Operations Research and Fuzziolgy 运筹与模糊学, 2012, 2, 35-41
http://dx.doi.org/10.12677/orf.2012.23005 Published Online August 2012 (http://www.hanspub.org/journal/orf.html)

Some Results on Solving a Class of Stochastic Mathematical Programs with Complementarity Constraints*

Yuwen Huang, Guihua Lin

School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian
Email: s200511021@163.com, lin_g_h@yahoo.com.cn

Received: Jul. 16th, 2012; revised: Jul. 24th, 2012; accepted: Aug. 25th, 2012

Abstract: This paper considers a class of stochastic linear programs with linear complementarity constraints (SLPCC). We first transform the SLPCC into a stochastic linear programming problem under some conditions. Then, we suggest a sampling average approximation method to solve the SLPCC and establish its convergence analysis. We finally report some preliminary numerical results.

Keywords: Stochastic Mathematical Program with Complementarity Constraints; ***P***/***Z*** Matrix; Sample Average Approximation; Convergence

求解一类随机互补约束数学规划问题的若干结果*

黄玉文，林贵华

大连理工大学数学科学学院，大连
Email: s200511021@163.com, lin_g_h@yahoo.com.cn

收稿日期：2012 年 7 月 16 日；修回日期：2012 年 7 月 24 日；录用日期：2012 年 8 月 25 日

摘　要：本文研究一类带有线性互补约束的随机线性优化问题(SLPCC)。我们首先在一定条件下将该 SLPCC 转化成随机线性规划，然后提出一种求解 SLPCC 的抽样平均逼近方法，并给出了相关的收敛性分析。最后，我们给出了初步的数值试验结果。

关键词：随机互补约束数学规划问题；***P***/***Z*** 矩阵；抽样平均逼近；收敛性

1. 引言

互补约束数学规划问题(MPCC)即如下优化问题：

$$\begin{aligned} &\min \quad f(x,y) \\ &\text{s.t.} \quad (x,y)\in D, \\ &\qquad y\ge 0, G(x,y)\ge 0, y^T G(x,y)=0, \end{aligned}$$

其中 D 是 R^{n+m} 中的子集，f 与 G 分别是 R^{n+m} 到 R 和 R^m 的映射。MPCC 在工程设计、双层规划等方面有着广泛应用，在过去的几十年中，人们从理论、算法、应用等方面对 MPCC 进行了深入的研究，参见文献[1-4]。当 $f(x,y)=c^T x+d^T y$，$D=\{(x,y)|Ax\le b\}$ 时，MPCC 变成如下带有互补约束的线性优化问题(LPCC)：

*资助信息：本文获国家自然科学基金项目(项目编号 11071028)资助。

$$\begin{aligned}\min\ & c^T x+d^T y\\ \text{s.t.}\ & Ax\le b,\\ & y\ge 0,\ p+Nx+My\ge 0,\\ & y^T\left(p+Nx+My\right)=0,\end{aligned}\tag{1}$$

其中 $p,d\in R^m$， $c\in R^n$， $b\in R^l$， $A\in R^{l\times n}$， $M\in R^{m\times m}$， $N\in R^{m\times n}$。关于其研究可参见文献[1,7-8]。

定义 1.1[9] 设集合 $S\subseteq R^m$，如果对任意的 $x\in S$ 均有 $x\ge v$，则称 v 是 S 的下界。如果进一步还有 $v\in S$，则称 v 是 S 的最小元素。

文献[7]通过引入最小元素的方法将 LPCC 的线性互补约束在 M 为 $\boldsymbol{P}_0$ 和 $\boldsymbol{Z}$ 矩阵的条件下转化成凸的隐式函数，进而将 LPCC 转化成如下凸规划问题：

$$\begin{aligned}\min\ & c^T x+d^T y(x)\\ \text{s.t.}\ & Ax\le b, x\in X,\\ & y(x)=\arg\min\left\{h^T y\,\middle|\,p+Nx+My\ge 0,\ y\ge 0\right\},\end{aligned}$$

