Pure Mathematics 理论数学, 2012, 2, 237-242
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2012.24036 Published Online October 2012 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

Highest Weight Representations of *W*-Type Lie Algebra Related with Virasoro Algebra*

Yongsheng Cheng[1], Heshan Chen[2]

[1]Institute of Contemporary Mathematics & School of Mathematics and Information Science, Henan University, Kaifeng
[2]School of Eurasian, Henan University, Kaifeng
Email: yscheng@henu.edu.cn

Received: Jul. 12th, 2012; revised: Aug. 1st, 2012; accepted: Aug. 14th, 2012

Abstract: *W*-algebra is a family algebras which are used to describe the conformal field theory. Up to now, the structure theory and representation theory we have obtained are very little. In this paper, we investigate the highest weight representations over a *W*-type Lie algebra related to Virasoro algebra.

Keywords: *W*-Type Lie Algebra; Virasoro Algebra; Verma Module

一类与 Virasoro 代数密切相关的 *W*-型李代数的最高权表示*

程永胜 [1]，陈河山 [2]

[1]河南大学，现代数学研究所和数学与信息科学学院，开封
[2]河南大学欧亚学院，开封
Email: yscheng@henu.edu.cn

收稿日期：2012 年 7 月 12 日；修回日期：2012 年 8 月 1 日；录用日期：2012 年 8 月 14 日

摘　要：*W*-代数是用来描述理论物理中的共形场论的一类代数，它的结构理论和表示理论我们都知之甚少。本文研究一类与 Virasoro 代数密切相关的 *W*-型李代数的最高权表示理论。

关键词：*W*-型李代数；Virasoro 代数；Verma-模

1. 引言

二维共形场论是理论物理和统计物理研究的重要内容。在研究二维共形场的额外对称的过程中，A. B. Zamolodchikov 在 1985 年引入了 *W*-代数。*W*-代数又被称为扩展的共形代数，主要用来描述共形场的对称性。它不仅在二维量子场论中有着广应用，而且为研究可积系统提供了有力工具[1]。此外，*W*-代数具有丰富的代数结构，与李理论的很多领域密切相关，比如 Virasoro 代数，Kac-Moody 代数，顶点代数，李超代数以及其它的很多结合代数和非结合代数等等[2,3]。关于这类代数的结构理论和表示理论，只有少数几个具体的代数得到较深刻的研究。例如，Virasoro 代数，超 Virasoro 代数，仿射李代数，Virasoro 顶点代数等[4-6]。而对于其它的 *W*-代数结构和表示理论，我们还知之甚少。因此，研究与 *W*-代数相关联的无限维李代数的结构与表示对理论物理以及李理论都具有一定的意义。本文研究一类与 Virasoro 代数密切相关的 *W*-型李代数的最高权表示理论。

2. 一类与 Virasoro 代数密切相关的 *W*-型李代数

本文我们用 F 表示特征为 0 的任意域，用 $\mathbb{Z}$ 表示整数环。

*资助信息：国家自然科学基金资助项目(No. 11047030，11171055)和河南省科技厅软科学项目(No. 112400430123)与基础与前沿项目(No. 122300410385)。

定义 1 W-代数 ℓ 是一个无限维李代数，有一个 F-基以及以下李运算关系

$$
\begin{aligned}
&[L_n - L_m] = (n-m)L_{n+m} + \delta_{n+m,0}\frac{n^3-n}{12}C_1,\\
&[L_n - L_m] = (n-m)W_{n+m} + \delta_{n+m,0}\frac{n^3-n}{12}C_2,\\
&[W_n - W_m] = 0
\end{aligned}
$$

这里 $n,m\in\mathbb{Z}$， C_1,C_2 是两个中心元素。显然，ℓ 可看作是无心的 Virasoro 代数的阿贝尔扩张，且同构于 Virasoro 代数和它的伴随模的半直积。在本文中，用域 F 的一个任意子群 G 代替 $\mathbb{Z}$，我们得到所谓的广义 ℓ 代数，记为 $\ell[G]$。为了书写方便，我们把 $\ell[\mathbb{Z}]$ 简单记为 ℓ。

定义 2 $\ell[G]$ 是一个李代数带有 F-基 $\{L_\mu,W_\mu,C_1,C_2/\mu\in G\}$ 满足关系式定义 1 中的李运算关系。

