Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2023, 13(6), 7817-7827
Published Online December 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/orf
https://doi.org/10.12677/orf.2023.136764

非自治Schrödinger方程的多重规范解

许　勤

贵州大学数学与统计学院，贵州　贵阳

收稿日期：2023年11月7日；录用日期：2023年12月22日；发布日期：2023年12月29日

摘　要

本文研究下列非自治Schrödinger方程的规范解：

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x)|u|^{p-2}u + |u|^{q-2}u + \lambda u, & x \in \mathbb{R}^N, \\ \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \mathrm{d}x = a, & u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

其中 $N \geq 3$，$a > 0$，$\lambda \in \mathbb{R}$ 是一个未知的参数，作为拉格朗日乘子。通过对函数g和常数a作适当的假设，我们可以获得方程具有多重规范解。

关键词

Schrödinger方程，变分方法，规范解，多重解

Multiple Normalized Solutions for Nonautonomous Schrödinger Equation

Qin Xu

School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang Guizhou

Received: Nov. 7th, 2023; accepted: Dec. 22nd, 2023; published: Dec. 29th, 2023

Abstract

In this paper, we study the normalized solutions to the following nonautonomous Schrödinger equation

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x)|u|^{p-2}u + |u|^{q-2}u + \lambda u, & x \in \mathbb{R}^N, \\ \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \mathrm{d}x = a, & u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

where $N \geq 3$, $a > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ is an unknown parameter that appears as a Lagrange multiplier. By

文章引用: 许勤. 非自治 Schrödinger 方程的多重规范解[J]. 运筹与模糊学, 2023, 13(6): 7817-7827.
DOI: 10.12677/orf.2023.136764

making appropriate assumptions about functions g and constants a, we can obtain Multiple normalized solutions for the equation.

Keywords

Schrödinger Equations, Variational Methods, Normalized Solution, Multiple Solutions

1. 引言

在几何学、流体力学、弹性力学、电磁学中都有所应用的椭圆型方程是偏微分方程领域的一个重要分支，其中椭圆方程解的存在性和多重性受到了大量学者的关注。1973 年，Ambrosetti 和 Rabinowitz 提出了著名的山路引理，由此引出的极大极小原理、环绕定理等临界点原理，为解决许多既无上界又无下界的泛函临界点问题，超线性椭圆型方程边值问题，超线性弦周期振动问题等提供了方法。变分法是研究微分方程的一种基本方法，而微分方程中涉及的变分原理就是把微分方程边值问题转变为变分问题，进而证明解的存在性以及解的个数。此外，临界点理论作为变分法发展较快的一部分，其主要内容是将微分方程的解对应于泛函的临界点，这意味着我们可以将研究方向转为寻找方程对应泛函的临界点，并研究其性质。近些年来，对于具有 L^2 范数的非线性 Schrödinger 方程的解的研究引起了广泛关注，从物理的角度而言，这是特别有意义的，因为 L^2 范数表示规定质量，即研究具有固定质量的解。在过去的几十年里，利用临界点理论和变分方法，对非线性 Schrödinger 方程的非平凡解的存在性和多重性在文献中得到了广泛的研究。

对于一般的非线性 Schrödinger 方程

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) + \lambda u, & x \in \mathbb{R}^N, \\ \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \, \mathrm{d}x = a, & u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

许多学者讨论了非线性项与 x 无关的自治情形。例如纯幂次非线性项 $f(x,u) = |u|^{p-2} u$，在研究中，$\overline{p} = 2 + \frac{4}{N}$ 被称为 L^2 临界指数，它来自于 Gagliardo-Nirenberg 不等式。对于一般的非线性 Schrödinger 方程，如果 $p < \overline{p}$，我们说这个问题是 L^2 次临界的，而在 $p > \overline{p}$ 的情况下，这个问题是 L^2 超临界的。对于纯 L^2 次临界和纯 L^2 超临界的情形，Jeanjean 在 1997 年[1]中讨论了带一般非线性项 Schrödinger 方程规范解的存在性，作者通过伸缩变换，证明了泛函具有山路几何结构，得到了 $N \geq 2$ 时，方程具有径向规范解。此外，他还证明了在任意 $N \geq 1$ 维时方程存在基态规范解。在此之后，就有许多学者对 Schrödinger 方程的规范解进行了展开研究。Bartsch 和 de Valeriola [2]根据喷泉定理获得超临界 Schrödinger 方程具有无穷多个径向解。Hirata 和 Tanaka [3]利用对称山路定理的思想也获得了次临界 Schrödinger 方程具有多重规范解。Bieganowski 和 Mederski [4]证明了至少具有质量临界增长的非线性 Schrödinger 方程存在基态规范解。Ikoma、Tanaka [5]和 Bartsch、Soave [6]得到了 Schrödinger 系统具有规范解。最近，Soave 在[7] [8]中研究了具有组合幂非线性项类型的非线性薛定谔方程的规范解，此时，非线性项不仅包含 L^2 次临界项还包含 L^2 超临界项，作者证明了 L^2 次临界、L^2 临界和 L^2 超临界非线性之间的相互作用强烈地影响了泛

