Pure Mathematics 理论数学, 2015, 5, 14-20
Published Online January 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.51003

Hans汉斯

Energy Decay Estimate of Global Solution for a Class of Nonlinear Damping Petrovsky Equations

Zhen Chen[1], Rui Wang[1], Yali Chao[2]

[1]Department of Information and Management Science, Henan Agricultural University, Zhengzhou
[2]Henan Sports School, Zhengzhou
Email: hn-chenzhen@sohu.com

Received: Dec. 5th, 2014; revised: Dec. 31st, 2014; accepted: Jan. 8th, 2015

Abstract

The nonlinear damping Petrovsky equation $u_{tt}+\Delta^2 u+a\left(1+|u_t|^r\right)u_t=b|u|^p u$ with initial-boundary conditions on bounded region is studied. The V. Komornik lemma here plays a crucial role in the energy decay estimate of global solution.

Keywords

Damping Wave Equation, Initial-Boundary Equation, Global Solution, Energy Decay Estimate

一类非线性阻尼Petrovsky方程整体解的能量衰减估计

陈　振[1]，王　瑞[1]，钞雅丽[2]

[1]河南农业大学信息与管理科学学院，郑州
[2]河南省体育运动学校，郑州
Email: hn-chenzhen@sohu.com

收稿日期：2014年12月5日；修回日期：2014年12月31日；录用日期：2015年1月8日

摘　要

本文主要研究非线性阻尼Petrovsky方程 $u_{tt}+\Delta^2u+a\left(1+|u_t|^r\right)u_t=b|u|^p u$ 在有界区域的初边值问题。利用V. Komornik引理得到整体解的能量衰减估计。

关键词

阻尼波方程，初边值问题，整体解，能量衰减估计

1. 引言

本文主要考察一类带耗散项和源项的波方程初边值问题的整体的衰减稳定性：

$$u_{tt}+\Delta^2u+a\left(1+|u_t|^r\right)u_t=b|u|^p u,\ \ x\in\Omega, t>0, \tag{1.1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ \ u_t(x,0)=u_1(x),\ \ x\in\Omega, \tag{1.2}$$

$$u(x,t)=\frac{\partial}{\partial n}u(x,t)=0,\ \ x\in\partial\Omega, t\geq 0, \tag{1.3}$$

其中 $a,b,r,p>0$ 均为实数，Ω 是 R^N 中具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界集，Δ 是拉普拉斯算子 $\frac{\partial u}{\partial n}|\partial\Omega$ 表示 u 在边界 $\partial\Omega$ 外法线方向的导数。

A.Guesmia [1]曾考虑方程

$$u_{tt}+\Delta^2u+q(x)u+g(u_t)=0,\ \ x\in\Omega, t>0 \tag{1.4}$$

在(1.2)和(1.3)下的初边值问题，其中 g 是连续增函数，$g(0)=0$，且 $q:\Omega\to[0,+\infty)$ 是有界函数。在函数 g 适当的增长性条件下，他得到了问题弱强解的衰减性结果。具体地说，在[2]中，A.Guesmia 获得了 g 为线性函数时问题解的指数衰减性结论，但是衰减具有相同的多项式次数。另外，A.Guesmia 在[3]中对耦合半线性波动方程的研究中也得到了相关结果。将(1.4)中条件 $q(x)u+g(u_t)$ 换做 $\Delta^2u_t+\Delta g(\Delta u)$，M. Aassila 和 A. Guesmia [4]利用 V.Komornik 引理获得了指数衰减定理[1]。

针对非线性阻尼波动方程 $u_{tt}-\Delta u+a|u_t|^r u_t=bu|u|^p$，其 Cauchy 问题和初边值问题解的爆破和整体解的存在性、唯一性和衰减估计，已被众多学者通过各种方法或在不同条件下进行了研究[5]-[10]。本文运用 V. Komornik 引理[1]得到了问题整体解的能量衰减估计。

我们采用通常的符号记法。设 $H^m(\Omega)$ 表示 Sobolev 空间，其中范数为 $\|u\|_{H^m(\Omega)}=\left(\sum_{|\alpha|\leq m}\|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}$，$H_0^M(\Omega)$ 代表 $H^m(\Omega)$ 中 $C_0^\infty(\Omega)$ 的闭包。为方便起见，今后用 $\|\cdot\|_p$ 表示 Lebesgue 空间 $L^p(\Omega)$ 中的范数，$\|\cdot\|$ 表示 $L^2(\Omega)$ 中的范数，并且用范数 $\|\Delta\cdot\|$ 代替 $H_0^2(\Omega)$ 中的范数 $\|\cdot\|_{H_0^2(\Omega)}$。此外，$M$ 表示依赖于已知常数的正数，且在不同点处的含义有所不同。