这篇文章中，我们固定一个和群 G 结构相容的全序“$\succ$”，即若 $x\succ y$，则对于任意 $z\in G$，都有 $x+z\succ y+z$。记 $G_+:=\{x\in G/x\succ 0\}$，$G_-:=\{x\in G/x\prec 0\}$。则 $G=G_+\cup\{0\}\cup G$。设 $\Im$ 是由 L_0,W_0,C_1 和 C_2 生成的 $\ell[G]$ 的子代数。定义一个满足以下条件的余向量 $\delta\in\Im^*$， $\delta(L_o)=1$ 且 $\delta(W_O)=\delta(C_1)=\delta(C_2)=0$；其中 $\Im^*$ 表示 $\Im$ 的对偶空间。对于任意的 $\eta\in\Im^*$，令 $\ell[G]_\eta=\{X\in\ell[G]/[H,X]=\eta(H)X,\ \forall H\in\Im\}$ 和 $Q=G\delta$。于是 $\ell[G]=\oplus\ell[G]_n$，其中 $\ell[G]_{x\delta}=CL_{-x}\oplus\Im CW_{-x},x\in G/\{0\}$。令 $\ell[G]_-=\oplus_{x\in G+}\ell[G]_{x\delta}$， $\ell[G]_+=\oplus_{-x\in G+}\ell[G]_{x\delta}$，则有以下三角分解 $\ell[G]=\ell[G]_+\oplus\Im\oplus\ell[G]_-$。

对任意 $x\in G_+$，注意到子群 $\mathbb{Z}x$ 继承了群 G 的序“$\succ$”，也是一个全序的阿贝尔群。易知
$ax\succ bx\Leftrightarrow a>b,\ a,b\in\mathbb{Z}$。对于任意的 $G^*:=G/\{0\}$，显然，$\mathbb{Z}x\subset G$。令 $\ell[\mathbb{Z}x]$ 是 $\ell[G]$ 的由 $\{L_{nx},W_{nx},C_1,C_2\mid n\in\mathbb{Z}\}$ 生成的 F-子空间。由下面的引理易知 $\ell[\mathbb{Z}x]$ 是一个同构于 W-代数 ℓ 的李代数，该引理直接验证即得。

引理 3 对于任意的 $n\in\mathbb{Z}$，映射 $f:\ell\to\ell[Z_x]$: $L_n\to x^{-1}L_{nx}+\delta_{n,0}\frac{x-x^{-1}}{24}$， $W_n\mapsto x^{-1}W_{nx}+\delta_{n,0}\frac{x-x^{-1}}{24}C_2$，
$C_1\mapsto xC_1$ $C_2\mapsto xC_2$

可以唯一的扩张为 ℓ 到 $\ell[\mathbb{Z}x]$ 的李代数同态。

3. $\ell[G]$ 的最高权表示理论

令 $U(\ell[G])$ 是 $\ell[G]$ 的泛包络代数。令 $M(\lambda)$ 为一个 $\ell[G]-$ 模， $\lambda\in\Im^*$，且 $\boldsymbol{u}$ 是 $M(\lambda)$ 中一个满足 $H\boldsymbol{u}=\lambda(H)\boldsymbol{u}$，对任意的 $H\in\Im$ 及 $\ell[G]_+\boldsymbol{u}=0$ 和 $M(\lambda)=U(\ell[G])\boldsymbol{u}$ 的非空向量。则 $M(\lambda)$ 是一个具有最高权 λ 的 $\ell[G]-$ 模。向量 $\boldsymbol{u}$ 被称为是相应于权 λ 的最高权向量。易知任意的 $\ell[G]-$ 模 $M(\lambda)$ 都是一个权 $\ell[G]-$ 模：$M(\lambda)=\bigoplus_{x\in G}M(\lambda)_{\lambda+x\delta}$，其中每一个空间 $M(\lambda)_{\lambda+x\delta}$ 由向量 $X_zX_z\cdots X_zu,\quad X_z\in U(\ell[G])_{z\delta},z_i\in G_+,1\le i\le k,$ $z_1+z_2+\cdots+z_k=x$ 生成。$\ell[G]$ 上的 Verma 模 $V(\lambda)$，$\lambda\in\Im^*$ 被定义为由代数 $\ell[G]$ 的子代数 $\Im+\ell[G]_-$ 所诱导的 $\mathbb{C}v$ 的一维表示 $Hv=\lambda(H)v$ 对于任意的 $H\in\Im$， $\ell[G]_+v=0$，即 $V(\lambda)=U(\ell[G])\otimes Cv/P$，其中 P 是 $U(\ell[G])\otimes Cv$ 的一个子空间，由向量 $XY\otimes v-X\otimes Yv$，其中 $X\in U(\ell[G]),\ Y\in U(\oplus\ell[G]_-)$ 生成。$U(\ell[G])$ 在 $V(\lambda)$ 上的作用由 $X(Y\otimes v)=XY\otimes v$， $X,Y\in U(\ell[G])$ 给出。不难验证 $U(\ell[G]_-)$ 在 $V(\lambda)$ 和 $V(\lambda)=U(\ell[G]_-)v$ 上自由的作用，即向量

