Operations Research and Fuzziolgy 运筹与模糊学, 2013, 3, 7-14
http://dx.doi.org/10.12677/orf.2013.32002 Published Online May 2013 (http://www.hanspub.org/journal/orf.html)

An Implicit Finite Difference Scheme for Space-Time Fractional Partial Differential Equation*

Yang Zhang[1], **Ruiyi Wang**[2]

[1]School of Mathematical Science, Nankai University, Tianjin
[2]School of Science, Hebei University of Technology, Tianjin
Email: zhangyang@nankai.edu.cn

Received: Apr. 6th, 2013; revised: Apr. 10th, 2013; accepted: May 10th, 2013

Abstract: Fractional order differential equations are generalizations of classical differential equations. They are widely used in the fields of diffusive transport, finance, nonlinear dynamics, signal processing and others. In this paper, an implicit finite difference method for a class of initial-boundary value space-time fractional two-sided space partial differential equations with variable coefficients on a finite domain is established. The stability and convergence order are analyzed for the resulted implicit scheme. With mathematical induction skills, the scheme is proved to be unconditionally stable and convergent.

Keywords: Fractional Derivative; Implicit Methods; Stability; Convergence; Error Estimate

一类分数阶导数微分方程的隐式差分解法*

张　阳[1]，**王瑞怡**[2]

[1]南开大学数学科学学院，天津
[2]河北工业大学理学院，天津
Email: zhangyang@nankai.edu.cn

收稿日期：2013 年 4 月 6 日；修回日期：2013 年 4 月 10 日；录用日期：2013 年 5 月 10 日

摘　要：分数阶导数微分方程作为通常微分方程的推广，被广泛地应用于工程，物理，信息处理，金融，水文等领域。本文给出了数值求解一类时间空间分数阶导数的双边空间微分方程的一种隐式差分格式，并对其稳定性和收敛性进行了理论分析，证明了格式的无条件稳定性并给出了收敛阶估计。

关键词：分数阶导数；隐格式；稳定性；收敛性；误差估计

1. 引言

分数阶导数方程是指方程中含有非整数阶的导数，在反常扩散，粘弹性本构建模，信号处理，控制，流体力学，图像处理，软物质研究、金融、水文等领域中利用它们来建立数学模型，可以精确地描述这些现象。近年来，越来越多的学者关注分数阶导数。分数阶导数微分方程，是传统的整数阶微分方程的推广[1-8]。分数阶导数微积分的研究与兴起，伴随着数字计算机计算技术的提高而迅速发展。双边空间分数阶对流－扩散方程是一种反常扩散，在地下水溶质运移方面，它可描述含水层中溶质运移过程中的反常扩散现象。关于这类问题的数值解法 Meerschaert 等人分别对单边对流－扩散方程和双边扩散方程，进行差分求解，如文献[9]针对变系数反应扩散方程

*资助信息：该工作由中国国家自然科学基金资助(11171168，11071132)。

$$\frac{\partial c(r,t)}{\partial t}=-v(r)\frac{\partial c(r,t)}{\partial r}+d(r)\frac{\partial^{\alpha}c(r,t)}{\partial r^{\alpha}}+f(r,t)$$

建立显式和隐式两种差分解法，文献[10,11]建立了双边空间分数阶导数微分方程

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=c_{+}(x,t)\frac{\partial^{\alpha}u(x,t)}{\partial_{+}x^{\alpha}}+c_{-}\frac{\partial^{\alpha}u(x,t)}{\partial_{-}x^{\alpha}}+s(x,t)$$

数值解法并进行了稳定性分析，文献[12]针对二维分数阶扩散方程

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}=d(x,y)\frac{\partial^{\alpha}u(x,y,t)}{\partial x^{\alpha}}+e(x,y)\frac{\partial^{\beta}u(x,y,t)}{\partial y^{\beta}}+q(x,y,t)$$

建立了交替方向隐式差分解法；文献[13]对一维时间分数阶对流－弥散方程

$$\frac{\partial^{\alpha}c(x,t)}{\partial t^{\alpha}}=-v\frac{\partial c(x,t)}{\partial x}+D\frac{\partial^{2}c(x,t)}{\partial x^{2}}$$

给出了差分算法；文献[14,15]用另一种方法对这个问题进行离散计算。文献[16]中针对二维分数阶对流－弥散方程

$$\frac{\partial^{\alpha}c(x,y,t)}{\partial t^{\alpha}}=-v\left(\frac{\partial c(x,y,t)}{\partial x}+\frac{\partial c(x,y,t)}{\partial y}\right)+D\left(\frac{\partial^{2}c(x,y,t)}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}c(x,y,t)}{\partial y^{2}}\right)$$