其中 $d>0$， $h>0$， $X=\left\{x\,\middle|\,y\ge 0\ \ s.t.\ p+Nx\ge -My\right\}$。特别地，对给定的 $x\in X$， $y(x)$ 是 LPCC 的线性互补约束的最小元素解，且 $y(x)$ 是从 X 到 R_+^m 的凸函数。进一步，当 M 是 $\boldsymbol{M}$-矩阵时，LPCC 可转化成如下线性规划问题：

$$\begin{aligned}\min\ & c^T x+d^T y\\ \text{s.t.}\ & Ax\le b,\\ & p+Nx+My\ge 0,\ y\ge 0.\end{aligned}$$

此外，文献[7]还证明了 LPCC 的线性互补约束的隐式解可由最小元素解 $y(x)$ 和一个 Perron-Frobenius 正向量来表示。

受文献[7]的启发，本文研究如下带有互补约束的随机线性优化问题(SLPCC)：

$$\begin{aligned}\min\ & E\left[c(\omega)\right]^T x+E\left[d(\omega)\right]^T y\\ \text{s.t.}\ & E\left[A(\omega)\right]x\le b,\\ & y\ge 0,\ E\left[p(\omega)\right]+E\left[N(\omega)\right]x+E\left[M(\omega)\right]y\ge 0,\\ & y^T\left(E\left[p(\omega)\right]+E\left[N(\omega)\right]x+E\left[M(\omega)\right]y\right)=0,\end{aligned}\tag{2}$$

其中 $\omega\in\Omega$， Ω 是样本空间， $E[\cdot]$ 表示关于 ω 的数学期望。这个模型是模型(1)在随机条件下的推广形式，由于在实际应用中常常存在天气、需求、环境等不确定因素，因此研究(2)具有实际意义。我们首先在适当条件下将上述 SLPCC 转化成随机线性规划，然后提出一种求解 SLPCC 的抽样平均逼近方法，并建立其收敛性理论。

后文中将用到下面的定义和引理：

定义 1.1[5,6] 设矩阵 $\boldsymbol{Q}\in R^{n\times n}$。如果对于任意的 $x\in R^n\setminus\{0\}$，总存在一个分量，使得 $x_i(\boldsymbol{Q}x)_i>(\ge)0$ 成立，则称矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为 $\boldsymbol{P}$($\boldsymbol{P}_0$)矩阵。如果矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的非对角线元素都是非正数，则称 $\boldsymbol{Q}$ 为 $\boldsymbol{Z}$ 矩阵。如果矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 是一个非奇异的 $\boldsymbol{Z}$ 矩阵，且其逆矩阵的每个元素都是非负的，则称 $\boldsymbol{Q}$ 为 $\boldsymbol{M}$-矩阵。

引理 1.1[6] 设 M 是 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Z}$ 矩阵，则 M 是 $\boldsymbol{M}$-矩阵。

引理 1.2[7] 设 M 是 $\boldsymbol{M}$-矩阵， $d>0$，则问题(1)等价于如下线性规划问题：

$$\begin{aligned}\min\ & c^T x+d^T y\\ \text{s.t.}\ & Ax\le b,\\ & p+Nx+My\ge 0,\ y\ge 0.\end{aligned}$$

2. 求解 SLPCC

记 $\bar{c}=E\left[c(\omega)\right]$， $\bar{d}=E\left[d(\omega)\right]$， $\bar{A}=E\left[A(\omega)\right]$， $\bar{p}=E\left[p(\omega)\right]$， $\bar{N}=E\left[N(\omega)\right]$， $\bar{M}=E\left[M(\omega)\right]$。则(2)可以写成

$$\begin{aligned} &\min\ \bar{c}^T x+\bar{d}^T y \\ &\text{s.t.}\ \ \bar{A}x\le b, \\ &\qquad y\ge 0,\ \ \bar{p}+\bar{N}x+\bar{M}y\ge 0, \\ &\qquad y^T\left(\bar{p}+\bar{N}x+\bar{M}y\right)=0, \end{aligned} \tag{3}$$

下面我们利用基于蒙特卡罗方法的抽样平均逼近技术来求解问题(3)。

给定可积函数 $f:\Omega\to R$，所谓利用蒙特卡罗方法近似其期望值 $E\left[f(\omega)\right]$，即对随机变量 ω 进行 k 次抽样，产生与 ω 独立同分布的序列 $\{\omega_1,\cdots,\omega_k\}\subset\Omega$，则有 $E\left[f(\omega)\right]\approx\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}f(\omega_i)$。根据强大数定律知此过程是以概率1(w.p.1)收敛的，即