$$XY\otimes v-X\otimes Yv,$$

其中 $X\in U(\ell[G]),\ Y\in U(\oplus\ell[G]_-)$ 生成。$U(\ell[G])$ 在 $V(\lambda)$ 上的作用由 $X(Y\otimes v)=XY\otimes v$， $X,Y\in U(\ell[G])$，$X,Y\in U(\ell[G])$ 给出。不难验证 $U(\ell[G])$ 在 $V(\lambda)$ 和 $V(\lambda)=U(\ell[G]_-)v$ 上自由的作风。即向量

$$W_{-x}W_{-x_2}\cdots W_{-x_n}L_{-y_1}L_{-y_2}\cdots L_{-y_k}v,$$

其中 $s,k\in\mathbb{N}\cup\{0\},x_i,y_j\in G_+$ 和 $0\prec x_1\prec x_2\prec\cdots\prec x_s$ ， $0\prec y_1\prec y_2\prec\cdots\prec y_k$， $1\le i\le s,1\le j\le k$ 构成空间 $V(\lambda)$ 的一组基。于是我们有分解

$$V(\lambda)=\bigoplus_{x\in G}V(\lambda)_{\lambda+x\delta},$$

其中$V(\lambda)_{\lambda+x\delta}$是一个由基$W_{-x}W_{-x}\ldots W_{-x}L_{-y}L_{-y}\ldots L_{-y}v,\quad x_1+\cdots+x_s+y_1+\cdots+y_k=x$构成的向量空间。易知$V(\lambda)$是一个具有最高权，的模且由 Verma 模。下面的两个引理描述了$V(\lambda)$的性质，直接计算可得。

引理 4 记$P(m)$为数$m\in\mathbb{Z}$的拆分数，易得

$$\dim V(\lambda)_{\lambda+n\delta}=\sum_{m=0}^{n}P(n-m)P(m),\ P(0)=1.$$

引理 5 对于任意的具有最高权λ和最高权向量$\boldsymbol{u}$的$\ell[G]-$模$M(\lambda)$，存在唯一的$\ell[G]-$同态$V(\lambda)\to M(\lambda)$把v映到$\boldsymbol{u}$。

因为$V(\lambda)_{\lambda+x\delta}$，$x\in G_+\cup G_0$是一个关于算子 $L0$ 对应特征值$\lambda+x$的特征子空间，则对于任意的$V(\lambda)$的真子$\ell[G]-$模V'，有$V'=\oplus_{x\in G\cup G}V'_x$，其中$V(\lambda)=U(\ell[G])v$。从$V(\lambda)=U(\ell[G])v$可得$V'=\oplus_{x\in G\cup G}V'_x$，因此$V(\lambda)$有唯一的极大真子模。记$V(\lambda)$的这个因子模为$L(\lambda)$。

4. $\ell[G]$上的 Verma 模的可约性

令$V(\lambda,\mu,c_1,c_2)$为$\ell[G]$上的一个由最高权(λ,μ,c_1,c_2)和最高权向量$\boldsymbol{v}$生成的 Verma 模，即$V(\lambda,\mu,c_1,c_2)=U(\ell[G])v$及$L_0v=\lambda v,W_0v=\mu v,C_1v=c_1v,C_2v=c_2v$。在本节中，我们将决定$V(\lambda,\mu,c_1,c_2)$的可约性。

回忆$(G,\succ)$是一个 Abel 群的整序。记$B(x)=\{y\in G\mid 0\prec y\prec x\}$其中$x\in G_+$。如果对于任意的$x\in G_+$，都有$\#B(x)=\infty$，则称序“$\succ$”是浓的；如果存在某个$a\in G_+$使得$B(a)=\varnothing$，则称该序是离散的，此时$a$被称为 G 的极小正元素。我们将用文献[2,4,7]的方法来研究$\ell[G]$上的最高权表示。首先我们做一些准备工作。