函的几何结构以及基态的存在性和性质。Alves 和 Ji [9]证明了 Sobolev 临界增长 Schrödinger 方程规范解的存在性。Jeanjean 和 Le [10]证明了非线性具有 Sobolev 临界增长时，存在位于能量函数的山路水平的规范解。而对于非自治的情形，即非线性项不仅关于 u，还关于 x，此时方程在对 x 进行平移时，将会发生变化，因此问题也相对变得复杂。Bahrouni 等[11]获得了非自治 Schrödinger 方程无穷多非平凡解。Zhang 等[12]利用对称山路引理，得到了局部定义 Schrödinger 方程具有无穷多个解。Chen 和 Tang 在[13]中讨论了非自治薛定谔方程规范解的存在性。他们提出了一种新的方法来恢复合适流形上最小序列的紧性，并克服了由于非自治项所带来的基本困难。此外还有更多相关文章，在此就不一一陈列。

本文主要讨论下列非自治 Schrödinger 方程的多重规范解：

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x)|u|^{p-2}u + |u|^{q-2}u + \lambda u, & x \in \mathbb{R}^N, \\ \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \mathrm{d}x = a, & u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $N \ge 3$，$a > 0$，$p \in \left(2, 2+\frac{4}{N}\right)$，$q \in \left(2+\frac{4}{N}, 2^*\right)$，($2^*$ 表示从 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 嵌入到 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 的 Sobolev 嵌入临界指数，并且当 $N \ge 3$ 时，$2^* = 2N/(N-2)$；当 $N = 1,2$ 时，$2^* = \infty$），$\lambda \in \mathbb{R}$ 是一个未知的参数，作为拉格朗日乘子。由变分方法，方程(0.1)的规范解满足下列 C^1 泛函

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{p} g(x) \int_{\mathbb{R}^N} g(x)|u|^p \mathrm{d}x - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \mathrm{d}x, u \in H^1(\mathbb{R}^N), \tag{2}$$

限制在下列 L^2 球上：

$$\mathcal{S}(a) = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \mathrm{d}x = a \right\}. \tag{3}$$

假设方程(1)满足如下假设条件：

(g_1) 函数 $g(x) > 0$，$g(x) = g(|x|)$，且 $g(x), x \cdot \nabla g(x) \in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)$。

(g_2) 式子 $p(1-\gamma_p) g(x) + x \cdot \nabla g(x) \ge 0$ 成立。

那么我们可以得到下列结论：

定理 1：假设 $N \ge 3$，对任意的 $a > 0$，如果有：

$$\left(\|g\|_{\frac{p}{p-1}} a^{\frac{p(1-\gamma_p)}{2}} \right)^{q\gamma_q - 2} \left(a^{\frac{q(1-\gamma_q)}{2}} \right)^{2-p\gamma_p} < \left(\frac{p(q\gamma_q - 2)}{2C_{N,p}^p (q\gamma_q - p\gamma_p)} \right)^{q\gamma_q - 2} \left(\frac{q(2-p\gamma_p)}{2C_{N,q}^q (q\gamma_q - p\gamma_p)} \right)^{2-p\gamma_p}$$

成立，其中 $\gamma_p = N\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)$，$\gamma_q = N\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)$。则方程(1)至少存在 k 对弱解。

$(u_i, \lambda_i) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times \mathbb{R} (i = 1,2,\cdots,k)$，其中 $\int_{\mathbb{R}^N} |u_i|^2 \mathrm{d}x = a$，$\lambda_i < 0$，$I(u_i) < 0$ 对于 $i = 1,2,\cdots,k$。

在定理 1 的证明中，我们将使用一个由 Jeanjean 和 Lu 证明的极小极大定理[14]，为了方便读者，我们将在第 2 节提供更多细节。另一方面，在接下来定理的证明中，我们将研究空间 $H_r^1(\mathbb{R}^N)$，因为它有非常好的紧嵌入。此外，根据 Palais 的对称临界原理，见[15]，我们知道 I 在 $H_r^1(\mathbb{R}^N)$ 中的临界点实际上是整个 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中的临界点。