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}f(\omega_i)=E\left[f(\omega)\right]:=\int_\Omega f(\omega)\mathrm{d}\xi(\omega)\quad \text{w.p.1}, \tag{4}$$

其中 $\xi(\omega)$ 是随机变量 ω 的概率分布函数。详情可参见文献[10]。

给定随机变量 ω 的独立同分布的序列 $\{\omega_1,\cdots,\omega_k\}\subset\Omega$，利用这些样本点的均值近似期望值，即可得到(3)的逼近问题如下：

$$\begin{aligned} &\min\ \ c_k^{\ T}x+d_k^{\ T} \\ &\text{s.t.}\ \ A_k x\le b \\ &\qquad y\ge 0,\ p_k+N_k x+M_k y\ge 0, \\ &\qquad y^T\left(p_k+N_k x+M_k y\right)=0, \end{aligned} \tag{5}$$

其中 $c_k=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}c(\omega_i)$， $d_k=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}d(\omega_i)$， $A_k=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}A(\omega_i)$， $N_k=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}N(\omega_i)$， $M_k=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}M(\omega_i)$。由(4)式知，当 $k\to\infty$ 时， c_k， d_k， p_k， A_k， N_k， M_k 分别以概率 1 收敛到 $\bar{c}$， $\bar{d}$， $\bar{p}$， $\bar{A}$， $\bar{N}$， $\bar{M}$。

引理 2.1 设 $\bar{M}$ 是 ***P*** 矩阵，而 M_k 以概率 1 趋于 $\bar{M}$。则 $\exists k_0$，使当 $k\ge k_0$ 时 M_k 是 ***P*** 矩阵。

证明：假设存在 $\{M_k\}$ 的子列 $\{M_{k_j}\}$，它的每一项都不是 ***P*** 矩阵。则对每个 j，均 $\exists x_j\ne 0$，使得 $\forall i$ 均有

$$x_i^j\left(M_{k_j}x_j\right)_i\le 0, \tag{6}$$

其中 $x_j\in R^m$。不妨设 $\|x_j\|=1(\forall j)$，并不失一般性可假设 $\lim_{j\to\infty}x^j=\bar{x}$。由于 M_k 以概率 1 趋于 $\bar{M}$，则对 $\forall i$ 均有

$$x_i^j\left(M_{k_j}x^j\right)_i-\bar{x}_i\left(\bar{M}\,\bar{x}\right)_i=x_i^j\left[\left(M_{k_j}-\bar{M}\right)x^j\right]_i+x_i^j\left[\bar{M}\left(x^j-\bar{x}\right)\right]_i+\left(x_i^j-\bar{x}_i\right)\left(\bar{M}\,\bar{x}\right)_i\to 0\quad (j\to\infty),$$

所以

$$\lim_{j\to\infty}x_i^j\left(M_{k_j}x^j\right)_i=\bar{x}_i\left(\bar{M}\,\bar{x}\right)_i$$

以概率 1 成立。由(6)可知 $\bar{x}_i\left(\bar{M}\,\bar{x}\right)_i\le 0\,(\forall i)$，因此 $\bar{x}_i\left(\bar{M}\,\bar{x}\right)_i\le 0$ 对所有的 $\bar{x}_i\ne 0$ 都成立。这与 $\bar{M}$ 是 ***P*** 矩阵相矛盾。因此假设错误，结论成立。

记 $\bar{M}=\left(m_{ij}\right)_{m\times m}$， $M_k=\left(m_{ij}^k\right)_{m\times m}$。假设 $\bar{M}$ 是 ***Z*** 矩阵，则 $\bar{M}$ 的非对角线元素非正。若 $\bar{M}$ 的非对角线存在 0

元素，则令 $\lambda_k = \max\left\{ m_{ij}{}^k : 1 \le i, j \le m, i \ne j \right\}$， $M'_k = M_k - \lambda_k Q$，其中 $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$。否则，令 $M'_k = M_k$。

引理 2.2 设 $\bar{M}$ 为 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Z}$ 矩阵，则 $\lim_{k\to\infty} M'_k = \bar{M}$ 且 $\exists K$ 使得当 $k \ge K$ 时 M'_k 为 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Z}$ 矩阵。