引理 6 假设的序“$\succ$”是浓的。令$\boldsymbol{v}$是$V(\lambda,\mu,c_1,c_2)$中具有权h的最高权向量。令$\boldsymbol{u}\in U(\ell[G])$是$V(\lambda,\mu,c_1,c_2)$中的任意给定的权向量。则存在一个具有权$\lambda$的权向量$\boldsymbol{u}\in U(\ell[G])u_0$满足
$u=\sum_{0\prec x_1\prec\cdots\prec x_s}a_{x_1,\cdots,x_s}W_{-x_1}\cdots W_{-x_s}v$(有限和)对于某些$a_{x_1,\cdots,x_s}\in F^*=F/\{0\}$。

证明 由(3.1)，对于每一个$m\in\mathbb{N}$，令

$$V_m:=\sum_{\substack{0\prec x_1\prec\cdots\prec x_s\\0\prec y_1\prec\cdots\prec y_k;k\le m}}FW_{-x_1}\cdots W_{-x_s}L_{-y_1}\cdots L_{-y_k}v$$

易得$L_xV_m\subseteq V_m,W_xV_m\subseteq V_m$，其中$x\in G_+$。我们可以把$u_0$写作

$$u_0=\sum_{\substack{0\prec x_1\prec\cdots\prec x_s\\0\prec y_1\prec\cdots\prec y_k}}a_{x_1,\cdots,x_s,y_1,\cdots,y_k}W_{-x_1}\cdots W_{-x_s}L_{-y_1}\cdots L_{-y_k}v$$

对于某些$a_{x_1,\cdots,x_s,y_1,\cdots,y_k}\in F^*$。令$r:=\max\{k/a_{x_1,\cdots,x_s,y_1,\cdots,y_k}\neq0\}$。若$r=0$，则断言显然成立。假设$r\ge1$，且写$u_0\equiv u'_0(\operatorname{mod}V_{r-1})$，其中

$$u'_0=\sum_{\substack{0\prec x_1\prec\cdots\prec x\\0\prec y_1\prec\cdots\prec y_k:k=r}}a_{x_1\ldots,x_s,y_1\cdots,y_k}W_{-x_1}W_{-x_2}\cdots W_{-x_s}L_{-y_1}L_{-y_2}\cdots L_{-yk}v$$

令$x\in G_+$使得$x\prec\min\{j_1/a_{pj}\neq0\}$。则

$$W_xu'_0=\sum_{\substack{0\prec x_1\prec\cdots\prec x\\0\prec y_1\prec\cdots\prec y_k:k=r}}a_{x_1\ldots,x_s,y_1\cdots,y_k}W_{-x_1}W_{-x_2}\cdots W_{-x_s}\left(\sum_{i=1}^{r}(x+y_i)L_{-y_{i-1}}\cdots L_{-y_{i-1}}W_{x-y_i}L_{-y_{i+1}}\cdots L_{-yr}\right)v$$

$$\equiv\sum_{\substack{0\prec x_1\prec\cdots\prec x_s\\0\prec y_1\prec\cdots\prec y_k;k=m}}\sum_{i=1}^{r}a_{x_1,\cdots,x_s,y_1,\cdots,y_k}(x+y_i)W_{-p}W_{x-y_i}L_{-y_1}\cdots L_{-y_{i-1}}L_{-y_{i+1}}\cdots L_{-y_k}v(\operatorname{mod}V_{r-2})$$

若$(x_1,\cdots,x_s)\neq(x'_1,\cdots,x'_s)$且$(y_1,\cdots,y_k)\neq(y'_1,\cdots,y'_k)$，则

$$W_{-P}W_{x-j_i}L_{-j_1}\cdots L_{-j_{i-1}}L_{-j_{i+1}}\cdots L_{-j_r}\text{ 和 }W_{-p'}W_{x-y'_s}L_{-y'_1}\cdots L_{-y'_{s-1}}L_{-y'_{s+1}}\cdots L_{-y'_r}$$

对于 $1\le i,s\le r$ 线性相关。因此 $0\ne u_1:=W_xu'_0\in V_{r-1}$ 。同理，像(4.3)一样, 令 $u_1\equiv u'_1\left(\mathrm{mod}V_{r-2}\right)$，则 $u_1\ne 0$ 。对于 $k=2,\cdots,r$ 我们定义如下并可以用归纳法严格证明

$$u_k:=W_xu_{k-1}\in V_{r-k}\quad u_k\equiv u'_k\left(\mathrm{mod}V_{r-k-1}\right),\quad u'_k\ne 0$$