接下来，对文中的一些符号进行说明。其中，C、C_1、C_2、……表示任意正常数，而且它在不同位置具有不同的取值。$\to$ 表示所讨论的 Banach 空间上的强收敛。$L^p(\mathbb{R}^N)$ 是 Lebesgue 空间并赋予范数：

$$\|u\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}},$$

其中 $p\in[1,+\infty]$。$H^1(\mathbb{R}^N)$ 是通常的 Sobolev 空间并赋予范数：

$$\|u\|=\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u|^2+|u|^2\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. 定理 1 的证明

先引入一些基本知识。

定义 1 ([16])设 X 是 Banach 空间，$I:X\to\mathbb{R}$ 是可导的泛函。若 $u\in X$ 使得

$$I'(u)=0.$$

则称 u 是 I 的一个临界点。

定义 2 ([16])设 X 是 Banach 空间，$I:X\to\mathbb{R}$ 是可导的泛函，如果序列 $\{u_n\}\subset X$ 满足

$$I(u_n)\to c, I'(u_n)\to 0.$$

则称 $\{u_n\}$ 为泛函 I 的水平值为 c 的 Palais-Smale 序列，记作 $(PS)_c$ 序列。如果泛函 I 的每个 $(PS)_c$ 序列都存在一个收敛子列，则称 I 满足 $(PS)_c$ 条件。

对于定理 1 的证明，我们借助文章 Peral Alonso [17]里构造的截断方法来进行处理。接下来，我们考虑泛函 $I:H_r^1(\mathbb{R}^N)\to\mathbb{R}$ 如下定义：

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x-\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}g(x)|u|^p\,\mathrm{d}x-\frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^q\,\mathrm{d}x,$$

限制在 L^2 球上：

$$\mathcal{S}(a)=\left\{u\in H^1(\mathbb{R}^N):\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2\,\mathrm{d}x=a\right\}.$$

由 Gagliardo-Nirenberg 不等式[18]

$$\|u\|_p^p\le C_{N,p}^p\|u\|_2^{p(1-\gamma_p)}\|\nabla u\|_2^{p\gamma_p},\ \forall u\in H^1(\mathbb{R}^N), p\in(2,2^*),$$

和 Hölder 不等式，我们有

$$\begin{aligned}I(u)&=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x-\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}g(x)|u|^p\,\mathrm{d}x-\frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^q\,\mathrm{d}x\\&\ge\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x-\frac{1}{p}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|g(x)|^{\frac{p}{p-1}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}-\frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^q\,\mathrm{d}x\\&\ge\frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2-\|g\|_{\frac{p}{p-1}}\frac{C_{N,p}^p}{p}a^{\frac{p(1-\gamma_p)}{2}}\|\nabla u\|_2^{p\gamma_p}-\frac{C_{N,q}^q}{q}a^{\frac{q(1-\gamma_q)}{2}}\|\nabla u\|_2^{q\gamma_q}\\&=h(\|\nabla u\|_2),\end{aligned}\tag{4}$$

其中

$$h(r)=\frac{1}{2}r^2-\|g\|_{\frac{p}{p-1}}\frac{C_{N,p}^p}{p}a^{\frac{p(1-\gamma_p)}{2}}r^{p\gamma_p}-\frac{C_{N,q}^q}{q}a^{\frac{q(1-\gamma_q)}{2}}r^{q\gamma_q}.$$

结合 Soave [7]，我们知道，如果定理 1 的假设条件成立，那么对于函数 h，我们可以获得正的局部极大值(如图 1)。

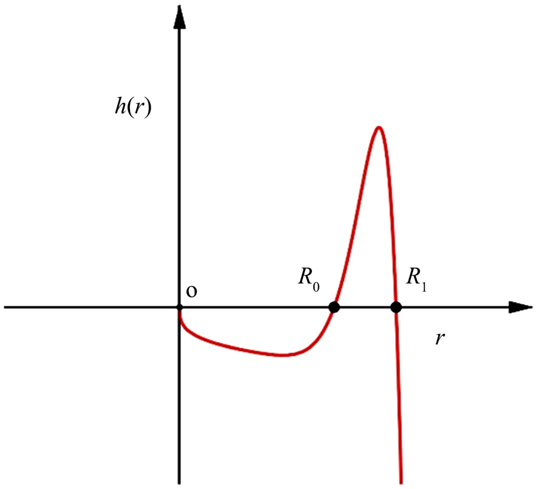

Figure 1. The graph of the function $h(r)$

图 1. 函数 $h(r)$的图像

对于图中的 R_0, R_1，显然 $0 < R_0 < R_1 < \infty$，定义函数 $\tau : \mathbb{R}^+ \to [0,1]$ 是一个非增的 C^∞ 函数且满足

$$\tau(x) = \begin{cases} 0 & x \geq R_1, \\ 1 & x \leq R_0. \end{cases}$$

那么，我们考虑下列截断泛函

$$I_T(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} g(x)|u|^p \, \mathrm{d}x - \frac{\tau(\|\nabla u\|_2)}{q}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \, \mathrm{d}x.$$