2. 预备知识

问题(1.1)~(1.3)解局部和整体解存在的重要结果([11])。

定理 2.1 假设 $r,p>0$ 满足

$$0<p<+\infty, N\le 4;\ \ 0<p\le \frac{4}{N-4}, N>4, \tag{1.5}$$

$$0<r<+\infty, N\le 4;\ \ 0<r\le \frac{8}{N-4}, N>4, \tag{1.6}$$

如果$(u_0,u_1)\in H_0^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$，则存在$T>0$使得问题(1.1)~(1.3)存在唯一局部解$u(t)$，且

$$u\in C\left(\left[0,T\right);H_0^2(\Omega)\right),\ u_t\in C\left(\left[0,T\right);L^2(\Omega)\right)\cap L^{r+2}\left(\Omega\times\left[0,T\right)\right) \tag{1.7}$$

定理 2.2 假设(1.5)和(1.6)成立，$u(t)$是问题(1.1)~(1.3)的局部解。如果$u_0\in W, u_1\in L^2(\Omega)$且$E(u(0))<d$，则$u(t)$是问题(1.1)~(1.3)的整体解。

为证得主要结论，首先定义泛函：

$$I(u)=I(u(t))=\|\Delta u(t)\|^2-b\|u(t)\|_{p+2}^{p+2},$$

$$J(u)=J(u(t))=\frac{1}{2}\|\Delta u(t)\|^2-\frac{b}{p+2}\|u(t)\|_{p+2}^{p+2},$$

问题(1.1)~(1.3)的能量表示为

$$E(u(t))=\frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2+\frac{1}{2}\|\Delta u(t)\|^2-\frac{b}{p+2}\|u(t)\|_{p+2}^{p+2}=\frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2+J(u(t))$$

这里$u\in H_0^2(\Omega), t\ge 0$，$E(u(0))=\frac{1}{2}\|u_1\|^2+J(u_0)$是初始总能量。

为了证明主要结果，我们需要下面的一些引理：

引理 2.1 设q满足$2\le q<+\infty, N\le 4$或者$2\le q\le \frac{2N}{N-4}, N>4$，则存在依赖于$\Omega$和$q$的常数$C$满足

$$\|u\|_q\le C\|\Delta u\|,\ \forall u\in H_0^2(\Omega).$$

引理 2.2 设$u(t)$是问题(1.1)~(1.3)的一个解，则$E(u(t))$是$t>0$的非增函数，且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(u(t))=-a\left(\|u_t(t)\|_{r+2}^{r+2}+\|u_t(t)\|^2\right).$$

证明：用方程(1.1)乘以u_t，并在Ω上积分得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(u(t))=-a\left(\|u_t(t)\|_{r+2}^{r+2}+\|u_t(t)\|^2\right)\le 0.$$

因此，$E(u(t))$是关于t的非增函数。

引理 2.3 ([1])设$F:R^+\to R^+$是一个非增函数，并假设存在常数$\beta\ge 1$和$A>0$满足

$$\int_S^{+\infty}F(t)^{\frac{\beta+1}{2}}\mathrm{d}t\le AF(S),\ 0\le S\le +\infty,$$

则当$\beta>1$时有$F(t)\le CF(0)(1+t)^{-\frac{2}{\beta-1}}, \forall t\ge 0$，且当$\beta=1$时有$F(t)\le CF(0)\mathrm{e}^{-\omega t}, \forall t\ge 0$，其中$C$和$\omega$是不依赖$F(0)$的正常数。

引理 2.4 如果定理 2.1 中的假设成立，则

$$b\|u(t)\|_{p+2}^{p+2}\le (1-\theta)\|\Delta u(t)\|^2,\ \forall t\in[0,+\infty), \tag{2.1}$$

其中

$$\theta = 1 - bC_*^{p+2}\left(\frac{2(p+2)}{p}E(u(0))\right)^{\frac{p}{2}} > 0$$

且 $I(u(t)) \geq \theta\|\Delta u(t)\|^2 \geq \frac{\theta}{(1-\theta)}b\|u(t)\|_{p+2}^{p+2}$，$\forall t \in [0,+\infty)$。