令 $k=r$ ，可得 $0\ne u_r\in V_0$ 。自此完成了引理的证明。

定理 7 令 $\lambda,\mu,c_1,c_2\in F$ 。对于 G 的浓序“$\succ$”, Verma 模 $V(\lambda,\mu,c_1,c_2)$ 是不可约的 $\ell[G]-$ 模当且仅当 $c_2\ne 0$ 。

证明 设 u 的定义象(4.1)一样。令 $X:=\left\{(x_1,\cdots,x_s)/a_{x_1,\cdots,x_s}\ne 0\right\}\ne\varnothing$ 。我们在 X 上定义全序“$\succ$”如下：对于任意的 $(x_1,\cdots,x_s)$, $(x'_1,\cdots,x'_s)\in X$ ，若 $s>t$ ，令 $x'_i\ne 0$ 其中 $i=t+1,\cdots,s$ 。于是可得 $(x_1,\cdots,x_s)\succ(x'_1,\cdots,x'_x))\Leftrightarrow\exists k$ ，$1\le k\le s$ 满足 $x_k\succ x'_t$ 且 $x_t=x'_k$ 对于 $t<k$ 。令 $\left(e_{k_0},\cdots,e_2,e_1\right),0\prec e_{k_0}\prec\cdots\prec e_1$ 是 X 中的唯一极大元素。

设 $c_2=0$ 。显然 $g:=span_F\left\{W_\mu,C_2/\mu\in G\right\}$ 是 $\ell[G]$ 的一个理想，$\ell[G]$ 上的 Verma 模 $V(\lambda,\mu,c_1,0)$ 由一个真子模 $U(g)V(\lambda,\mu,c_1,0)$ 满足商模 $V(\lambda,\mu,c_1,0)/U(g)V(\lambda,\mu,c_1,0)$ 是广义 Virasoro 代数
Vir[G]: = $span_F\left\{L_\mu,C_1/\mu\in G\right\}\cong\ell[G]/g$ 上的单的 Verma 模，它的不可约性已经由文献[3]完全解决。因此上面的定理实际上由 $\ell[G]$ 上的所有 Verma 模决定。

假设 $c_2\ne 0$ 。令 $y\in G_+$ 使得 $\left\{x\in G/e_1-y\prec x\prec e_1\right\}\cap\left\{x_1,x_2/\left(x_1,\cdots,x_{k_0}\right)\in X\right\}=\Phi$ 。

则 $u':=L_{e_1-y}u=\sum\limits_{x_1,\cdots,x_{k_0}\in G_+}a_{x_1,\cdots,x_{k_0}}L_{e_1-y}W_{x_1}\cdots W_{x_{k_0}}v=a'W_{-z_1}\cdots W_{-z_{k_0}}v$ 。对于某些 $a'\in F^*$，

其中 $z=\left(z_{k_0},\cdots,z_2,z_1\right),0\prec z_{k_0}\prec\cdots z_2\prec z_1$ 满足 $\left\{z_i/i=1,2,\cdots,k_0\right\}=\left\{e_{k_0},\cdots,e_3,e_2,y\right\}$ 。

i) 若 $\left\{z_i/i=1,2,\cdots,k_0\right\}\cap\left\{\sqrt{24\mu/c_2+1}\right\}=\varnothing$，则

$$fv=L_{Z_{k_0}}\cdots L_{Z_1}u'\in U\left(\ell[G]\right)u_0\ne 0\text{，其中 }f=\prod_{i=1}^{k_0}z_i\left(2\mu+\frac{1}{12}\left(z_i^{\,2}-1\right)c_2\right)a'\in F^*$$

ii) 若存在某个 $z_i=\sqrt{24\mu/c_2+1},1\le i\le k_0$ 。假设 $\left\{z_i\right\}\cap\left\{z_k/1\le k\le k_0,k\ne i\right\}=\varnothing$ 。否则我们仅需循环下面的证明即可。令

$$w:=L_{z_i-1}\cdots L_{z_2}L_{z_1}u'=a'\prod_{n=1}^{i-1}\left(2z_n\mu+\frac{1}{12}\left(z_n^{\,3}-z_n\right)c_2\right)W_{-z_{k_0}}W_{-z_{k_0-1}}\cdots W_{-z_i}v\ne 0$$

