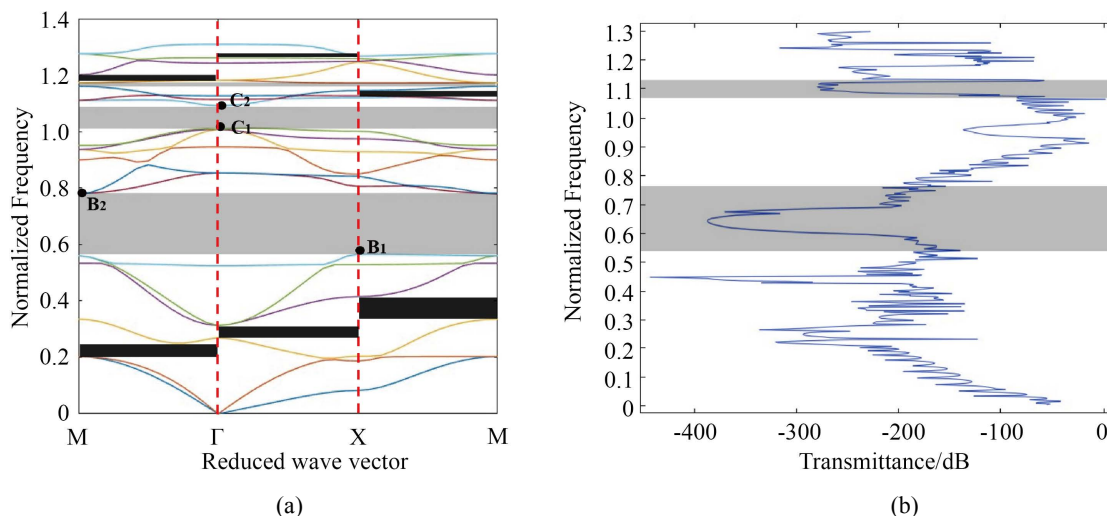


Figure 5. BGs characteristics and transmission curve (a) Energy band structure; (b) Transmission loss

图 5. 带隙特性和传输特性曲线(a) 能带结构; (b) 传输损耗

从图 5(b) 可知, 计算得到的传输损耗系数在 2 个完全带隙及 6 个方向带隙范围均有不同程度的下降, 且均在 -150 dB 以下, 传输损耗系数的大幅衰减表明弹性波在相关带隙范围内可被有效衰减。

为进一步阐述带隙打开的机理, 将第一个完全带隙和第二个完全带隙上、下边界处的模态作为研究对象, 如图 6 所示。

从图 5(a) 知第一带隙下边界的能带呈平直状态, 这是结构产生局域共振所导致的, 结合图 6 的 B_1 可知, 弹性波频率等于结构第 6 阶特征频率时, 该结构中心几乎保持静止状态, 四个角部分等效为局域振