证明： 由引理 2.1 得

$$b\|u\|_{p+2}^{p+2} \leq bC^{p+2}\|\Delta u\|^{p+2} = bC^{p+2}\|\Delta u\|^{p}\|\Delta u\|^2 \leq bC_*^{p+2}\left(\frac{2(p+2)}{p}E(u(0))\right)^{\frac{p}{2}}\|\Delta u\|^2 \tag{2.2}$$

设 $\theta = 1 - bC_*^{p+2}\left(\frac{2(p+2)}{p}E(u(0))\right)^{\frac{p}{2}}$，

则由(2.6)得 $0 < \theta < 1$，因此根据(2.2)，有

$$b\|u\|_{p+2}^{p+2} \leq (1-\theta)\|\Delta u\|^2. \tag{2.3}$$

同样由(2.3)，知

$$I(u) = \|\Delta u\|^2 - b\|u\|_{p+2}^{p+2} \geq \|\Delta u\|^2 - (1-\theta)\|\Delta u\|^2 = \theta\|\Delta u\|^2 \geq \frac{\theta b}{1-\theta}\|u\|_{p+2}^{p+2}.$$

所以引理 2.4 得证。

3. 主要结果及其证明

定理 3.1 如果定理 2.2 中的假设成立，则有问题(1.1)~(1.3)整体解的能量衰减估计

$$E(t) \leq M(1+t)^{-\frac{2}{r}},$$

其中 $E(t) = E(u(t)), M > 0$ 是依赖初始能量 $E(0)$ 的常数。

证明：设 $E(t) = E(u(t))$，对方程(1.1)两边同时乘以 $E(t)^{\frac{r}{2}}u$，并在 $\Omega\times[S,T]$ 上积分，得

$$\begin{aligned}
&\int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{r}{2}}u\left[u_{tt} + \Delta^2 u + a\left(1+|u_t|^r\right)u_t - bu|u|^p\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{r}{2}}uu_{tt}\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{r}{2}}u\Delta^2 u\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{r}{2}}ua\left(1+|u_t|^T\right)u_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t - b\int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{r}{2}}u^2|u|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

其中 $0 \leq S < T < +\infty$.

因为

$$\int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{r}{2}}uu_{tt}\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_\Omega E(t)^{\frac{r}{2}}uu_t\mathrm{d}x\Big|_S^T - \int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{r}{2}}|u_t|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \frac{r}{2}\int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{r-2}{2}}E'(t)uu_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{3.2}$$

所以，将(3.2)代入(3.1)，整理得到

$$\begin{aligned}
&\int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{r}{2}}\left(|u_t|^2 + |\Delta u|^2 - b|u|^{p+2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{r}{2}}\left[2|u_t|^2 - a\left(1+|u_t|^r\right)u_t u\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \frac{r}{2}\int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{r-2}{2}}E'(t)uu_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_\Omega E(t)^{\frac{r}{2}}uu_t\mathrm{d}x\Big|_S^T
\end{aligned} \tag{3.3}$$

根据引理 2.4，$E(t)$ 的定义和 $0 < \theta < 1$，得

$$\begin{aligned}
&\int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{r}{2}}\left(|u_t|^2+|\Delta u|^2-b|u|^{p+2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&=\int_S^T E(t)^{\frac{r}{2}}\left[\int_\Omega\left(|u_t|^2+|\Delta u|^2-b|u|^{p+2}\right)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t \\
&=\int_S^T E(t)^{\frac{r}{2}}\left(\|u_t\|^2+\|\Delta u\|^2-b\|u\|_{p+2}^{p+2}\right)\mathrm{d}t \\
&=\int_S^T E(t)^{\frac{r}{2}}\left(\|u_t\|^2+I(u(t))\right)\mathrm{d}t\ge\int_S^T E(t)^{\frac{r}{2}}\left(\|u_t\|^2+\theta\|\Delta u\|^2\right)\mathrm{d}t \\
&\ge 2\theta\int_S^T E(t)^{\frac{r}{2}}\left(\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\|\Delta u\|^2\right)\mathrm{d}t\ge 2\theta\int_S^T E(t)^{\frac{r+2}{2}}\mathrm{d}t
\end{aligned}\tag{3.4}$$