其中 $a'\in F^*$ 。取 $x'\in G_+$ 满足 $z_i-x'\succ z_k,i<k\le k_0$ 。则

$$w':=L_{z_i-x'}w=a'\left(2z_i-x'\right)\prod_{n=1}^{i-1}\left(2z_n\mu+\frac{1}{12}\left(z_n^3-z_n\right)c_2\right)W_{-zk_0}W_{-z_{k_0-1}}\cdots W_{-z_{i+1}}W_{-x'}v\ne 0$$

和 $\left\{z_{k_0},z_{k_0-1}\cdots,z_{i+1},x'\right\}\cap\left\{\sqrt{24u/c_2+1}\right\}=\varnothing$ 。如果我们取 u' 为 w'，则问题变成情形 i)。因此在任意情况下都有 $v\in U\left(\ell[G]\right)u_0$，所以 $V(\lambda,\mu,c_1,c_2)$ 是不可约的。

假设 G 的序“$\succ$”是离散的带有一个极小正元素 a 。则 $\mathbb{Z}a\subseteq G$ 。对于任意的 $x\in G$ ，若 $x\succ na$ 对于任意的 $n\in\mathbb{Z}$ ，则 $x\succ\mathbb{Z}a$ 。令 $G_+:=\left\{x\in G/x\succ Za\right\}$， $G_-=-G_+$， $G_0=Za$ 。易得 $G=G_+\cup G_0\cup G_-$ 。群 G 的离散序的最简单的情况是 $G=\mathbb{Z}$ ，在这种情况下，ℓ 的 Verma 模 $V(0,0,c,c)$ 的不可约性由文献[7]给出。

定理 8 若 $c\ne 0$ ，则 $V(0,0,c,c)$ 是可约的，且 $U(\ell)L_{-1}v+U(\ell)W_{-1}v$ 是 $V(0,0,c,c)$ 的一个真子模；Verma 模 $V(\lambda,\mu,c,c)$ 是不可约的当且仅当对于任意的非零整数 n ，都有 $\frac{1}{12}\left(n^3-1\right)c+2\mu\ne 0$ 。

对于任意的 $x\in G_+$，令 $V(\lambda,\mu,c_1,c_2)=U\left(\ell[\mathbb{Z}x]\right)v$ 是 $V(\lambda,\mu,c_1,c_2)$ 的由一个最高权 v 生成的 $\ell[\mathbb{Z}x]-$ 子模。则 $\ell[G_+]V_a(\lambda,\mu,c_1,c_2)=0$ 。

引理 9 作为一个 $\ell[G]-$模，有

$$V_x(\lambda,\mu,c_1,c_2)\cong V\left(x^{-1}\lambda+\frac{x-x^{-1}}{24}c_1,x^{-1}\mu+\frac{x-x^{-1}}{24}c_2,xc_{-1},xc_2\right).$$

引理 10 设 G 的序"$\succ$"是离散的带有一个极小正元素 a。设 $V_a(\lambda,\mu,c_1,c_2)$ 是一个不可约的 $\ell[\mathbb{Z}a]-$模。令 $u_0\notin Fv$ 为 $V(\lambda,\mu,c_1,c_2)$ 中任意不为零的权向量。则 $V_a(\lambda,\mu,c_1,c_2)\cap U(\ell[G])u_0\neq 0$。

证明 记 $u_0=\sum_{x_1',y_k'\in G_+,x_s,y_r\in\mathbb{Z}_+a} b_{x_1,\cdots,x_s,y_1,\cdots,y_k}^{x_1',\cdots,x_s',y_1',\cdots,y_k'}W_{-x_1'}\cdots W_{-x_s'}L_{-y_1'}\cdots L_{-y_k'}W_{-x_1}\cdots W_{-x_s}L_{-y_1}\cdots L_{-y_k}v$ 对于某些 $b_{x_1,\cdots,x_s,y_1,\cdots,y_k}^{x_1',\cdots,x_s',y_1',\cdots,y_k'}\in F^*$。若 $J:=\left\{(y_1',\cdots,y_k')\middle/b_{x_1,\cdots,x_s,y_1,\cdots,y_k}^{x',\cdots,x_x',y_1',\cdots,y_k'}\neq 0\right\}\neq\varnothing$，令 $y(0):=\min\left\{y_1'\middle/b_{x_1,\cdots,x_s,y_1,\cdots,y_k}^{x',\cdots,x_x',y_1',\cdots,y_k'}\neq 0\right\}$，则存在某个 $m\in\mathbb{N}$ 满足

$$\left\{y_1'-\varepsilon\middle/b_{x_1,\cdots,x_s,y_1,\cdots,y_k}^{x',\cdots,x_x',y_1',\cdots,y_k'}\neq 0\right\}\cap\left\{x_l'\middle/b_{x_1,\cdots,x_s,y_1,\cdots,y_k}^{x',\cdots,x_x',y_1',\cdots,y_k'}\neq 0,\forall l\right\}=\varnothing,$$