建立了数值解法。文献[17]则对时间空间分数阶导数微分方程

$$\frac{\partial^{\beta}u(x,t)}{\partial t^{\beta}}=-b(x,t)\frac{\partial^{\gamma}u(x,t)}{\partial x^{\gamma}}+c_{+}(x,t)\frac{\partial^{\alpha}u(x,t)}{\partial_{+}x^{\alpha}}+c_{-}\frac{\partial^{\alpha}u(x,t)}{\partial_{-}x^{\alpha}}+s(x,t)$$

的显式差分解法进行了研究。目前，关于带时间分数阶导数的双边空间分数阶导数微分方程的隐式解法尚未见到，本文针对文献[17]中的问题($\gamma=1$情形)建立了相应的隐式数值解法并进行理论分析，得到了很好的理论结果。采用隐式差分解法可以有效地增加稳定性能，本文得到的计算格式是无条件稳定的，并且给出了收敛阶的估计，这些结论拓广了该领域的研究成果。

本文结构如下：第二节针对研究的对象进行了描述，并给出了两个常见的引理；第三节建立了所描述方程的隐式差分解法并进行了方法的稳定性分析；第四节给出了方法的收敛性分析和收敛阶的估计；第五节总结了结论与展望。

2. 问题描述

本文针对带分数阶时间空间导数的双边空间微分方程建立隐式差分解法并进行理论分析，研究如下方程：

$$\frac{\partial^{\beta}u(x,t)}{\partial t^{\beta}}=-b(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+c_{+}(x,t)\frac{\partial^{\alpha}u(x,t)}{\partial_{+}x^{\alpha}}+c_{-}\frac{\partial^{\alpha}u(x,t)}{\partial_{-}x^{\alpha}}+s(x,t) \tag{1}$$

这里$L<x<R$，$0\le t\le T$。其中$0<\beta<1$，$1<\alpha<2$，$b(x,t)$，$c_{+}(x,t)$，$c_{-}(x,t)$均为非负有界函数，并且假定初始条件：$u(x,t=0)=f(x)\quad L<x<R$，以及边界条件$u(x=L,t)=u(x=R,t)=0$。

方程(1)右端的左边(+)以及右边(–)的分数阶导数为 Riemann-Liouville 分数阶导数。按如下方式定义[10]：

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}f(x)}{\mathrm{d}_{+}x^{\alpha}}=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\cdot\frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}x^{n}}\int_{L}^{x}\frac{f(\xi)}{(x-\xi)^{\alpha+1-n}}\mathrm{d}\xi \tag{2}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}f(x)}{\mathrm{d}_{-}x^{\alpha}}=\frac{(-1)^{n}}{\Gamma(n-\alpha)}\cdot\frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}x^{n}}\int_{x}^{R}\frac{f(\xi)}{(x-\xi)^{\alpha+1-n}}\mathrm{d}\xi \tag{3}$$

这里 n 是正整数，并且满足 $n-1<\alpha\le n$ 。

方程(1)左端的 $\frac{\partial^{\beta}u(x,t)}{\partial t^{\beta}}$ 由 Caputo 分数阶导数给出定义[18]：

$$\frac{\partial^{\beta}u(x,t)}{\partial t^{\beta}}=\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t(t-\eta)^{-\beta}\frac{\partial u(x,\eta)}{\partial\eta}\mathrm{d}\eta \tag{4}$$

这里 $\Gamma(\cdot)$ 是 Gamma 函数。

根据 Grünwald 估计，为了得到稳定的数值方法[9]，定义左右两边分数阶导数分别按如下形式近似(Shifted Grünwald)：

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}f(x)}{\mathrm{d}_+x^{\alpha}}=\lim_{M^+\to\infty}\frac{1}{h_+^{\alpha}}\sum_{k=0}^{M^+}g_kf\left[x-(k-1)h\right] \tag{5}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}f(x)}{\mathrm{d}_-x^{\alpha}}=\lim_{M^-\to\infty}\frac{1}{h_-^{\alpha}}\sum_{k=0}^{M^-}g_kf\left[x+(k-1)h\right] \tag{6}$$

这里 M^+， M^- 均为正整数， $h_+=\frac{x-L}{M^+}$， $h_-=\frac{R-x}{M^-}$， $g_0=1,g_k=(1)^k\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!},\ k=1,2,\cdots$ 。

引理 1. 上式定义的 g_k 满足如下条件：

1) $g_0=1$，2) $g_1=-\alpha<0$，3) $g_k=(-1)^k\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}>0,\ k>2$ 。