证明： 若 $\bar{M}$ 的非对角线元素均为负，则 $M'_k = M_k$。由 $\lim_{k\to\infty} M_k = \bar{M}$，存在 K_1，当 $k \ge K_1$ 时，M'_k 是 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Z}$ 矩阵。当 $\bar{M}$ 的非对角线元素存在 0 元素且 $\bar{M}$ 是 $\boldsymbol{Z}$ 矩阵时，由 M'_k 的定义，显然对 $\forall k$，M'_k 均为 $\boldsymbol{Z}$ 矩阵。再由 λ_k 的定义知 $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$。因此

$$\lim_{k\to\infty} M'_k = \lim_{k\to\infty}\left(M_k - \lambda_k Q\right) = \bar{M}.$$

由引理 2.1 的证明过程知，存在 K_2 使得当 $k \ge K_2$ 时 M'_k 是 $\boldsymbol{P}$ 矩阵。取 $K = \max\{K_1, K_2\}$，则当 $k \ge K$ 时 M'_k 必为 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Z}$ 矩阵。

若将 M'_k 作为 M_k 的扰动，则可利用下面的优化问题去逼近问题(5)：

$$\begin{aligned} \min\ & c_k^T x + d_k^T y \\ \text{s.t. } & A_k x \le b, \\ & y \ge 0,\ p_k + N_k x + M'_k y \ge 0, \\ & y^T\left(p_k + N_k x + M'_k y\right) = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

设 $\bar{M}$ 是 $\boldsymbol{P}$ 矩阵和 $\boldsymbol{Z}$ 矩阵且 $\bar{d} > 0$。则由引理 1.2，问题(3)等价于如下线性规划：

$$\begin{aligned} \min\ & \bar{c}^T x + \bar{d}^T y \\ \text{s.t. } & \bar{A} x \le b, \\ & y \ge 0,\ \bar{p} + \bar{N} x + \bar{M} y \ge 0. \end{aligned} \tag{8}$$

由引理 2.2 知，当 $\bar{M}$ 是 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Z}$ 矩阵时，$\exists K$ 使得当 $k \ge K$ 时 M'_k 是 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Z}$ 矩阵。由 $\lim_{k\to\infty} d_k = \bar{d}$ 知，$\exists K'$ 使得当 $k \ge K'$ 时有 $d_k > 0$。故对每个 $k \ge \max\{K, K'\}$，由引理 1.2，问题(7)可以转化成线性规划问题

$$\begin{aligned} \min\ & c_k^T x + d_k^T y \\ \text{s.t. } & A_k x \le b, \\ & y \ge 0,\ p_k + N_k x + M'_k y \ge 0. \end{aligned} \tag{9}$$

定义 2.1 若存在向量 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in R^{n+m}$ 满足 $\bar{A}\boldsymbol{x} < b$，$\bar{p} + \bar{N}\boldsymbol{x} + \bar{M}\boldsymbol{y} > 0$，$y > 0$，则称问题(8)满足 Slater 约束规范。

引理 2.3 设线性规划(8)满足 Slater 约束规范，则 $\exists K$ 使得对每个 $k \ge K$，近似问题(9)以概率 1 满足 Slater 约束规范。

证明： 因为(8)满足 Slater 约束规范，则存在向量 $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) \in R^{n+m}$ 满足 $\bar{A}\bar{\boldsymbol{x}} < b$，$\bar{p} + \bar{N}\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{M}\bar{\boldsymbol{y}} > 0$，$\bar{y} > 0$。由 $\lim_{k\to\infty} A_k \bar{\boldsymbol{x}} - b = \bar{A}\bar{\boldsymbol{x}} - b < 0$ 以概率 1 成立，则存在 k_1，使得对每个 $k \ge k_1$ 均有 $A_k \bar{\boldsymbol{x}} - b < 0$；由 $\lim_{k\to\infty} p_k + N_k \bar{\boldsymbol{x}} + M_k \bar{\boldsymbol{y}} = \bar{p} + \bar{N}\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{M}\bar{\boldsymbol{y}} > 0$ 以概率 1 成立，则存在 k_2，使得对每个 $k \ge k_2$ 均有 $p_k + N_k \bar{\boldsymbol{x}} + M_k \bar{\boldsymbol{y}} > 0$。取 $K = \max\{k_1, k_2\}$，则对每个 $k \ge K$ 均有 $A_k \bar{\boldsymbol{x}} > 0$，$p_k + N_k \bar{\boldsymbol{x}} + M_k \bar{\boldsymbol{y}} > 0$。所以，对每个 $k \ge K$，近似问题(9)以概率 1 满足 Slater 约束规范。