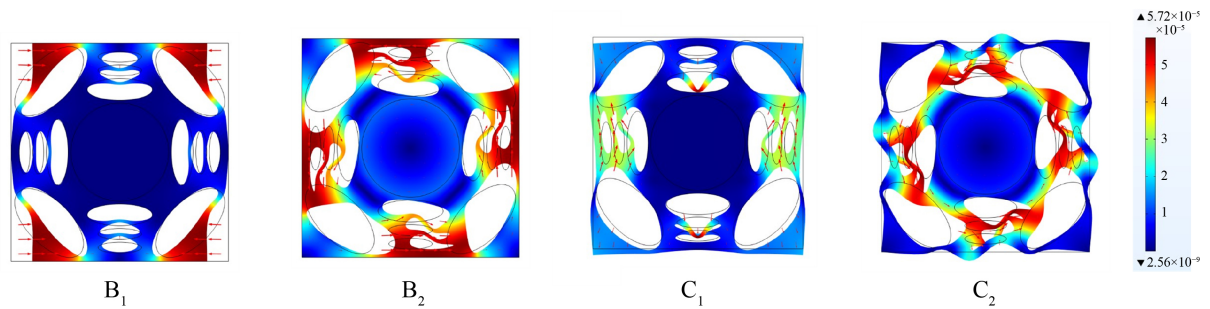


Figure 6. The modes of BG's boundary
图 6. 带隙边界处的振型

子，激发局域振子产生局域共振，且左右两边振子运动方向相反，弹性波传播过程中的能量在该区域被耗散，使得弹性波不能继续向下一个单元继续传播，带隙开始打开。图 6 中的 B_2 显示，当弹性波频率大于结构第 7 阶特征频率时，该结构四周边界的中心沿着逆时针方向剧烈振动，第二组和第三组椭圆孔中间韧带位置扭转振动，同时结构四个角部分同样沿着逆时针方向振动，局域共振耦合作用消失，弹性波随着结构边界和韧带位置的振动继续传播，带隙关闭。

图 6 中的 C_1 表明，此时该结构四个角部分沿着 y 轴负方向振动，此外，第二组椭圆孔的韧带沿着 y 轴负方向振动，同时左右两侧边界和第三组椭圆孔中间韧带则沿着 y 轴正方向振动，由于结构内部的振动方向相反，弹性波在结构内部边界发生反射，与入射的行波发生相互作用，从而产生布拉格散射，带隙由此打开。从图 6 中的 C_2 可知，该结构四个角位置几乎保持静止状态，结构内部第二组、第三组椭圆孔处的韧带部分沿着逆时针方向振动，且振动方式为激烈的扭转振动，布拉格散射作用消失，弹性波继续传播，带隙关闭。

从图 6 的四个模态振型表明，尽管如此结构中心铜柱几乎保持静止状态，结合图 5(a)， $\Omega \leq 1$ 范围内只有 1 个完全带隙，结构带隙的数量少且无法在低频范围打开带隙，说明填充铜柱对改变该结构的效果并不明显。因此接下来在结构中心填充了铜柱的基础上，通过改变结构的边界条件来改善结构的带隙特性。

如图 7 所示，在超过材料线弹性极限内对结构边界施加一定激励，在 y 轴负方向边界面给予 1 mm 的指定位移(绿色线条所示)，另一侧则设置为固定约束(蓝色线条所示)。

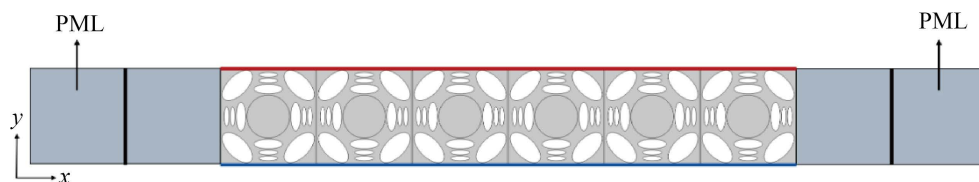


Figure 7. Transmission loss model after boundary conditions change
图 7. 边界条件改变后的传输损耗模型

同样，根据弹性波理论可计算得到结构边界条件改变后的特殊色散关系曲线，如图 8(a)所示。从图 8(a)中可知，与图 5(a)相比，在改变结构的边界条件后，该结构共形成了 8 个完全带隙，同时打开的 5 个方向带隙均在 XM 方向。通过能量法研究了该结构的 1×6 单元传输损耗模型，计算得到传输损耗曲线如图 8(b)所示。从图 8(a)中可知， $\Omega \leq 1$ 范围内打开了 4 个完全带隙，第一个完全带隙带宽虽然较小，但相比于边界条件改变之前的图 5(a)，该结构在更低频率下打开了完全带隙， Ω 范围为 0.21~0.24，分布在

第 2、3 能带之间；第二个完全带隙分布于第 3 和第 4 能带之间， Ω 范围为 0.40~0.41；第三个完全带隙分布于第 4、5 能带之间，同时该完全带隙也是带宽最大的带隙， Ω 范围是 0.55~0.82；第四个完全带隙范围为 0.83~0.85，分布于第 6、7 能带之间。