其中 $\varepsilon=y(0)-ma$。令 $n_0=\max\left\{k\middle/b_{x_1,\cdots,x_s,y_1,\cdots,y_k}^{x',\cdots,x_x',y_1',\cdots,y_k'}\neq 0\right\}$，根据引理 6，则有

$$u':=W_\varepsilon^{n_0}u_0=\sum_{x_l'\in G_+,x_s,y_r\in\mathbb{Z}_+a} b_{x_1,\cdots,x_s,y_1,\cdots,y_k}^{x_1',\cdots,x_s'}W_{-x_1'}\cdots W_{-x_s'}W_{-x_1}\cdots W_{-x_s}L_{-y_1}\cdots L_{-y_k}v\neq 0$$

对于某个 $b_{x_1,\cdots,x_s,y_1,\cdots,y_k}^{x_1',\cdots,x_s'}\in F^*$。$J=\varnothing$，$u_0$ 自然地有 u' 的形式。令 $Q:=\left\{(x_1',\cdots,x_s')\middle/b_{x_1,\cdots,x_s,y_1,\cdots,y_k}^{x_1',\cdots,x_s'}\neq 0,s=t\right\}$，其中 $t=\min\left\{s\middle/b_{x_1,\cdots,x_s,y_1,\cdots,y_k}^{x_1',\cdots,x_s'}\neq 0\right\}$。若 $t=0$，因为 $\boldsymbol{u}'$ 是一个权向量，定理显然成立。设 $t\geq 1$，则 $Q\neq\varnothing$。我们再一次象(4.4)一样在 Q 上定义整序"$\succ$"。$e':=(e_1',e_2',\cdots e_t'),0\prec e_1'\prec e_2'\prec e\cdots\prec e_t'$，为 Q 中的唯一的极小元素。对于 $m\in\mathbb{N}$，令

$$V_m{}':=\sum_{x_l'\in G_+,x_i,y_r\in\mathbb{Z}_+a,s\geq m} FW_{-x_1'}\cdots W_{-x_s'}W_{-x_1}\cdots W_{-x_s}L_{-y_1}\cdots L_{-y_k}v$$

则

$$u'=\sum_{x_l'\in G_+,x_i,y_r\in\mathbb{Z}_+a,s=m} b_{x_1,\cdots,x_s,y_1,\cdots,y_k}^{x_1',\cdots,x_s'}W_{-x_1'}\cdots W_{-x_s'}W_{-x_1}\cdots W_{-x_s}L_{-y_1}\cdots L_{-y_k}v\left(\operatorname{mod}V_{t+1}'\right).$$

于是

$$u(1):=L_{e_1'-a}u'\equiv\sum_{\substack{x_l^{(1)}\in G_+\\ x_i,y_j\in\mathbb{Z}_+a,s=t-1}} b_{x_1,\cdots,x_s,y_1,\cdots,y_k}^{x_1^{(1)},\cdots,x_s^{(1)}}W_{-x_1^{(1)}}\cdots W_{-x_s^{(s)}}W_aW_{-x_1}\cdots W_{-x_s}L_{-y_1}\cdots L_{-y_k}v\left(\operatorname{mod}V_t'\right)$$

其中 $b_{x_1,\cdots,x_s,y_1,\cdots,y_k}^{x_1^{(1)},\cdots,x_s^{(s)}}\in F^*$。定义 $Q^{(1)}=\left\{\left(x_1^{(1)},\cdots,x_s^{(1)}\right)\middle/b_{x_1,\cdots,x_s,y_1,\cdots,y_k}^{x_1^{(1)},\cdots x_s^{(1)}}\neq 0\right\}$，$e^{(1)}=(e_2',\cdots,e_t')$。由假设和 $\ell[G]$ 的李括号关系有 $b_{x_1,\cdots,x_s,y_1,\cdots,y_k}^{x_1^{(1)},\cdots,x_s^{(s)}}\neq 0$，因此 $Q^{(1)}\neq\varnothing$。而且 $e^{(1)}$ 是 $Q^{(1)}$ 中唯一的极小元素。