定理 2.1 设对每个 k，$\left(x^k, y^k\right)$ 是问题(9)的最优解，$\left(x^*, y^*\right)$ 是 $\left\{\left(x^k, y^k\right)\right\}$ 的聚点，且问题(8)满足 Slater 约束规范，则 $\left(x^*, y^*\right)$ 以概率 1 是(9)的最优解。

证明： 不妨设 $\lim_{k\to\infty}\left(x^k, y^k\right) = \left(x^*, y^*\right)$。因为(8)满足 Slater 约束规范，由引理 2.3，$\exists K$ 使得对每个 $k \ge K$，近似问题(9)以概率 1 满足 Slater 约束规范。由于对每个 k，$\left(x^k, y^k\right)$ 均为(9)的全局最优解，故存在 Largrange 乘子 λ^k，

μ^k，v^k 满足(9)的 KKT 条件

$$c_k + A_k^T\lambda_k - N_k^T v_k = 0,\ d_k - \mu_k - M_k'^T v_k = 0. \tag{10}$$

$$0 \le \lambda_k \perp A_k x^k - b \le 0, 0 \le \mu_k \perp y_k \ge 0, 0 \le v_k \perp p_k + N_k x^k + M_k' y \ge 0. \tag{11}$$

首先证明点列 $\left\{\lambda^k\right\}$，$\left\{\mu^k\right\}$，$\left\{v^k\right\}$ 均以概率 1 有界。为此，令

$$\tau_k := \sqrt{\left\|\lambda_k\right\|^2 + \left\|\mu_k\right\|^2 + \left\|v_k\right\|^2} \tag{12}$$

$$\bar{\lambda}^k := \frac{\lambda^k}{\tau_k},\ \bar{\mu}^k := \frac{\mu^k}{\tau_k},\ \bar{v}^k := \frac{v^k}{\tau_k} \tag{13}$$

由于 $\left\{\bar{\lambda}^k\right\}$，$\left\{\bar{\mu}^k\right\}$，$\left\{\bar{v}^k\right\}$ 均有界，可不妨设极限 $\bar{\lambda} := \lim_{k\to\infty}\bar{\lambda}_k$，$\bar{\mu} := \lim_{k\to\infty}\bar{\mu}_k$，$\bar{v} := \lim_{k\to\infty}\bar{v}_k$ 均存在。由(12)~(13)易得

$$\left\|\bar{\lambda}\right\|^2 + \left\|\bar{\mu}\right\|^2 + \left\|\bar{v}\right\|^2 = 1 \tag{14}$$

假设 $\left\{\lambda^k\right\}$，$\left\{\mu^k\right\}$，$\left\{v^k\right\}$ 不全以概率 1 有界。则当 $k\to\infty$ 时，τ_k 以概率 1 存在一个子列趋于 $+\infty$。不妨设 $\lim_{k\to\infty}\tau_k = +\infty$。因为 c_k、d_k、p_k、A_k、N_k、M_k 分别以概率 1 收敛到 $\bar{c}$、$\bar{d}$、$\bar{p}$、$\bar{A}$、$\bar{N}$、$\bar{M}$，则对(10)所有式子两边以及(11)中的 λ^k，μ^k，v^k 同时除以 τ_k 并令 $k\to\infty$，则下式以概率 1 成立：

$$\begin{aligned}&\bar{A}^T\bar{\lambda} - \bar{N}^T\bar{v} = 0,\ -\bar{\mu} - \bar{M}^T\bar{v} = 0,\\ &0 \le \bar{\lambda} \perp \bar{A}x^* - b \le 0,\ 0 \le \bar{\mu} \perp y^* \ge 0, 0 \le v \perp \bar{p} + \bar{N}x^* + \bar{M}y^* \ge 0.\end{aligned} \tag{15}$$