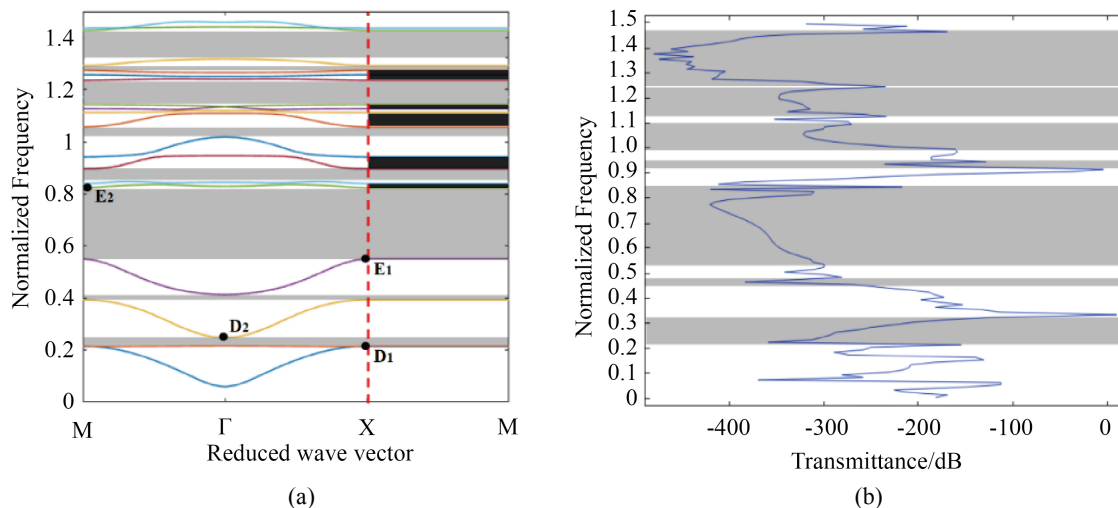


Figure 8. BGs characteristics and transmission curve (a) Energy band structure; (b) Transmission loss
图 8. 带隙特性和传输特性曲线(a) 能带结构; (b) 传输损耗

从图 8(b)可知，计算得到的传输损耗系数在 4 个完全带隙及 5 个 XM 方向带隙范围均有不同程度的下降，并且几乎在 -300 dB 以下，传输损耗系数的大幅衰减表明弹性波在相关带隙范围内的衰减效果更加有效。

为进一步阐述边界条件改变后带隙打开的机理，将第一个完全带隙和完全带隙上、下边界处的模态作为研究对象，如图 9 所示，四个模态分别对应椭圆穿孔板结构第 2、3、4 和 5 阶特征频率下的主振型。

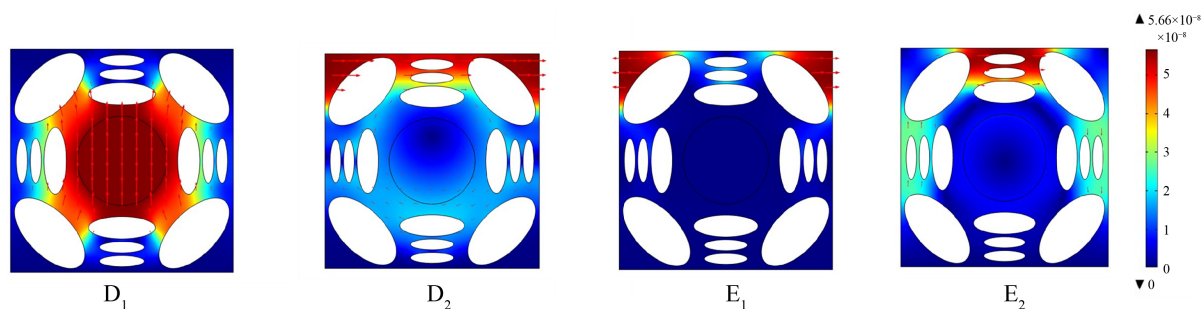


Figure 9. The modes of BG's boundary
图 9. 带隙边界处的振型

从图 8(a)知第一带隙下边界的能带非常平直，这是结构产生典型的局域共振所导致的，结合图 9 的 D_1 可知，弹性波频率等于结构第 2 阶特征频率时，结构的四个角位置质量块和边界均保持静止状态，而铜柱及其周围的基体部分作为局域振子，使得局域振子沿着 y 轴正方向振动，弹性波因结构内部的局域共振作用不能继续向下一个单元继续传播，开始打开带隙。图 8 中的 D_2 显示，当弹性波频率大于结构第 2 阶特征频率且逐渐远离第 3 阶特征频率时，该结构上方的两个角位置和第三组椭圆孔韧带及边界处均