对于引理 1，结论(1)、(2)是显然的，下面只说明结论(3)。

因为$1<\alpha<2$，所以$\alpha>0$， $\alpha-1>0$， $\alpha-k<0$， $k\ge2$ 。从而有

$$\begin{aligned}g_k&=(-1)^k\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}=(-1)^k(-1)^{k-2}\frac{\alpha(\alpha-1)(2-\alpha)\cdots(k-1-\alpha)}{k!}\\&=(-1)^{2k-2}\frac{\alpha(\alpha-1)(2-\alpha)\cdots(k-1-\alpha)}{k!}>0\end{aligned}$$

引理成立。对于 $\forall\Upsilon>0$，根据二项式定理，有 $(1+z)^{\Upsilon}=\sum_{m=0}^{\infty}\binom{\Upsilon}{m}z^m,\ |z|\le1$ 。令 $z=-1$，有 $\sum_{j=0}^{\infty}g_j=0$ 。由引理 1 知

$$-g_1>\sum_{j=0,\,j\ne1}^{i}g_j,\ \forall i=1,2,\cdots,m \tag{7}$$

3. 隐格式的建立及稳定性分析

先建立方程(1)在前文所述初边值条件下的隐格式并通过圆盘定理证明该差分格式是无条件稳定的，并将采用另一种方法来证明格式的稳定性及收敛性，并给出收敛阶的估计。

引入步长 h，时间步长 τ，则有 $x_j=L+jh,\ h>0;\ t_n=n\tau,\ \tau>0,\ j=0,1,\cdots,m,\ n=0,1,\cdots,K$ 。其中 $\tau=\frac{T}{K},h=\frac{R-L}{m}>0$ 。因此 $L\le x_i\le R$ 。记 u_i^n 为逼近 $u(x_i,t_n)$ 的近似解。类似地，记 $b_i^n=b(x_i,t_n),c_i^n=c(x_i,t_n)$ 及 $s_i^n=s(x_i,t_n)$ 。对于 $\frac{\partial^a u(x,t)}{\partial_+x^a}$， $\frac{\partial^a u(x,t)}{\partial_-x^a}$，用 shifted Grünwald 形式的逼近，有如下表达式[9]：

$$\frac{\partial^{\alpha}u(x,t_n)}{\partial_+x^{\alpha}}=\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{i+1}g_ku\left(x_i-(k-1)h,t_n\right)+\mathrm{O}(h) \tag{8}$$

$$\frac{\partial^{\alpha}u\left(x,t_n\right)}{\partial\_x^{\alpha}}=\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{m-i+1}g_k u\left(x_i+\left(k-1\right)h,t_n\right)+\mathrm{O}\left(h\right) \tag{9}$$

$$\frac{\partial u\left(x_j,t_{n+1}\right)}{\partial x}=\frac{u\left(x_j,t_{n+1}\right)-u\left(x_{j-1},t_{n+1}\right)}{h}+\mathrm{O}\left(h\right) \tag{10}$$

对于时间分数阶导数有如下估计[18]：

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{\beta}u\left(x_i,t_{n+1}\right)}{\partial t^{\beta}}&=\frac{1}{\Gamma\left(1-\beta\right)}\int_0^{t_{n+1}}\left(t_{n+1}-\eta\right)^{-\beta}\frac{\partial u\left(x_i,\eta\right)}{\partial\eta}\mathrm{d}\eta\\&=\frac{1}{\Gamma\left(1-\beta\right)}\sum_{j=0}^{n}\frac{u\left(x_i,t_{j+1}\right)-u\left(x_i,t_j\right)}{\tau}\int_{j\tau}^{(j+1)\tau}\frac{\mathrm{d}\xi}{\left(t_{n+1}-\xi\right)^{\beta}}+\mathrm{O}\left(\tau\right)\\&=\frac{\tau^{1-\beta}}{\Gamma\left(2-\beta\right)}\sum_{j=0}^{n}\frac{u\left(x_i,t_{n-j+1}\right)-u\left(x_i,t_{n-j}\right)}{\tau}\left[\left(j+1\right)^{1-\beta}-j^{1-\beta}\right]+\mathrm{O}\left(\tau\right)\end{aligned} \tag{11}$$

故可对方程(1)建立如下的隐格式：

$$\begin{aligned}&\frac{\tau^{1-\beta}}{\Gamma\left(2-\beta\right)}\sum_{j=0}^{n}\frac{u_i^{n+1-j}-u_i^{n-j}}{\tau}\left[\left(j+1\right)^{1-\beta}-j^{1-\beta}\right]\\&=-b_i^{n+1}\frac{u_i^{n+1}-u_{i-1}^{n+1}}{h}+\frac{1}{h^{\alpha}}\left[\sum_{k=0}^{i+1}g_k c_{+,i}^{n+1}u_{i-k+1}^{n+1}+\sum_{k=0}^{m-i+1}g_k c_{-,i}^{n+1}u_{i+k-1}^{n+1}\right]+s_i^{n+1}\end{aligned} \tag{12}$$