取

$$\bar{h}(r) = \frac{1}{2}r^2 - \|g\|_{\frac{p}{p-1}} \frac{C_{N,p}^p}{p} a^{\frac{p(1-\gamma_p)}{2}} r^{p\gamma_p} - \tau(r)\frac{C_{N,q}^q}{q} a^{\frac{q(1-\gamma_q)}{2}} r^{q\gamma_q},$$

可以知道 $I_T(u) \geq \bar{h}(\|\nabla u\|_2)$，其中 $\bar{h}(r)$ 的图像见图 2。显然，泛函 $I_T(u) \in C^1(H_r^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$。

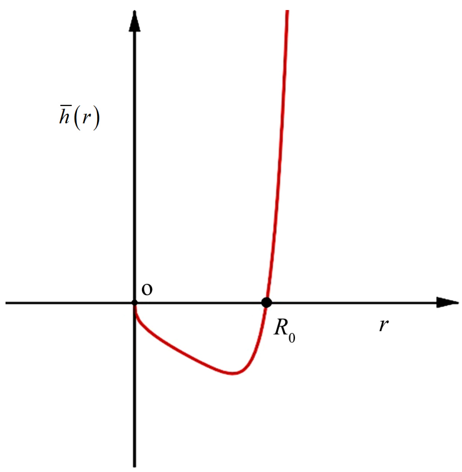

Figure 2. The graph of the function $\bar{h}(r)$

图 2. 函数 $\bar{h}(r)$ 的图像

引理 1：假设 $N \ge 3$，(g_1)和(g_2)成立，则对于泛函 I_T 具有如下重要性质：

1) 如果 $I_T(u) \le 0$，那么 $\|\nabla u\|_2 < R_0$，且对任意的 v 处于 u 在 $H_r^1(\mathbb{R}^N)$ 的一个小邻域内，有 $I(u) = I_T(u)$。

2) 泛函 I_T 满足局部 $(PS)_c$ 条件对于任意的 $c < 0$。

证明：首先，从泛函 I_T 的定义，并结合图像 2 来看，结论(1)是显然的。接下来，我们证明结论(2)。取 $\{u_n\} \subset \mathcal{S}(a)$ 是满足 $c<0$ 的一个 $(PS)_c$ 序列，那么由 I_T 的定义，当 n 充分大时，我们有 $\|\nabla u_n\|_2 < R_0$，因此可以得到序列 $\{u_n\}$ 实际也是泛函 I 限制在 $\mathcal{S}(a)$ 上满足 $c<0$ 的一个 $(PS)_c$ 序列，且满足

$$I(u_n) \to c < 0, \quad I'|_{\mathcal{S}(a)}(u_n) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{5}$$

因为序列 $\{\|\nabla u_n\|_2\}$ 有界且序列 $\{\|u_n\|_2\}$ 有界，所以 $\{u_n\} \subset H_r^1(\mathbb{R}^N)$ 是一个有界序列，那么对于子列，存在 $u \in H_r^1(\mathbb{R}^N)$ 使得

$$\begin{gathered} u_n \rightharpoonup u \quad u \in H_r^1(\mathbb{R}^N), \\ u_n \to u \quad u \in L^p(\mathbb{R}^N), 2 < p < 2^*, \\ u_n(x) \to u(x) \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^N. \end{gathered} \tag{6}$$

由弱收敛的定义和假设(g_1)可知

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} g(x)|u_n|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x)|u|^p \, dx. \tag{7}$$

根据(5)式和[19，引理 3]，我们知道

$$-\Delta u_n - \lambda_n u_n - g(x)|u_n|^{p-2} u_n - |u_n|^{q-2} u_n \to 0, \quad u \in \left(H_r^1(\mathbb{R}^N)\right)', \tag{8}$$

其中

$$\lambda_n := \frac{1}{a}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(x)|u|^p \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \, dx\right). \tag{9}$$

注意到 $u \ne 0$。如果 $u = 0$，那么

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} g(x)|u_n|^p \, dx = 0 \text{ 且 } \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^q \, dx = 0. \tag{10}$$

因为

$$\begin{aligned} I(u_n) = I_T(u_n) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \, dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} g(x)|u_n|^p \, dx - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^q \, dx \\ &\ge -\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} g(x)|u_n|^p \, dx - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^q \, dx \end{aligned}$$

由(10)，两边取极限 $n \to \infty$，则

$$0 > c = \lim_{n\to\infty} I(u_n) \ge \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} g(x)|u_n|^p \, dx - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^q \, dx\right) = 0,$$