沿着 x 轴正方向的运动, 而圆柱及其周围的基体部分则围绕圆柱中心按逆时针方向旋转振动, 而左右第二组和第三组椭圆孔中间韧带位置分别沿着 x 轴两个方向振动, 由于结构内部各部分振动模式的不同, 局域共振耦合作用逐渐减弱直至消失, 对弹性波的抑制作用也逐渐减弱直至消失, 因此弹性波随着结构振动继续传播, 带隙关闭。

图 8 中的 E_1 表明, 此时该结构上半部分的两个角位置处沿着 x 轴正、负方向振动, 两部分局域振动方向相反, 相互耦合作用使得弹性波在该结构中传播时被抑制和衰减, 带隙由此打开。从图 8 中的 E_2 可知, 该结构上半部分两个角位置沿着结构中心顺时针旋转振动, 上边界及第二、第三组椭圆孔的韧带处沿着 x 轴正方向振动, 而左右两侧的第三组椭圆孔韧带振动方向相反, 多个部分的振动耦合为结构边界的顺时针方向振动, 局域共振效果减弱直至消失, 不在对弹性波的传播起到抑制作用, 弹性波随着结构的振动向下一个单元继续传播, 带隙关闭。

结合图 5 和图 8 可知, 带隙边界处的模态振型均分布在不可约布里渊区的高对称点 M 、 Γ 、 X 上, 从图 8(a) 可知, 在完全带隙和方向带隙的 XM 方向的带隙边界上, 其能带结构均呈平直状态, 说明边界条件改变后, 结构在带隙边界处的振型振动均为局域共振为主。通过分析结构各带隙边界处的振型可知, 在结构边界条件的改变下, 更易于激发结构内部产生局域振动。

5. 结论

通过有限元建模及分析, 研究了椭圆穿孔板超材料带隙特性, 椭圆穿孔板受到指定位移作用后, 其能带结构和振型均发生了显著变化, 由此得出以下结论:

1) 在结构边界施加指定位移的激励后, 可将带宽最大的带隙从 0.58~0.76 拓宽为 0.55~0.82, 并在 $\Omega \leq 0.5$ 范围内额外打开 2 个完全带隙, 可在更低频率范围内抑制弹性波传播。

2) 多孔结构内部易形成局域振子, 其内部复杂的耦合作用可增强局域共振。通过改变结构边界条件, 可将原来 $\Omega \leq 1.4$ 范围内的 $M\Gamma$ 、 ΓX 和 XM 方向带隙转化为完全带隙, 实现在更大频率范围内抑制弹性波传播。

需要说明的是, 椭圆穿孔板在非线性变形阶段以及多物理场作用下的变形机制及其对其带隙特性的影响仍值得进一步研究, 以便获得频率更低、带隙更宽、力学性能更优的椭圆穿孔板超材料, 从而满足工程实际应用需要。