易知，该方法是相容的，其舍入误差为$\mathrm{O}\left(h+\tau\right)$。若记

$$\xi_i=\frac{c_{+,i}^{n+1}\Gamma\left(2-\beta\right)}{h^{\alpha}}\tau^{\beta},\ \eta_i=\frac{c_{-,i}^{n+1}\Gamma\left(2-\beta\right)}{h^{\alpha}}\tau^{\beta},\ r_i=\frac{\tau^{\beta}b_i^{n+1}\Gamma\left(2-\beta\right)}{h},\ \delta=\tau^{\beta}\Gamma\left(2-\beta\right)$$

则有

$$\sum_{j=0}^{n}\left(u_i^{n+1-j}-u_i^{n-j}\right)\left[\left(j+1\right)^{1-\beta}-j^{1-\beta}\right]=-r_i u_i^{n+1}+r_i u_{i-1}^{n+1}+\sum_{k=0}^{i+1}g_k\xi_i u_{i-k+1}^{n+1}+\sum_{k=0}^{m-i+1}g_k\eta_i u_{i+k-1}^{n+1}+\delta s_i^{n+1} \tag{13}$$

记$c_j=\left(j+1\right)^{1-\beta}-j^{1-\beta}$，则当$n=0$时有

$$\begin{aligned}&\left(-\xi_i g_0-\eta_i g_2\right)u_{i+1}^1+\left(1+r_i-\xi_i g_1-\eta_i g_1\right)u_i^1-\left(r_i+\xi_i g_2+\eta_i g_0\right)u_{i-1}^1\\&-\sum_{k=3}^{i+1}g_k\xi_i u_{i-k+1}^1-\sum_{k=3}^{m-i+1}g_k\eta_i u_{i+k-1}^1=u_i^0+\delta s_i^1\end{aligned} \tag{14}$$

当$n>0$时有

$$\begin{aligned}&\left(-\xi_i g_0-\eta_i g_2\right)u_{i+1}^{n+1}+\left(1+r_i-\xi_i g_1-\eta_i g_1\right)u_i^{n+1}-\left(r_i+\xi_i g_2+\eta_i g_0\right)u_{i-1}^{n+1}\\&-\sum_{k=3}^{i+1}g_k\xi_i u_{i-k+1}^{n+1}-\sum_{k=3}^{m-i+1}g_k\eta_i u_{i+k-1}^{n+1}=\left(2-2^{1-\beta}\right)u_i^n+\sum_{j=1}^{n-1}d_{j+1}u_i^{n-j}+c_n u_i^0+\delta s_i^1\end{aligned} \tag{15}$$

其中$d_j=2j^{1-\beta}-\left(j+1\right)^{1-\beta}-\left(j-1\right)^{1-\beta}$， $j=1,2,\cdots,n$。方程(14)，(15)又可改写成

$$\begin{cases}DU^1=U^0+\delta S^1\\DU^{n+1}=d_1U^n+d_2U^{n-1}+\cdots+d_nU^1+c_nU^0+\delta S^{n+1},n>0\\U^0=f\end{cases} \tag{16}$$

其中$U^n=\left[u_0^n,u_1^n,\cdots,u_m^n\right]^{\mathrm{T}}$， $S^n=\left[0,s_1^n,\cdots,s_{m-1}^n,0\right]^{\mathrm{T}}$， $f=\left[0,f\left(x_1\right),\cdots,f\left(x_{m-1}\right),0\right]^{\mathrm{T}}$。

而 $D_{ij}\ (i=1,\cdots,m-1;\ j=1,\cdots,m-1;)$ 具有以下形式：

$$D_{ij}=\begin{cases}1+r_i-g_1\xi_i-g_1\eta_i, & \text{当} j=i\\ -r_i-g_2\xi_i-g_0\eta_i, & \text{当} j=i-1\\ -g_0\xi_i-g_2\eta_i, & \text{当} j=i+1\\ -g_{i+1-j}\xi_i, & \text{当} j<i-1\\ -g_{j-i+1}\eta_i, & \text{当} j>i+1\end{cases}$$

其中 $D_{00}=1$， $D_{0j}=0$， $j=1,2,\cdots,m$； $D_{mm}=1$， $D_{mj}=0$， $j=0,1,\cdots,m-1$。