对于 $n=2,3,\cdots,t$，我们可以类似的定义和利用归纳证明：

i) 令 $u(n):=L_{e_n'-a}u(n-1)$。则对于某个 $b_{x_1,\cdots,x_s,y_1,\cdots,y_k}^{x_1^{(1)},\cdots,x_s^{(1)}}\neq 0$，有

$$u(s)\equiv\sum_{\substack{x_l^{(1)}\in G_+,\\ x_i,y_j\in Z_+a,s=t-n}} b_{x_1,\cdots,x_s,y_1,\cdots,y_k}^{x_1^{(n)},\cdots x_s^{(n)}}W_{-x_1^{(n)}}\cdots W_{-x_n^{(n)}}W_{-a}W_{-x_1}\cdots W_{-x_s}L_{-y_1}\cdots L_{-y_k}v\left(\operatorname{mod}V_{t-n+1}'\right).$$

ii) 令 $Q^{(n)}:=\left\{\left(x^{(n)}{}_1,\cdots,x^{(n)}{}_s\right)\middle/b_{x_1,\cdots,x_s,y_1,\cdots,y_k}^{x_1^{(n)},\cdots,x_s^{(n)}}\neq 0\right\}\neq\varnothing$，而且 $e^{(n)}:=(e_{n+1}',\cdots,e_t')$ 为 $Q^{(n)}$ 中的唯一的极小元素。令 $n=t$ 且记 $\boldsymbol{u}(t)$ 是一个权向量，则 $0\neq\boldsymbol{u}(t)\in U(\ell[G])u_0\cap V_a(\lambda,\mu,c_1,c_2)$，这是(4.7)所需要的。

定理 11 令 $\lambda,\mu,c_1,c_2\in F$。相对于 G 的带有极小正元素 α 的离散序"$\succ$"，Verma 模 $V(\lambda,\mu,c_1,c_2)$ 是一个不可约的 $\ell[G]-$模当且仅当 $V_a(\lambda,\mu,c_1,c_2)$ (cf. (4.6))是一个不可约的 $\ell[\mathbb{Z}a]-$模。

证明：设序“$\succ$”是离散的。因为$V(\lambda,\mu,c_1,c_2)=U(\ell[G])\otimes_{U(\ell[\mathbb{Z}a]+\ell[G_+])}V_a(\lambda,\mu,c_1,c_2)$，因此$\ell[G]$−模$V(\lambda,\mu,c_1,c_2)$的不可约性可推出$\ell[\mathbb{Z}a]$−模$V_a(\lambda,\mu,c_1,c_2)$的不可约性。相反地，由引理 10，$\ell[G]$−模$V(\lambda,\mu,c_1,c_2)$的不可约性可以立刻得到。

至此，定理 7，8，11 完整地刻画了$\ell[G]$的 Verma 模$V(\lambda,\mu,c_1,c_2)$的不可约性，不管群 G 全序是离散的或是浓的。

参考文献 (References)

[1] T. Arakawa. Representation theory of *W*-algebras. Inventiones Mathematicae, 2007, 169(2): 219-320.
[2] Y. Cheng, Y. Su. Generalized verma module over some Block algebras. Frontiers of Mathematics in China, 2008, 3(1): 37-47.
[3] B. Feigin, D. Fuchs. Verma modules over the virasoro algebra. Lecture Notes in Mathematics, 1984, 1060: 230-245.
[4] J. Hu, W. Wang and K. Zhao. Verma modules over generalized Virasoro algebras Vir[*G*]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2003, 177(1): 61-69.
[5] V. G. Kac, M. Wakimoto. On rational of *W*-algebras. Transformation Groups, 2008, 13(3-4): 671-713.
[6] W. Zhang, C. Dong. *W*-algebra *W*(2, 2) and the vertex operator algebra $L\left(\frac{1}{2},0\right)\otimes L\left(\frac{1}{2},0\right)$. Communications in Mathematical Physics, 2009, 285(3): 991-1004.
[7] R. Shen, Q. Jiang and Y. Su. Verma modules over the generalized Heisenberg-Virasoro algebra. Communications in Algebra, 2008, 36(4): 1464-1473.