项目基金

国家自然科学基金(52172371); 上海市优秀学术/技术带头人计划资助项目(21XD1401100)。

参考文献

- [1] Min, H. and Guo, W. (2019) Sound Absorbers with a Micro-Perforated Panel Backed by an Array of Parallel-Arranged Sub-Cavities at Different Depths. *Applied Acoustics*, **149**, 123-128. <https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2019.01.013>
- [2] Guo, Z., Hu, G., Sorokin, V., Tang, L., Yang, X. and Zhang, J. (2021) Low-Frequency Flexural Wave Attenuation in Metamaterial Sandwich Beam with Hourglass Lattice Truss Core. *Wave Motion*, **104**, Article ID: 102750. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2021.102750>
- [3] 徐俭乐, 崔洪宇, 洪明. 声子晶体夹层板结构的隔声性能研究[J]. 振动与冲击, 2021, 40(9): 285-291.
- [4] Liu, A.P., Zhou, X.M., Huang, G.L. and Hu, G.K. (2012) Super-Resolution Imaging by Resonant Tunneling in Anisotropic Acoustic Metamaterials. *Journal of the Acoustical Society of America*, **132**, 2800-2806. <https://doi.org/10.1121/1.4744932>
- [5] Milton, G.W. (2012) Complete Characterization of the Macroscopic Deformations of Periodic Unimode Metamaterials of Rigid Bars and Pivots. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **7**, 1543-1560. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2012.08.011>

-
- [6] Gupta, S.G. (1971) Natural Frequencies of Periodic Skin-Stringer Structures Using a Wave Approach. *Journal of Sound and Vibration*, **4**, 567-580. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(71\)90663-8](https://doi.org/10.1016/0022-460X(71)90663-8)
- [7] Wu, D., Zhang, N., Mak, C.M. and Cai, C. (2017) Noise Attenuation Performance of a Helmholtz Resonator Array Consist of Several Periodic Parts. *Sensors*, **17**, Article 1029. <https://doi.org/10.3390/s17051029>
- [8] Xiao, Y., Wen, J. and Wen, X. (2012) Sound Transmission Loss of Metamaterial-Based Thin Plates with Multiple Subwavelength Arrays of Attached Resonators. *Journal of Sound and Vibration*, **25**, 5408-5423. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.07.016>
- [9] Song, Y.B., Feng, L.P., Wen, J.H., Yu, D.L. and Wen, X.S. (2015) Reduction of the Sound Transmission of a Periodic Sandwich Plate Using the Stop Band Concept. *Composite Structures*, **128**, 428-436. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.02.053>
- [10] Cheng, Q., Guo, H., Yuan, T., *et al.* (2020) Topological Design of Square Lattice Structure for Broad and Multiple Band Gaps in Low-Frequency Range. *Extreme Mechanics Letters*, **35**, Article ID: 100632. <https://doi.org/10.1016/j.eml.2020.100632>
- [11] Sun, P., Zhang, Z., Guo, H., *et al.* (2022) Topological Optimization of Hierarchical Honeycomb Acoustic Metamaterials for Low-Frequency Extreme Broad Band Gaps. *Applied Acoustics*, **188**, Article ID: 108579. <https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2021.108579>
- [12] Wang, N.S., Wang, F.Y., Luo, C.C., Liu, Z.L. and Zhuang, Z. (2019) Low-Frequency Tunable Locally Resonant Band Gaps in Acoustic Metamaterials through Large Deformation. *Extreme Mechanics Letters*, **35**, Article ID: 100623. <https://doi.org/10.1016/j.eml.2019.100623>
- [13] Li, J., Wang, Y.T., Chen, W.Q., Wang, Y.S. and Bao, R.H. (2019) Harnessing Inclusions to Tune Post-Buckling Deformation and Bandgaps of Soft Porous Periodic Structures. *Journal of Sound and Vibration*, **459**, Article ID: 114848. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2019.114848>
- [14] Dudek, K.K., Iglesias Martínez, J.A., Ulliac, G. and Kadic, M. (2022) Micro-Scale Auxetic Hierarchical Mechanical Metamaterials for Shape Morphing. *Advanced Materials*, **34**, Article ID: 2110115. <https://doi.org/10.1002/adma.202110115>
- [15] Shi, H.Y.Y., Tay, T.E. and Lee, H.P. (2019) Elastic Wave Propagation in Perforated Plates with Tetrad Elliptical Structural Hierarchy: Numerical Analysis and Experimental Verification. *Journal of Sound and Vibration*, **448**, 73-82. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2019.02.008>
- [16] 张祖坚, 郭辉, 王晓玮, 等. 边界载荷对层级椭圆穿孔板超材料带隙的影响[J]. 人工晶体学报, 2023, 52(2): 261-270.