记 $I_1\left(x^*\right) = \left\{i\ \left|\left(\bar{A}x^* - b\right)_i = 0\right.\right\}$，$I_2\left(y^*\right) = \left\{i\ \left|y_i = 0\right.\right\}$，$I_3\left(x^*, y^*\right) = \left\{i\left|\left(\bar{p} + \bar{N}x^* + \bar{M}y^*\right)_i = 0\right.\right\}$。由(15)的互补性条件知，当 $i \notin I_1\left(x^*\right)$ 时 $\bar{\lambda}_i = 0$，当 $i \notin I_1\left(y^*\right)$ 时 $\bar{\mu}_i = 0$，当 $i \notin I_1\left(x^*, y^*\right)$ 时 $\bar{v}_i = 0$。令 $\bar{A} = \left(a_{ij}\right)_{l\times n}$，$\bar{N} = \left(n_{ij}\right)_{m\times n}$，$\bar{M} = \left(m_{ij}\right)_{m\times m}$，则由 $\bar{A}^T\bar{\lambda} - \bar{N}^T\bar{v} = 0$，$-\bar{\mu} - \bar{M}^T\bar{v} = 0$ 可得

$$\sum_{i\in I_1\left(x^*\right)} a_{ij}\bar{\lambda}_i - \sum_{i\in I_3\left(x^*, y^*\right)} n_{ij}\bar{v}_i = 0 \qquad j = 1, 2, \cdots, n \tag{16}$$

$$\bar{\mu}_j + \sum_{i\in I_3\left(x^*, y^*\right)} m_{ij}\bar{v}_i = 0 \qquad j = 1, 2, \cdots, m \tag{17}$$

因(8)满足 Slater 约束规范，则存在 $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}})$ 使得 $\bar{A}\bar{\boldsymbol{x}} < b$，$\bar{p} + \bar{N}\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{M}\bar{\boldsymbol{y}} > 0$，$\bar{\boldsymbol{y}} > 0$，进一步有

$$\left[\left(\bar{A}\bar{\boldsymbol{x}} - b\right) - \left(\bar{A}x^* - b\right)\right]_i = \left[\bar{A}\left(\bar{\boldsymbol{x}} - x^*\right)\right]_i < 0, \qquad i \in I_1\left(x^*\right). \tag{18}$$

$$\left[\bar{\boldsymbol{y}} - y^*\right]_i > 0, \qquad i \in I_2\left(y^*\right). \tag{19}$$

$$\left[\left(\bar{p} + \bar{N}\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{M}\bar{\boldsymbol{y}}\right) - \left(\bar{p} + \bar{N}x^* + \bar{M}y^*\right)\right]_i = \left[\bar{N}\left(\bar{\boldsymbol{x}} - x^*\right)\right]_i + \left[\bar{M}\left(\bar{\boldsymbol{y}} - y^*\right)\right]_i > 0,\ i \in I_3\left(x^*, y^*\right). \tag{20}$$

假设存在 $i \in I_1\left(x^*\right)$ 使得 $\bar{\lambda}_i > 0$，存在 $i \in I_2\left(y^*\right)$ 使得 $\bar{\mu}_i > 0$，并存在 $i \in I_3\left(x^*, y^*\right)$ 使得 $\bar{v}_i > 0$。则将(18)，(19)和(20)两边分别乘以 $\bar{\lambda}_i$，$\bar{\mu}_i$，$\bar{v}_i$，再对 i 取和可得

$$\sum_{i\in I_1\left(x^*\right)}\bar{\lambda}_i\left[\bar{A}\left(\bar{\boldsymbol{x}} - x^*\right)\right]_i = \left(\bar{\boldsymbol{x}} - x^*\right)^T\begin{pmatrix}\sum_{i\in I_1\left(x^*\right)}\bar{\lambda}_i a_{i1}\\ \vdots\\ \sum_{i\in I_1\left(x^*\right)}\bar{\lambda}_i a_{i1}\end{pmatrix} < 0, \tag{21}$$

$$\sum_{i\in I_2\left(y^*\right)}\bar{\mu}_i\left(\bar{\boldsymbol{y}} - y^*\right)_i < 0, \tag{22}$$