定理 1. 逼近方程(1)的隐格式(16)在 $0<\beta<1$，$1<\alpha<2$ 时是无条件稳定的。

证明. 根据Gerschgorin定理，以及引理1，知当 $g_1=-\alpha<0$。 $g_k>0, k\neq 1$ 时，矩阵 D 的特征值位于 m 个圆的并集，圆心 $D_{i,i}$ 为

$$D_{ii}=1+r_i-(\xi_i+\eta_i)g_1=1+r_i+\alpha(\xi_i+\eta_i)$$

而半径

$$\Upsilon_i=\sum_{k=0,k\neq i}^{m}|D_{ik}|=\sum_{k=0,k\neq 1}^{i+1}\xi_i g_k+\sum_{k=0,k\neq 1}^{m-i+1}\eta_i g_k+r_i\leq r_i+\xi_i(-g_1)+\eta_i(-g_1)=r_i+(\xi_i+\eta_i)\alpha$$

利用(7)，矩阵 D 的特征值满足 $-\Upsilon_i+D_{ii}\leq\lambda\leq D_{ii}+\Upsilon_i$，因此 $1\leq\lambda\leq 1+2(\xi_i+\eta_i)\alpha+2r_i$， D 的谱半径不小于1，因而 D^{-1} 的谱半径不超过1，从而稳定性得证。

下面用另一种方法给出隐格式关于最大模的稳定性分析。

引理 2. 上面所定义的 $c_j=(j+1)^{1-\beta}-j^{1-\beta}$ 满足以下条件

1) $c_j>0, \forall j=0,1,\cdots$，

2) $c_j>c_{j+1}, \forall j=0,1,\cdots$，

3) $2-2^{1-\beta}+\sum_{j=1}^{k-1}(c_j-c_{j+1})+c_k=1$，即 $2-2^{1-\beta}+\sum_{j=1}^{k-1}d_{j+1}+c_k=1$。

对于(1)，(3)是显然的，(2)利用单调性也可以得到。令

$$\begin{aligned}L_1u_i^{n+1}=&(-\xi_i g_0-\eta_i g_2)u_{i+1}^{n+1}+(1+r_i-\xi_i g_1-\eta_i g_1)u_i^{n+1}-(r_i+\xi_i g_2+\eta_i g_0)u_{i-1}^{n+1}\\&-\sum_{k=3}^{i+1}g_k\xi_i u_{i-k+1}^{n+1}-\sum_{k=3}^{m-i+1}g_k\eta_i u_{i+k-1}^{n+1},\end{aligned}$$

$$L_2u_i^n=\begin{cases}u_i^0, & \text{当} n=0\\ \left(2-2^{1-\beta}\right)u_i^n+\sum_{j=1}^{n-1}d_{j+1}u_i^{n-j}+c_nu_i^0, & \text{当} n\neq 0\end{cases}$$

(14)，(15)可以改写为 $L_1u_i^{n+1}=L_2u_i^n+\delta s_i^{n+1}, n=0,1,2,\cdots,K-1$。

设 $\tilde{u}_i^j\ (i=1,2,\cdots,m-1; j=1,2,\cdots,K)$ 是由(14)，(15)计算的近似值，则误差(扰动) $\varepsilon_i^j=\tilde{u}_i^j-u_i^j\ \ (i=1,2,\cdots,m-1; j=1,2,\cdots,K)$ 满足

$$L_1\varepsilon_i^{n+1}=L_2\varepsilon_i^n, n=0,1,2,\cdots,K-1; i=1,2,\cdots,m-1$$

记 $E^k=\left[\varepsilon_1^k,\varepsilon_2^k,\cdots,\varepsilon_{m-1}^k\right]^{\mathrm{T}}$，则可导出下面的定理

定理 2. 误差 E^k 满足 $\|E^{n+1}\|_\infty\leq\|E^0\|_\infty, n=0,1,\cdots,K-1$，其中 $\|E^k\|_\infty=\max_{1\leq i\leq m-1}|\varepsilon_i^k|$。

证明. 用数学归纳法。

1) 当 $n=0$ 时， $|\varepsilon_l^1|=\max_{1\leq i\leq m-1}|\varepsilon_i^1|$，利用引理1，我们得到

$$\begin{aligned}\left|\varepsilon_l^1\right| &\le \left(-\xi_l g_0-\eta_l g_2\right)\left|\varepsilon_{l+1}^1\right|+\left(1+r_l-\xi_l g_1-\eta_l g_1\right)\left|\varepsilon_l^1\right|-\left(r_l+\xi_l g_2+\eta_l g_0\right)\left|\varepsilon_{l-1}^1\right|-\sum_{k=3}^{l+1}\xi_l g_k\left|\varepsilon_{l-k+1}^1\right|-\sum_{k=3}^{m-l+1}\eta_l g_k\left|\varepsilon_{l+k-1}^1\right| \\ &\le \left|\left(-\xi_l g_0-\eta_l g_2\right)\varepsilon_{l+1}^1+\left(1+r_l-\xi_l g_1-\eta_l g_1\right)\varepsilon_l^1-\left(r_l+\xi_l g_2+\eta_l g_0\right)\varepsilon_{l-1}^1-\sum_{k=3}^{l+1}g_k\xi_l\varepsilon_{l-k+1}^1-\sum_{k=3}^{m-l+1}g_k\eta_l\varepsilon_{l+k-1}^1\right| \\ &=\left|L_1\varepsilon_l^1\right|=\left|L_2\varepsilon_l^0\right|=\left|\varepsilon_l^0\right|\le\left\|E^0\right\|_\infty\end{aligned}$$

