Pure Mathematics 理论数学, 2015, 5, 89-94
Published Online May 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.53014

Finite-Time Stability of Positive Implusive Switched Systems

Yuechao Liu, Caixia Gao

School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot Inner Mongolia
Email: yuechao0727@126.com, gaocx0471@163.com

Received: Apr. 17th, 2015; accepted: Apr. 30th, 2015; published: May 5th, 2015

Abstract

This paper addresses the finite-time stability of positive impulsive switched systems. First, the concept of finite-time stability is extended to positive impulsive switched systems, starting from the existence of solutions and solving differential equations. If the solution of the systems satisfies some conditions, then we can prove the stability of the system. Finally, the sufficient conditions of positive impulsive switched systems are given.

Keywords

Lyapunov Stability, Finite-Time Stability, Positive Systems, Positive Impulsive Switched Systems

正脉冲切换系统的有限时间稳定性分析

刘越超，高彩霞

内蒙古大学数学科学学院，内蒙古 呼和浩特
Email: yuechao0727@126.com, gaocx0471@163.com

收稿日期：2015年4月17日；录用日期：2015年4月30日；发布日期：2015年5月5日

摘 要

本文解决了正脉冲切换系统的有限时间稳定性。首先把有限时间稳定的概念推广到正脉冲切换系统，从

解的存在性入手，用求解微分方程组的方法，系统的解若满足一些条件，即可证明系统的稳定性。最后给出正脉冲切换系统稳定的充分条件。

关键词

Lyapunov稳定性，有限时间稳定(FTS)，正系统，正脉冲切换系统

1. 引言与预备知识

FTS 最早出现在 20 世纪 50 年代俄罗斯文献中，随后在 60 年代出现在西方控制文献中[1] [2]。

一般来说，研究有限时间稳定性可以从 2 个方面考虑

1) 预先给定了状态变量的界，寻求最长的时间区间 $[0,T_{\max}]$。

2) 预先给定一段有限的时间区间 $[0,T]$，寻求最小的状态变量的界，使在 $[0,T]$ 上有限时间稳定。

Lyapunov 稳定性是在采用状态空间描述以后，初始条件作用下系统方程的解是否具有收敛性。

应当指出的是有限时间稳定(FTS)和 Lyapunov 稳定是 2 个不同的概念。一个系统可以是 FTS 的，但不是 Lyapunov 渐近稳定的，反之亦然。

有限时间稳定(FTS)和 Lyapunov 稳定的区别主要体现在以下几点

1) Lyapunov 渐近稳和 FTS 考虑的时间长短不同。

2) Lyapunov 渐近稳定和 FTS 对边界的要求不同。

3) Lyapunov 渐近稳定和 FTS，前者考虑的是系统的稳态行为，后者考虑的是系统的暂态行为。

最近，不同系统的有限时间稳定性吸引了很多学者的注意，[3]-[15]给出了线性系统和线性时变系统的有限时间稳定的充分必要条件，[16]讨论了线性脉冲系统的有限时间稳定性。

考虑到大部分文献给出的系统是有限时间稳定的判定条件是借助于 Lyapunov 函数，但是这个函数是很难构造的，这促使我们思考，有没有其他的方法可以考虑，本文通过求解微分方程组，把脉冲切换系统的解解出来，使得系统的解只要满足一些条件就可以保证系统是有限时间稳定的。

切换系统可以用下面的方程表示

$$\dot{x}(t)=A_{\sigma(t)}x(t),\quad x(t_0)=x_0 \tag{1}$$

状态变量 $x(t)\in R^n$，切换信号 $\sigma(t):[t_0,\infty]\to W=\{1,2,\cdots,S\}$，$\{A_i\}$ 是一系列描述子系统的常数实矩阵。我们假定 $A_1,\cdots,A_m$ 是不稳定的，$A_{m+1},\cdots,A_S$ 是稳定的。

对应切换信号 $\sigma(t)$，我们有下面的切换子序列

$$\{x_0:(i_0,t_0),\cdots,(i_k,t_k),\cdots,|i_k\in W,k=0,1,\cdots\}$$

当 $t\in[t_k,t_{k+1}]$ 时，第 i_kth 个子系统被激活。

定义 1 (平均停留时间)

对任意的正标量 $T\ge t\ge 0$，$N_\sigma(t,T)$ 表示切 $\sigma(t)$ 在 $(t,T]$ 上切换次数，若

$$N_\sigma(t,T)\le N_0+\frac{T-t}{\tau_a} \tag{2}$$

则 τ_a 称为平均停留时间。

不失一般性，这里仍然假定 $A_1,\cdots,A_m$ 是不稳定的，$A_{m+1},\cdots,A_s$ 是 Hurwitz 稳定的，可以证明存在一系列正数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$，保证 $A_i-\lambda_i I(i\le m),A_i+\lambda_i I(i>m)$ 是 Hurwitz 稳定的。并且应用代数矩阵理论，得到

$$\left\|e^{A_i t}\right\| \le \alpha_i e^{\lambda_i t}, \qquad i \in [1, m]$$

$$\left\|e^{A_i t}\right\| \le \alpha_i e^{-\lambda_i t}, \quad i \in [m+1, s] \tag{3}$$

$T^{+}(0,t)$ 表示所有不稳定子系统的激活时间的总和，$T^{-}(0,t)$ 表示所有 Hurwitz 稳定子系统的激活时间的总和。

定义 $\lambda^{+} = \max\limits_{1 \le i \le m}\{\lambda_i\}, \lambda^{-} = \max\limits_{m < i \le s}\{\lambda_i\}$