$$\sum_{i\in I_3\left(x^*,y^*\right)}\overline{v}_i\left[\overline{N}\left(\overline{\boldsymbol{x}}-x^*\right)\right]_i+\sum_{i\in I_3\left(x^*,y^*\right)}\overline{v}_i\left[\overline{M}\left(\overline{\boldsymbol{y}}-y^*\right)\right]_i=\left(\overline{\boldsymbol{x}}-x^*\right)^T\begin{pmatrix}\sum\limits_{i\in I_3\left(x^*,y^*\right)}\overline{v}_i n_{i1}\\ \vdots\\ \sum\limits_{i\in I_3\left(x^*,y^*\right)}\overline{v}_i n_{in}\}\end{pmatrix}+\left(\overline{\boldsymbol{y}}-y^*\right)^T\begin{pmatrix}\sum\limits_{i\in I_3\left(x^*,y^*\right)}\overline{v}_i m_{i1}\\ \vdots\\ \sum\limits_{i\in I_3\left(x^*,y^*\right)}\overline{v}_i m_{im}\end{pmatrix}<0. \quad (23)$$

将不等式(21)~(23)两边整理相加可得

$$\left(\overline{\boldsymbol{x}}-x^*\right)^T\begin{pmatrix}\sum\limits_{i\in I_1\left(x^*\right)}\overline{\lambda}_i a_{i1}-\sum\limits_{i\in I_3\left(x^*,y^*\right)}\overline{v}_i n_{i1}\\ \vdots\\ \sum\limits_{i\in I_1\left(x^*\right)}\overline{\lambda}_i a_{i1}-\sum\limits_{i\in I_3\left(x^*,y^*\right)}\overline{v}_i n_{in}\end{pmatrix}-\left(\overline{\boldsymbol{y}}-y^*\right)^T\begin{pmatrix}\sum\limits_{i\in I_3\left(x^*,y^*\right)}\overline{v}_i m_{i1}+\overline{\mu}_1\\ \vdots\\ \sum\limits_{i\in I_3\left(x^*,y^*\right)}\overline{v}_i m_{im}+\overline{\mu}_m\end{pmatrix}<0. \quad (24)$$

这与(16)及(17)式相矛盾，故对每个$i\in I_1\left(x^*\right)$均有$\overline{\lambda}_i=0$，对每个$i\in I_2\left(y^*\right)$均有$\overline{\mu}_i=0$，对每个$i\in I_3\left(x^*,y^*\right)$均有$\overline{v}_i=0$。因此$\overline{\lambda}=0$，$\overline{\mu}=0$，$\overline{v}=0$，这与(14)式相矛盾。故$\left\{\lambda^k\right\}$，$\left\{\mu^k\right\}$，$\left\{v^k\right\}$均以概率 1 有界。

不失一般性，假设$\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k=\lambda^*$，$\lim\limits_{k\to\infty}\mu_k=\mu^*$，$\lim\limits_{k\to\infty}v_k=v^*$。对(10)和(11)式取极限可得

$$\begin{aligned}&\overline{c}+\overline{A}^T\lambda^*-\overline{N}^Tv^*=0,\ \overline{d}-\mu^*-\overline{M}^Tv^*=0,\\&0\le\lambda^*\perp\overline{A}x^*-b\le0, 0\le\mu^*\perp y^*\ge0, 0\le v^*\perp\overline{p}+\overline{N}x^*+\overline{M}y^*\ge0\end{aligned}$$

以概率 1 成立，亦即$\left(x^*,y^*\right)$以概率 1 满足问题(9)的 KKT 条件。因(9)为凸规划，故$\left(x^*,y^*\right)$以概率 1 为(9)的最优解。

3. 初步数值试验结果

我们对如下 SLPCC 进行了初步的数值试验：

$$\begin{aligned}&\min\ 0.5x_1+0.25x_2+y_1+2y_2+3y_3\\&\text{s.t.}\ x_1+x_2\le 1,\\&\qquad y\ge0,\ p+E\left[N(\omega)\right]x+E\left[M(\omega)\right]y\ge0,\\&\qquad y^T\left(p+E\left[N(\omega)\right]x+E\left[M(\omega)\right]y\right)=0,\end{aligned}$$