2) 假设$\left\|E^k\right\|_\infty\le\left\|E^0\right\|_\infty, k=0,1,2,\cdots n$成立，则$\left\|E^{n+1}\right\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le m-1}\left|\varepsilon_i^{n+1}\right|=\left|\varepsilon_l^{n+1}\right|$，利用引理 1，有

$$\begin{aligned}\left|\varepsilon_l^{n+1}\right| &\le \left(-\xi_l g_0-\eta_l g_2\right)\left|\varepsilon_{l+1}^{n+1}\right|+\left(1+r_l-\xi_l g_1-\eta_l g_1\right)\left|\varepsilon_l^{n+1}\right|-\left(r_l+\xi_l g_2+\eta_l g_0\right)\left|\varepsilon_{l-1}^{n+1}\right|-\sum_{k=3}^{l+1}\xi_l g_k\left|\varepsilon_{l-k+1}^{n+1}\right|-\sum_{k=3}^{m-l+1}\eta_l g_k\left|\varepsilon_{l+k-1}^{n+1}\right| \\ &\le \left|\left(-\xi_l g_0-\eta_l g_2\right)\varepsilon_{l+1}^{n+1}+\left(1+r_l-\xi_l g_1-\eta_l g_1\right)\varepsilon_l^{n+1}-\left(r_l+\xi_l g_2+\eta_l g_0\right)\varepsilon_{l-1}^{n+1}-\sum_{k=3}^{l+1}g_k\xi_l\varepsilon_{l-k+1}^{n+1}-\sum_{k=3}^{m-l+1}g_k\eta_l\varepsilon_{l+k-1}^{n+1}\right| \\ &=\left|L_1\varepsilon_l^{n+1}\right|=\left|L_2\varepsilon_l^n\right|=\left|\left(2-2^{1-\beta}\right)\varepsilon_l^n+\sum_{j=1}^{n-1}d_j\varepsilon_l^{n-j}+c_n\varepsilon_l^0\right| \\ &\le\left(2-2^{1-\beta}+\sum_{j=1}^{n-1}d_j+c_n\right)\left\|E^0\right\|_\infty=\left\|E^0\right\|_\infty\end{aligned}$$

定理得证。

由上述定理知格式(16)无条件稳定。

4. 隐格式的收敛性分析与收敛阶估计

下面进行收敛性分析。令$u\left(x_i,t_k\right)$ $\left(i=1,2,\cdots,m-1;k=1,2,\cdots K\right)$是方程(1)在相应初边值条件下于点$\left(x_i,t_k\right)$的精确解。定义

$e_i^k=u\left(x_i,t_k\right)-u_i^k$ $\left(i=1,2,\cdots,m-1;k=1,2,\cdots K\right)$并且$Y^k=\left[e_1^k,e_2^k,\cdots,e_{m-1}^k\right]^{\mathrm{T}}$，则有如下表达式

$$\begin{cases}L_1e_i^{k+1}=L_2e^k+R_i^{k+1}\\ e_1^0=0\end{cases}$$

其中$i=1,2,\cdots,m-1;k=0,1,2,\cdots K$。记$R_i^{k+1}$为局部截断误差，则存在常数$C>0$，使得

$$\left|R_i^{k+1}\right|\le C\tau^\beta\left(\tau+h\right),\ \ i=1,2,\cdots,m-1;k=0,1,2,\cdots K-1$$

定理 3. 误差Y_k满足 $\left\|Y^{k+1}\right\|_\infty\le Cc_k^{-1}\tau^\beta\left(\tau+h\right)$， $k=0,1,2,\cdots,K-1$。这里$\left\|Y^k\right\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le m-1}\left|e_i^k\right|$， C为正常数。