矛盾。由(6)、(7)和 λ_n 的定义(9)，很明显 λ_n 是有界的。所以，存在一个子序列，对于一些 $\lambda \in \mathbb{R}$，$\lambda_n \to \lambda$。因此有

$$-\Delta u = g(x)|u|^{p-2} u + |u|^{q-2} u + \lambda u \quad u \in \left(H_r^1(\mathbb{R}^N)\right)'. \tag{11}$$

接下来我们证明 $\lambda < 0$。因为 $u \ne 0$ 是方程(11)的一个解，那么我们可以得到下列等式成立：

$$0 > c = I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} g(x)|u|^p \,\mathrm{d}x - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \,\mathrm{d}x, \tag{12}$$

$$\mathcal{N}(u) := \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} g(x)|u|^p \,\mathrm{d}x - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \,\mathrm{d}x = 0, \tag{13}$$

以及

$$\mathcal{P}(u) := \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x - \gamma_p\int_{\mathbb{R}^N} g(x)|u|^p \,\mathrm{d}x + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} (x\cdot\nabla g(x))|u|^p \,\mathrm{d}x - \gamma_q\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \,\mathrm{d}x = 0, \tag{14}$$

其中 $\gamma_p = \dfrac{N(p-2)}{2p}$， $\gamma_q = \dfrac{N(q-2)}{2q}$。因此

$$\begin{aligned}
\lambda\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} g(x)|u|^p \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \,\mathrm{d}x \\
&= \gamma_p\int_{\mathbb{R}^N} g(x)|u|^p \,\mathrm{d}x - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} (x\cdot\nabla g(x))|u|^p \,\mathrm{d}x + \gamma_q\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \,\mathrm{d}x \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} g(x)|u|^p \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \,\mathrm{d}x \\
&= (\gamma_p - 1)\int_{\mathbb{R}^N} g(x)|u|^p \,\mathrm{d}x - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} (x\cdot\nabla g(x))|u|^p \,\mathrm{d}x + (\gamma_q - 1)\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left[(\gamma_p - 1)g(x) - \frac{1}{p}(x\cdot\nabla g(x))\right]|u|^p \,\mathrm{d}x + (\gamma_q - 1)\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

因为 $\gamma_p, \gamma_q < 1$，由假设(g_2)， $p(\gamma_p - 1)g(x) - (x\cdot\nabla g(x)) \le 0$，所以我们有 $\lambda < 0$。根据式子(10)，(11)，(13)以及 $\lambda_n \to \lambda < 0$，可以得出

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} g(x)|u|^p \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} g(x)|u_n|^p \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^q \,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \,\mathrm{d}x - \lambda_n\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2 \,\mathrm{d}x \\
&\ge \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x,\quad \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \,\mathrm{d}x = a.$$

所以在 $H_r^1(\mathbb{R}^N)$ 上， $u_n \to u$。则对于任意的 $c < 0$，泛函 I_T 满足 $(PS)_c$ 条件。证毕。

接下来，我们给出在[14]中证明的一类约束偶函数的一个极大极小定理。为了表述它，需要有一些符号。设 E 是一个具有范数 $\|\cdot\|_E$ 的实巴拿赫空间，而 $\mathbb{H}$ 是一个具有内积 $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{H}}$ 的实希尔伯特空间。在序列集中，让我们确定 $\mathbb{H}$ 及其对偶空间，并假设 E 连续嵌入在 $\mathbb{H}$ 中。对于任意 $m > 0$，定义流形

$$\mathcal{M} := \{u \in E : (\cdot,\cdot)_{\mathbb{H}} = m\}$$

具有从 E 继承的拓扑结构。

首先引入亏格的概念。取 $\mathcal{M}$ 是一个关于原点对称且不包含原点的集合。$\Sigma(\mathcal{M})$ 是 $\mathcal{M}$ 中一个闭的对称子集族。对于每一个非空集合 $A \in \Sigma(\mathcal{M})$，如果对于整数 k，存在一个奇的连续映射 $\psi : A \to \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$，

则 A 的亏格 $\mathcal{G}(A)$ 表示 $k\ge 1$ 的最小的整数。如果不存在这样的整数 k，则我们设 $\mathcal{G}(A)=\infty$，并且如果 $A=\varnothing$，则设 $\mathcal{G}(A)=0$。