由引理 2.1 知

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{r}{2}\int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{r-2}{2}}E'(t)uu_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right| \\
&\le\frac{r}{2}\int_S^T E(t)^{\frac{r-2}{2}}|E'(t)|\left(\frac{1}{2}\|u\|^2+\frac{1}{2}\|u_t\|^2\right)\mathrm{d}t \\
&\le-\frac{r}{2}\int_S^T E(t)^{\frac{r-2}{2}}E'(t)\left(\frac{C^2}{2}\|\Delta u\|^2+\frac{1}{2}\|u_t\|^2\right)\mathrm{d}t \\
&\le-\frac{r}{2}\int_S^T E(t)^{\frac{r-2}{2}}E'(t)\left(\frac{(p+2)C^2}{p}\frac{p}{2(p+2)}\|\Delta u\|^2+\frac{1}{2}\|u_t\|^2\right)\mathrm{d}t \\
&\le-\frac{r}{2}\max\left(\frac{(p+2)C^2}{p},1\right)\int_S^T E(t)^{\frac{r}{2}}E'(t)\mathrm{d}t \\
&=-\frac{r}{r+2}\max\left(\frac{(p+2)C^2}{p},1\right)E(t)^{\frac{r+2}{2}}\Big|_S^T\le ME(S)^{\frac{r+2}{2}},
\end{aligned}\tag{3.5}$$

同理，得

$$\left|-\int_\Omega E(t)^{\frac{r}{2}}uu_t\mathrm{d}x\Big|_S^T\right|\le\max\left(\frac{(p+2)C^2}{p},1\right)E(t)^{\frac{r+2}{2}}\Big|_S^T\le ME(S)^{\frac{r+2}{2}},\tag{3.6}$$

其中 $M=\max\left(\frac{(p+2)C^2}{p},1\right)$。

将估计(3.4)，(3.5)和(3.6)代入(3.3)，可得

$$2\theta\int_S^T E(t)^{\frac{r+2}{2}}\mathrm{d}t\le\int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{r}{2}}\left[2|u_t|^2-a\left(1+|u_t|^r\right)u_tu\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t+ME(S)^{\frac{r+2}{2}},\tag{3.7}$$

利用 Young 不等式，

$$\begin{aligned}
2\int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{r}{2}}|u_t|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t&\le\int_S^T\int_\Omega\left(\varepsilon_1E(t)^{\frac{r+2}{2}}+M(\varepsilon_1)|u_t|^{r+2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\le M\varepsilon_1\int_S^T E(t)^{\frac{r+2}{2}}\mathrm{d}t+M(\varepsilon_1)\int_S^T\left(\|u_t\|_{r+2}^{r+2}+\|u_t\|^2\right)\mathrm{d}t \\
&=M\varepsilon_1\int_S^T E(t)^{\frac{r+2}{2}}\mathrm{d}t-\frac{M(\varepsilon_1)}{a}\left(E(T)-E(S)\right) \\
&\le M\varepsilon_1\int_S^T E(t)^{\frac{r+2}{2}}\mathrm{d}t+ME(S),
\end{aligned}\tag{3.8}$$

由 Young 不等式，引理 2.1，

$$
\begin{aligned}
&-a\int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{r}{2}}uu_t|u_t|^r\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\le a\int_S^T E(t)^{\frac{r}{2}}\left(\varepsilon_2\|u\|_{r+2}^{r+2}+M(\varepsilon_2)\|u_t\|_{r+2}^{r+2}\right)\mathrm{d}t \\
&\le aC^{r+2}\varepsilon_2E(0)^{\frac{r}{2}}\int_S^T\|\Delta u\|^{r+2}\,\mathrm{d}t+aM(\varepsilon_2)E(S)^{\frac{r}{2}}\int_S^T\left(\|u_t\|_{r+2}^{r+2}+\|u_t\|^2\right)\mathrm{d}t \\
&= aC^{r+2}\varepsilon_2E(0)^{\frac{r}{2}}\int_S^T\left(\frac{2(p+2)}{p}E(t)\right)^{\frac{r+2}{2}}\mathrm{d}t+M(\varepsilon_2)E(S)^{\frac{r}{2}}\left(E(S)-E(T)\right) \\
&\le aC^{r+2}\varepsilon_2E(0)^{\frac{r}{2}}\left(\frac{2(p+2)}{p}\right)^{\frac{r+2}{2}}\int_S^T E(t)^{\frac{r+2}{2}}\mathrm{d}t+M(\varepsilon_2)E(S)^{\frac{r+2}{2}},
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