证明. 用数学归纳法。

1° 当$k=0$时，令 $\left|e_l^1\right|=\max\limits_{1\le i\le m-1}\left|e_i^1\right|$，利用引理1，有

$$\begin{aligned}\left|e_l^1\right| &\le \left(-\xi_l g_0-\eta_l g_2\right)\left|e_{l+1}^1\right|+\left(1+r_l-\xi_l g_1-\eta_l g_1\right)\left|e_l^1\right|-\left(r_l+\xi_l g_2+\eta_l g_0\right)\left|e_{l-1}^1\right|-\sum_{k=3}^{l+1}\xi_l g_k\left|e_{l-k+1}^1\right|-\sum_{k=3}^{m-l+1}\eta_l g_k\left|e_{l+k-1}^1\right| \\ &\le \left|\left(-\xi_l g_0-\eta_l g_2\right)e_{l+1}^1+\left(1+r_l-\xi_l g_1-\eta_l g_1\right)e_l^1-\left(r_l+\xi_l g_2+\eta_l g_0\right)e_{l-1}^1-\sum_{k=3}^{l+1}g_k\xi_l e_{l-k+1}^1-\sum_{k=3}^{m-l+1}g_k\eta_l e_{l+k-1}^1\right| \\ &=\left|L_1e_l^1\right|=\left|L_1e_l^0+R_l^1\right|=\left|R_l^1\right|\le C\tau^\beta\left(\tau+h\right)\end{aligned}$$

注意到$c_0^{-1}=1$，因此$\left\|Y^1\right\|_\infty\le Cc_0^{-1}\tau^\beta\left(\tau+h\right)$。

2° 假设$\left\|Y^n\right\|_\infty\le Cc_0^{-1}\tau^\beta\left(\tau+h\right)$，$n=1,2,\cdots k$成立，下面估计

$$\left\|Y^{k+1}\right\|_\infty=\max_{1\le i\le m-1}\left|e_i^{k+1}\right|=\left|e_l^{k+1}\right|$$

利用引理1，有

$$
\begin{aligned}
\left|e_l^{k+1}\right| &\le \left(-\xi_l g_0-\eta_l g_2\right)\left|e_{l+1}^{k+1}\right|+\left(1+r_l-\xi_l g_1-\eta_l g_1\right)\left|e_l^{k+1}\right|-\left(r_l+\xi_l g_2+\eta_l g_0\right)\left|e_{l-1}^{k+1}\right|-\sum_{s=3}^{l+1}\xi_l g_s\left|e_{l-s+1}^{k+1}\right|-\sum_{s=3}^{m-l+1}\eta_l g_s\left|e_{l+s-1}^{k+1}\right| \\
&\le \left|\left(-\xi_l g_0-\eta_l g_2\right)e_{l+1}^{k+1}+\left(1+r_l-\xi_l g_1-\eta_l g_1\right)e_l^{k+1}-\left(r_l+\xi_l g_2+\eta_l g_0\right)e_{l-1}^{k+1}-\sum_{s=3}^{l+1}g_s\xi_l e_{l-s+1}^{k+1}-\sum_{s=3}^{m-l+1}g_s\eta_l e_{l+s-1}^{k+1}\right| \\
&= \left|L_1 e_l^{k+1}\right|=\left|L_2 e_l^k+R_l^{k+1}\right| \\
&\le \left|\left(2-2^{1-\beta}\right)e_l^k+\sum_{j=1}^{k-1}d_j e_l^{k-j}+c_k e_l^0\right|+C\tau^\beta\left(\tau+h\right) \\
&\le \left(2-2^{1-\beta}\right)\left\|Y^k\right\|_\infty+\sum_{j=1}^{k-1}d_j\left\|Y^{k-j}\right\|_\infty+C\tau^\beta\left(\tau+h\right)
\end{aligned}
$$

利用引理2，$c_{k-1}^{-1}\le c_k^{-1}$，因此$\left\|Y^j\right\|_\infty\le Cc_k^{-1}\tau^\beta\left(\tau+h\right),\ j=1,2,\cdots k$，由上面表达式可得

$$
\left|e_i^{k+1}\right|\le\left[\left(2-2^{1-\beta}\right)+\sum_{j=1}^{k-1}d_j+c_k\right]Cc_k^{-1}\tau^\beta\left(\tau+h\right)=Cc_k^{-1}\tau^\beta\left(\tau+h\right)
$$

故$\left\|Y^{k+1}\right\|_\infty\le Cc_k^{-1}\tau^\beta\left(\tau+h\right)$定理得证。

根据定理 3，并注意到

$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{c_k^{-1}}{k^\beta}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{k^{-\beta}}{\left(k+1\right)^{1-\beta}-k^{1-\beta}}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{k^{-1}}{\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^{1-\beta}-1}=\dfrac{1}{1-\beta}$，因此存在常数$\tilde{C}$，使得$\left\|Y^{k+1}\right\|_\infty\le\tilde{C}c_k^{-1}\tau^\beta\left(\tau+h\right)$，因为$k\tau\le T$，进而$\left\|Y^k\right\|_\infty\le\tilde{C}T^\beta\left(\tau+h\right)$，从而有下述定理。