对于每一个 $k\in\mathbb{N}$，定义

$$\Gamma_k := \{A\in\Sigma(\mathcal{M}):\mathcal{G}(A)\ge k\}.$$

假设 $A,B\in\Sigma(\mathcal{M})$，则我们有下面这一些性质：

1) 如果 $A\subset B$，那么 $\mathcal{G}(A)\le\mathcal{G}(B)$。

2) 如果存在一个奇的连续映射 $\psi:\mathbb{S}^{k-1}\to A$，那么 $\mathcal{G}(A)\ge k$。

3) 根据 Borsuk-Ulam 定理，$k-1$ 维球面 $\mathbb{S}^{k-1}$ 的亏格为 $\mathcal{G}(\mathbb{S}^{k-1})=k$。

最后，引入极小极大定理。

定理 2 (极小极大定理) [14]：设 $I:H^1(\mathbb{R}^N)\to\mathbb{R}$ 是一个 C^1 的偶泛函。如果 $I|_{\mathcal{S}(a)}$ 在 $\mathcal{S}(a)$ 上有下界。对任意的 $c<0$，满足 $(PS)_c$ 条件，且对任意的 $k\in\mathbb{N}$，$\Gamma_k\ne\varnothing$。那么对于一列极小极大值 $-\infty<c_1\le c_2\le\cdots\le c_k\le\cdots$ 序列可以定义如下

$$c_k := \inf_{A\in\Gamma_k}\sup_{u\in A} I(u),\quad k\ge 1,$$

并且下面结论成立：

1) c_k 是 $I|_{\mathcal{S}(a)}$ 的临界值且满足 $c_k<0$。

2) 令 K^c 是 $I|_{\mathcal{S}(a)}$ 在水平 $c\in\mathbb{R}$ 处的临界点集合。如果对于一些 $k,m\ge 1$，

$$c_k=c_{k+1}=\cdots=c_{k+m-1}=:c<0$$

那么 $\mathcal{G}(K^c)\ge m$。特别的，如果 $m\ge 2$，则泛函 $I|_{\mathcal{S}(a)}$ 在水平 c 处有无穷多个临界点。

3) 如果对任意 $k\ge 1$，$c_k<0$，那么当 $k\to\infty$ 时，$c_k\to 0^-$。

引理 2：假设 $N\ge 3$，(g_1)和(g_2)成立。给定 $k\in\mathbb{N}$，则存在 $\epsilon>0$ 使得 $\mathcal{G}(A)\ge k$，其中

$$A:=\{u\in H_r^1(\mathbb{R}^N)\cap\mathcal{S}(a):I_T(u)\le-\epsilon\}$$

是 $\mathcal{S}(a)$ 中的一个闭的对称子集。

证明：由文章[20]，对给定 $k\in\mathbb{N}$，考虑一个 k-维子空间 $E\subset H_r^1(\mathbb{R}^N)$ 有如下的一组基

$$\mathcal{D}=\{u_1,u_2,\cdots,u_k\},$$

它在 $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ 和 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 里是正交的且满足 $\|\nabla u_i\|_2=\rho$，$\|u_i\|_2=a$，所以

$$\|u_i\|=\sqrt{\rho^2+a^2},\ j=1,2,\cdots,k.$$

接着，设

$$Y_k=\{b_1u_1+b_2u_2+\cdots+b_ku_k:b_1^2+b_2^2+\cdots+b_k^2=1\}.$$

显然，存在一个奇的连续映射，使得集合 Y_k 和 $\mathbb{S}^{k-1}$ 之间是同胚的。因此，由亏格的性质，可知 $\mathcal{G}(Y_k)=\mathcal{G}(\mathbb{S}^{k-1})=k$。对于 $0<\rho<R_0$ 和 $v\in Y_k$，取

$$V_k=\{v_s=s^{\frac{N}{2}}v(sx):v\in Y_k\},$$

因此 $\mathcal{G}(V_k)=\mathcal{G}(Y_k)=k$。注意到，对于足够小的 $s>0$，存在 R',R'' 使得 $R''\ll R'$，且 $sR'=R''$，有