其中$p=\begin{pmatrix}-2\\1\\-4\end{pmatrix}$，$N(\omega)=\begin{pmatrix}2\omega-3&-2\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$M(\omega)=\begin{pmatrix}2&-1&1-2\omega\\-1&2&-1\\1-2\omega&-1&4-2\omega\end{pmatrix}$，随机变量$\omega$服从[0,1]上的一致分布。

经计算可得$\overline{N}=E\left[N(\omega)\right]=\begin{pmatrix}-2&-2\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$\overline{M}=E\left[M(\omega)\right]=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&3\end{pmatrix}$。显然$\overline{M}$是 ***P*** 和 ***Z*** 矩阵，于是原问题可转化为如下线性规划问题：

$$\begin{aligned}&\min\ 0.5x_1+0.25x_2+y_1+2y_2+3y_3\\&\text{s.t.}\ x_1+x_2\le1,\\&\qquad y\ge0, p+\overline{N}x+\overline{M}y\ge0.\end{aligned}$$

该线性规划问题的最优解为$\left(x^*,y^*\right)=\left(3,-2,2,0,2\right)$。

数值试验是在 Matlab7.0 完成的，利用 unifrnd 产生随机数，并调用 linprog 函数来求解每个线性规划问题。计算机配置为 Windows XP 系统、CPU(AMD Athlon 64 × 2 双核 4400+)和 1GB 内存。数值试验结果请见表 1。

Table 1. Numerical results
表 1. 数值试验结果

	$\left(x^{*}, y^{*}\right)=(3.0000,-2.0000,2.0000,0.0000,2.0000)$	
k	$\left(x^{k}, y^{k}\right)$	$\left\|\left(x^{k}, y^{k}\right)-\left(x^{*}, y^{*}\right)\right\|$
100	(3.2060, –2.2060, 2.0439, 0.0000, 2.0499)	0.2988
1000	(2.8279, –1.8279, 1.9654, 0.0000, 1.9586)	0.2493
10,000	(3.0199, –2.0199, 2.0041, 0.0000, 2.0048)	0.0288
100,000	(2.9986, –1.9986, 1.9997, 0.0000, 1.9997)	0.0020
1,000,000	(2.9985, –1.9985, 1.9997, 0.0000, 1.9996)	0.0022
10,000,000	(3.0003, –2.0003, 2.0001, 0.0000, 2.0001)	0.00044721

4. 结论

本文主要主要研究 SLPCC (2)。受文献[7]的启发，我们首先在一定条件下将 SLPCC 转化为随机线性规划问题，然后提出了一种求解该类问题的抽样平均逼近方法，并给出了相关的收敛性分析及初步的数值试验。

参考文献 (References)

[1] M. Fukushima, G.-H. Lin. Smoothing methods for mathematical programs with equilibrium constraints. Proceedings of the ICKS'04, IEEE Computer Society, 2004: 206-213.
[2] Z.-Q. Luo, J.-S. Pang and D. Ralph. Mathematical programs with equilibrium constraints. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
[3] J. Outrata, M. Ko č vara and J. Zowe. Nonsmooth approach to optimization problems with equilibrium constraints. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998.
[4] H. Scheel, S. Scholtes. Mathematical programs with complementarity constraints: Stationarity, optimality, and sensitivity. Mathematics of Operations Research, 2000, 25(1): 1-22.
[5] F. Facchinei, J.-S. Pang. Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems. New York: Springer-Verlag, 2003.
[6] R. W. Cottle, J.-S. Pang and R. E. Stone. The linear complementarity problem. Boston: Academic Press, 1992.
[7] X. Chen, S. Xiang. Impicit solution function of $\boldsymbol{P}_0$ and $\boldsymbol{Z}$ matrix linear complementarity constraints. Mathematical Programming, 2011, 128(1-2): 1-18.
[8] J. Hu, J. E. Mitchell, J.-S. Pang, K. P. Bennett and G. Kunapuli. On the global solution of linear programs with linear complementarity constraints. SIAM Journal on Optimization, 2009, 19(1): 445-471.
[9] 韩继业, 修乃华, 戚厚铎. 非线性互补理论与算法[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2006.
[10] A. Ruszczynski, A. Shapiro. Stochastic programming. Handbooks in operations research and management science. Amsterdam: Elsevier, 2003.