定理 4. 假设$u\left(x_i,t_k\right)$ $\left(i=1,2,\cdots,m-1;k=1,2,\cdots K\right)$是方程(1)在相应初边值条件下在点$\left(x_i,t_k\right)$处的精确解。$u_i^k$是隐格式(16)所得到的数值解，则存在正常数$C^*$，使得

$$
\left|u\left(x_i,t_k\right)-u_i^k\right|\le C^*\left(\tau+h\right),\ i=1,2,\cdots,\ m-1;\ k=1,2,\cdots K
$$

注：由定理 4 知该数值方法的误差估计达到最优阶。

5. 结论与展望

本文将双边空间分数阶导数微分方程的时间导数推广到分数阶，建立了一种隐式差分求解格式并进行了相应的理论分析，得到了格式的无条件稳定性及丰满的一阶时间和空间的收敛阶逼近。所得结论亦可推广到方程右端项包含更为复杂的情形，如

$$
\frac{\partial^\beta u\left(x,t\right)}{\partial t^\beta}=-b\left(x,t\right)\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial x}+c_+\left(x,t\right)\frac{\partial^\alpha u\left(x,t\right)}{\partial_+ x^\alpha}+c_-\left(x,t\right)\frac{\partial^\alpha u\left(x,t\right)}{\partial_- x^\alpha}+d\left(x,y\right)u\left(x,t\right)+s\left(x,t\right)
$$

所采用的方法也适用于高维空间情形，至于高维问题如何进行算子分裂尚有待探讨。最后，作者对审稿人对稿件提出的修改意见表示感谢。

参考文献 (References)

[1] R. Metzler, J. Klafter. The restaurant at the end of the random walk: Recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics. Journal of Physics, 2004, A37: 161-208.

[2] Z. Deng, V. P. Singh and L. Bengtsson. Numerical solution of fractional advection-dispersion equation. Journal of Hydraulic Engineering, 2004, 130(5): 422-431.

[3] R. Gorenflo, F. Mainardi, E. Scalas and M. Raberto. Fractional calculus and continuous-time finance III: The diffusion limit. In: Kolhmann, S. Tang, Eds. Mathematical Finance. Basel: Birkhauser Verlag, 2001: 171-180.

[4] 苏丽娟, 王文洽. 双边分数阶对流–扩散方程的一种有限差分解法[J]. 山东大学学报(理学版), 2009, 10: 29-32.

[5] F. Liu, P. Zhuang, V. Anh, I. Turner and K. Burrage. Stability and convergence of the difference methods for the space-time fractional advec-

tion-diffusion equation. Applied Mathematics and Computation, 2007, 191(1): 12-21.
[6] 周激流, 蒲亦非, 廖科. 分数阶微积分原理及其在现代信号分析与处理中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 2010.
[7] R. Hilfer. Application of fractional calculus in physics. Singapore, New Jersey, London and Hong Kong: World Scientific Publication Company, 2000.
[8] A. A. Kibas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo. Theory and application of fractional differential equations. Amsterdam: Elservier, 2006.
[9] M. M. Meerschaert, C. Tadjeran. Finite difference approximations for fractional advection-dispersion flow equations. Journal of Computational & Applied Mathematics, 2004, 172(1): 65-77.
[10] M. M. Meerschaert, C. Tadjeran. Finite difference approximations for two-sided space-fractional partial differential equations. Applied Numerical Mathematics, 2006, 56(1): 80-90.
[11] V. K. Tuan, R. Gorenflo. Extrapolation to the limit for numerical fractional differentiation. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 1995, 75: 646-648.
[12] M. M. Meerschaert, H. P. Scheffler and C. Tadjeran. Finite difference method for two dimensional fractional dispersion equations. Journal of Computational Physics, 2006, 211: 249-261.
[13] 夏源, 吴吉春. 分数阶对流——弥散方程的数值求解[J]. 南京大学学报(自然科学版), 2007, 43(4): 44-446.
[14] F. Liu, V. Ahn and I. Turner. Numerical solution of the space fractional Fokker-Planck equation. Journal of Computational & Applied Mathematics, 2004, 166(1): 209-219.
[15] Y. Zhang. A finite difference method for fractional partial differential equation. Applied Mathematics and Computation, 2009, 215(2): 524-529.
[16] 周璐莹, 吴吉春, 夏源. 二维分数阶对流－弥散方程的数值解[J]. 高校地质学报, 2009, 15(4): 569-575.
[17] 张阳, 李宁平, 陈璐. 分数阶导数双边空间微分方程的显式差分解法[J]. 运筹与模糊学, 2012, 2, 1-7.
[18] M. M. Meerschaert, D. A. Benson, H. P. Scheffler and B. Baeumer. Stochastic solution of space-time fractional diffusion equations. Physical Review, 2002, E65: 1103-1106.