$$\begin{aligned}
&\frac{s^{\frac{N}{2}p-N}}{p}\int_{\mathbb{R}^N} h\left(\frac{x}{s}\right)|v(x)|^p\,\mathrm{d}x \ge \frac{s^{\frac{N}{2}p-N}}{p}\int_{B_{R'}(0)} h\left(\frac{x}{s}\right)|v(x)|^p\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{s^{\frac{N}{2}p-N}}{p}\left\{\int_{B_{R''}(0)} h\left(\frac{x}{s}\right)|v(x)|^p\,\mathrm{d}x + \int_{B_{R'}(0)\setminus B_{R''}(0)} h\left(\frac{x}{s}\right)|v(x)|^p\,\mathrm{d}x\right\} \\
&\ge \frac{s^{\frac{N}{2}p-N}}{p}\left\{\min_{x\in B_{R''}(0)} h\left(\frac{x}{s}\right)\int_{B_{R''}(0)}|v(x)|^p\,\mathrm{d}x\right\} \\
&\ge \frac{s^{\frac{N}{2}p-N}}{p}\left\{\min_{x\in B_{R'}(0)} h(x)\int_{B_{R''}(0)}|v(x)|^p\,\mathrm{d}x\right\} \ge C_1 s^{\frac{N}{2}p-N}\int_{B_{R''}(0)}|v(x)|^p\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
I_T(v_s) = I(v_s) &= \frac{1}{2}s^2\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{p}s^{\frac{N(p-2)}{2}}\int_{\mathbb{R}^N} g\left(\frac{x}{s}\right)|v|^p\,\mathrm{d}x - \frac{1}{q}s^{\frac{N(q-2)}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}|v|^q\,\mathrm{d}x \\
&\le \frac{1}{2}s^2\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x - \frac{C_1}{p}s^{\frac{N(p-2)}{2}}\int_{B_{R''}(0)}|v|^p\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

所以当 s 充分小时，我们有 $\|\nabla v_s\|_2 < R_0$， $\|v_s\|_2 = a$ 且 $I_T(v_s) = I(v_s) \le -\epsilon$ 。因为 $Y_k \subset A$ ，所以 $\mathcal{G}(A) \ge \mathcal{G}(Y_k) = k$ 。证毕。

最后，我们证明本文主要结论。

定理 1 的证明：取

$$\Sigma_k = \left\{C \subset H_r^1(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{S}(a) : C \text{ 是闭集}, C = -C \text{ 且 } \mathcal{G}(C) \ge k\right\}$$

令

$$c_k = \inf_{C\in\Sigma_k}\sup_{u\in C} I_T(u),$$

对任意 $\epsilon > 0$ ，定义

$$A_{-\epsilon} = \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{S}(a) : I_T(u) \le -\epsilon\right\} \subset H_r^1(\mathbb{R}^N).$$

由引理 2 可知，对任意的 $k \in \mathbb{N}$ ，存在 $\epsilon > 0$ 使得 $\mathcal{G}(A_{-\epsilon}) \ge k$ 。因为 I_T 是连续偶泛函， $A_{-\epsilon} \in \Sigma_k$ ，那么对任意的 k， $c_k \le -\epsilon < 0$ 。其次，因为泛函 I_T 有下界，所以对任意的 k， $c_k > -\infty$ 。由引理 1，泛函 I_T 在水平 c 处满足 $(PS)_c$ 条件。假设 $c = c_k = c_{k+1} = \cdots = c_{k+r}$ ，因为 $c < 0$ ，那么令

$$K_c = \left\{u \in H_r^1(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{S}(a) : I_T'(u) = 0, I_T(u) = c\right\},$$

则 K_c 是一个紧支集且满足 $\mathcal{G}(K_c) \ge r+1$，由极小极大定理(定理 2)，则泛函 I_T 至少有 k 个临界点，由引理 1 可知，泛函 I_T 的临界点实际上也是泛函 I 的临界点，所以泛函 I 也至少有 k 个临界点。根据对称临界点原理[15]，所以方程(1)至少有 k 个解 $\{u_i, \lambda_i\}_{i=1}^k$ ，且对于 $i = 1,2,\cdots,k$ ，满足 $\int_{\mathbb{R}^N}|u_i|^2\,\mathrm{d}x = a$ ， $\lambda_i < 0$ ，以及 $I(u_i) < 0$ 。证毕。

3. 总结与展望

本文证明了一类非自治 Schrödinger 方程具有多重规范解，通过引入截断技术，将方程泛函转换为强制泛函，并且注意到截断后在局部存在极小值序列，这些序列同样是原泛函的极小值序列。接下来证明泛函对任意的 c 小于 0，满足 $(PS)_c$ 条件。由亏格的定义和性质，我们发现使得泛函小于 0 的序列集亏格

大于 k，通过引入约束极小极大定理，我们可以得出泛函至少存在 k 个临界点，相应的，由变分方法，这些泛函的临界点就是原方程的解。注意到，本文只得到了非线性项为超线性时，方程具有多重规范解，对于方程非线性项含次线性项时，方程是否具有多重规范解还没有进行研究，以及如果引入外部位势 V，方程是否具有多重规范解还值得考虑。

此外，本文通过引入截断技术很巧妙的将问题转换为强制问题，对于如果不用截断方法能否得出方程具有多重解还有待研究。

基金项目

贵州省教育厅高等学校科学研究项目(青年项目) (黔教技[2022] 097 号)；贵州省科技计划项目(黔科合基础-ZK [2023]一般 033)；国家自然科学基金项目(No. 12201147)。