且

$$
\begin{aligned}
&-a\int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{r}{2}}uu_t\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le a\int_S^T E(t)^{\frac{r}{2}}\left(\frac{1}{2}\|u\|^2+\frac{1}{2}\|u_t\|^2\right)\mathrm{d}t \\
&\le a\int_S^T E(t)^{\frac{r}{2}}\left(\frac{C^2}{2}\|\Delta u\|^2+\frac{1}{2}\|u_t\|^2\right)\mathrm{d}t \\
&= a\int_S^T E(t)^{\frac{r}{2}}\left(\frac{(p+2)C^2}{p}\cdot\frac{p}{2(p+2)}\|\Delta u\|^2+\frac{1}{2}\|u_t\|^2\right)\mathrm{d}t \\
&\le a\max\left(\frac{(p+2)C^2}{p},1\right)\int_S^T E(t)^{\frac{r+2}{2}}\mathrm{d}t\le ME(S)^{\frac{r+2}{2}}
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

其中 $M(\varepsilon_1)$ 和 $M(\varepsilon_2)$ 是依赖于 ε_1 和 ε_2 的正数。

选取足够小的 ε_1 和 ε_2，使得

$$
M\varepsilon_1+aE(0)^{\frac{r}{2}}\left(\frac{2(p+2)C^2}{p}\right)^{\frac{r+2}{2}}\varepsilon_2<2\theta,
$$

将式(3.8)，(3.9)和(3.10)代入(3.7)，得

$$
\int_S^T E(t)^{\frac{r+2}{2}}\mathrm{d}t\le ME(S)+ME(S)^{\frac{r+2}{2}}\le M\left(1+E(0)\right)^{\frac{r}{2}}E(S).
$$

因此，由引理 3.1 知

$$
E(t)\le M\left(E(0)\right)(1+t)^{-\frac{r}{2}},t\in[0,+\infty).
$$

其中 $M\left(E(0)\right)>0$ 是依赖于 $E(0)$ 的常数。

基金项目

河南省教育厅自然科学基金资助项目。

参考文献 (References)

[1] Komornik, V. (1994) Exact controllability and stabilization. *The Multiplier Method*, Masson, Paris.

[2] Guesmia, A. (1998) Existence globale at stabilisation interne non lineaire d'un systeme de Petrovsky. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society—Simon Stevin*, **5**, 583-594.

[3] Guesmia, A. (1999) Energy decay for a damped nonlinear coupled system. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **239**, 38-48.

[4] Aassila, M. and Guesmia, A. (1999) Energy decay for a damped nonlinear hyperbolic equation. *Applied Mathematics Letters*, **12**, 49-52.

[5] Benaissa, A. and Messaoudi, S.A. (2005) Exponential decay of solutions of a nonlinearly damped wave equation. *Nonlinear Differential Equations and Applications*, **12**, 391-399.

[6] Georgiev, V. and Todorova, G. (1994) Existence of solutions of the wave equation with nonlinear damping and source terms. *Journal of Differential Equations*, **109**, 295-308.

[7] Liu, Y.C. and Zhao, J.S. (2006) On potential wells and applications to semilinear hyperbolic equations and parabolic equations. *Nonlinear Analysis*, **64**, 2665-2687.

[8] Payne, L.E. and Sattinger, D.H. (1975) Saddle points and instability of nonlinear hyperbolic equations. *Israel Journal of Mathematics*, **22**, 273-303.

[9] Todorova, G. (1999) Stable and unstable sets for the Cauchy problem for a nonlinear wave equation with nonlinear damping and source terms. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **239**, 213-226.

[10] Vitiliaro, E. (1999) Global nonexistence theorems for a class of evolution equations with dissipation. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **149**, 155-182.

[11] Messaoudi, S.A. (2002) Global existence and nonexistence in a system of Petrovsky. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **265**, 296-308.

汉斯出版社为全球科研工作者搭建开放的网络学术中文交流平台。自2011年创办以来，汉斯一直保持着稳健快速发展。随着国内外知名高校学者的陆续加入，汉斯电子期刊已被450多所大中华地区高校图书馆的电子资源采用，并被中国知网全文收录，被学术界广为认同。

汉斯出版社是国内开源（Open Access）电子期刊模式的先行者，其创办的所有期刊全部开放阅读，即读者可以通过互联网免费获取期刊内容，在非商业性使用的前提下，读者不支付任何费用就可引用、复制、传播期刊的部分或全部内容。