参考文献

[1] Jeanjean, L. (1997) Existence of Solutions with Prescribed Norm for Semilinear Elliptic Equations. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods and Applications*, **10**, 1633-1659. https://doi.org/10.1016/S0362-546X(96)00021-1

[2] Bartsch, T. and de Valeriola, S. (2013) Normalized Solutions of Nonlinear Schrödinger Equations. *Archiv der Mathematik*, **100**, 75-83. https://doi.org/10.1007/s00013-012-0468-x

[3] Hirata, J. and Tanaka, K. (2019) Nonlinear Scalar Field Equations with L^2 Constraint: Mountain Pass and Symmetric Mountain Pass Approaches. *Advanced Nonlinear Studies*, **19**, 263-290. https://doi.org/10.1515/ans-2018-2039

[4] Bieganowski, B. and Mederski, J. (2021) Normalized Ground States of the Nonlinear Schrödinger Equation with at Least Mass Critical Growth. *Journal of Functional Analysis*, **280**, Article ID: 108989. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2021.108989

[5] Ikoma, N. and Tanaka, K. (2019) A Note on Deformation Argument for L2 Normalized Solutions of Nonlinear Schrödinger Equations and Systems. *Advances in Difference Equations*, **24**, 609-646. https://doi.org/10.57262/ade/1571731543

[6] Bartsch, T. and Soave, N. (2019) Multiple Normalized Solutions for a Competing System of Schrödinger Equations. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **58**, Paper No. 22, 24.

[7] Soave, N. (2020) Normalized Ground States for the NLS Equation with Combined Nonlinearities. *Journal of Differential Equations*, **269**, 6941-6987. https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.05.016

[8] Soave, N. (2020) Normalized Ground States for the NLS Equation with Combined Nonlinearities: The Sobolev Critical Case. *Journal of Functional Analysis*, **279**, Article ID: 108610. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2020.108610

[9] Alves, C.O., Ji, C. and Miyagaki, O.H. (2022) Normalized Solutions for a Schrödinger Equation with Critical Growth in R^N. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **61**, Article No. 18. https://doi.org/10.1007/s00526-021-02123-1

[10] Jeanjean, L. and Le, T.T. (2022) Multiple Normalized Solutions for a Sobolev Critical Schrödinger Equations. *Mathematische Annalen*, **384**,101-134. https://doi.org/10.1007/s00208-021-02228-0

[11] Bahrouni, A., Ounaies, H. and Rădulescu, V. (2015) Infinitely Many Solutions for a Class of Sublinear Schrödinger Equations with Indefinite Potentials. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A*: *Mathematics*, **145**, 445-465. https://doi.org/10.1017/S0308210513001169

[12] Zhang W., Li, G.D. and Tang, C.L. (2018) Infinitely Many Solutions for a Class of Sublinear Schrödinger Equations. *Journal of Applied Analysis & Computation*, **8**, 1475-1493. https://doi.org/10.11948/2018.1475

[13] Chen, S. and Tang, X. (2020) Normalized Solutions for Nonautonomous Schrödinger Equations on a Suitable Manifold. *The Journal of Geometric Analysis*, **30**, 1637-1660. https://doi.org/10.1007/s12220-019-00274-4

[14] Jeanjean, L. and Lu, S.S. (2019) Nonradial Normalized Solutions for Nonlinear Scalar Field Equations. *Nonlinearity*, **32**, 4942-4966. https://doi.org/10.1088/1361-6544/ab435e

[15] Richard, S.P. (1979) The Principle of Symmetric Criticality. *Communications in Mathematical Physics*, **69**, 19-30. https://doi.org/10.1007/BF01941322

[16] Badiale, M. and Serra, E. (2011) Semilinear Elliptic Equations for Beginners: Existence Results via the Variational Approach. Springer, London, 146-148. https://doi.org/10.1007/978-0-85729-227-8

[17] Peral Alonso, I. (1997) Multiplicity of Solutions for the p-Laplacian, Second School of Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations. https://matematicas.uam.es/~ireneo.peral/ICTP.pdf

[18] Weinstein, M.I. (1982) Nonlinear Schrödinger Equations and Sharp Interpolation Estimates. *Communications in Mathematical Physics*, **87**, 567-576. https://doi.org/10.1007/BF01208265

[19] Berestycki, H. and Lions, P.L. (1983) Nonlinear Scalar Field Equations II: Existence of Infinitely Many Solutions. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **82**, 347-375. https://doi.org/10.1007/BF00250556

[20] García Azorero, J. and Peral Alonso, I. (1991) Multiplicity of Solutions for Elliptic Problems with Critical Exponent or with a Nonsymmetric Term. *Transactions of the American Mathematical Society*, **2**, 877-895. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1991-1083144-2