任意选择一个标量 $\lambda^{*} \in (0, \lambda)$ 满足切换规则

$$\frac{T^{-}(0,t)}{T^{+}(0,t)} \ge \frac{\lambda^{+} - \lambda^{*}}{\lambda^{-} + \lambda^{*}}, \quad \forall t \in (0, T] \tag{4}$$

定义 2

如果矩阵 A 的非对角线元素是非负的，称 A 为 Metzler 矩阵。

定义 3

若矩阵 A 的最大特征值 $\mu(A) < 1$，称 A 为 Hurwitz 矩阵。

定义 4

一个系统被称为正系统，如果初始时刻 $x_0 \ge 0$，则 $x(t) \ge 0$， $\forall t \ge 0$。

定义 5

系统(1)被称为正系统，当且仅当矩阵 A 的非对角线元素是非负的，即 A 为 Metzler 矩阵。

2. 正脉冲切换系统的有限时间稳定性

考虑下面的连续时间的正脉冲切换系统

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t), t \in (t_{k-1}, t_k], k = 1, 2, \cdots$$

$$\Delta x(t) = x(t_k^{+}) - x(t_k) = F_k x(t), t = t_k \tag{5}$$

$$x(0^{+}) = x_0$$

其中 $x \in R^n$ 是系统的状态变量， x_0 是初始时刻的值， $\sigma(t):(0,T) \to W = \{1, \cdots, S\}$ 是切换信号并且是分段连续常值函数， S 表示子系统的切换个数， A_i 是常数矩阵， $x(t_k^{+}) = \lim\limits_{h \to 0^{+}} x(t_k + h)$， F_k 是常数矩阵，表示系统在切换时刻的脉冲影响， $0 < \|F_k\| \le \theta_k$。

定义 6

给定 3 个正数 c_1, c_2, T，并且满足 $c_1 < c_2$， $\Gamma > 0, \Pi > 0$ 表示正无限维矩阵， $\sigma(t)$ 表示切换信号，若下式成立。

$$x_0^T \Gamma x_0 \le c_1 \Rightarrow x^T(t) \Pi x(t) < c_2, \quad \forall t \in [0, T]$$

则系统(5)对任意的 $(c_1, c_2, T, \Gamma, \Pi)$ 是有限时间稳定的。

定义 7

对于给定的切换信号 $\sigma(t)$，假定脉冲切换系统对 $(c_1, c_2, T, \Gamma, \Pi)$ 有限时间稳定，如果存在正数 λ，满足对于所有的 $0 < t \le T$， α 为已知常数

$$\|x(t)\| \le \alpha e^{\lambda t} \|x(t_0)\|$$

称 λ 为脉冲切换系统有限时间稳定的度。

定理 1

给定$\left(c_1,c_2,T,\Gamma,\Pi\right)$，若切换信号满足上式，并且

$$\sqrt{\frac{c_2}{\lambda_{\max}\left(\Pi\right)}}\geq\alpha e^{v+\lambda T}\sqrt{\frac{c_1}{\lambda_{\min}\left(\Gamma\right)}}$$

那么存在一个正的常数τ_a^*，保证系统(5)是在任意的平均停留时间下是有限时间稳定

$$\tau_a>\tau_a^*,\alpha=\max_i\left(\alpha_i\right),N_0=\frac{v}{k},\tau_a^*=\frac{k}{\lambda-\lambda^*},kN_\sigma\left(0,t\right)+\lambda^*t\leq v+\lambda t\leq v+\lambda T$$

证明：$t_1,t_2,\cdots$表示切换时刻，$\sigma\left(t\right)$在$\left(t_k,t_{k+1}\right]$上的值用$p_k\left(k=0,1,\cdots\right),p_k\in\left[1,s\right]$表示，$t_0=0$

当$t\in\left(0,t_1\right]$，应用常微分方程理论，解得$x\left(t\right)=e^{A_{p_0}t}x_0$

在切换时刻$t=t_1$，$x\left(t_1\right)=e^{A_{p_0}t_1}x_0$

$$x\left(t_1^+\right)=\left(1+F_1\right)x\left(t_1\right)=\left(1+F_1\right)e^{A_{p_0}t_1}x_0$$

当$t\in\left(t_1,t_2\right]$，可得$x\left(t\right)=e^{A_{p_1}\left(t-t_1\right)}x\left(t_1^+\right)=e^{A_{p_1}\left(t-t_1\right)}\left(1+F_1\right)e^{A_{p_0}t_1}x_0$

$$x\left(t_2^+\right)=\left(1+F_2\right)x\left(t_2\right)=\left(1+F_2\right)e^{A_{p_1}\left(t_2-t_1\right)}\left(1+F_1\right)e^{A_{p_0}t_1}x_0$$

依次类推，得到当$t\in\left(t_M,t_{M+1}\right]$时，系统切换次数$N_\sigma\left(0,t\right)=M$

$$x\left(t\right)=e^{A_{p_M}\left(t-t_M\right)}\prod_{k=1}^{M}\left\{\left(1+F_{M+1-k}\right)e^{A_{p_{M-k}}\left(t_{M+1-k}-t_{M-k}\right)}\right\}x_0$$

由(3)式，和$\theta_k\geq\left\|F_k\right\|$，$\lambda^+=\max\limits_{1\leq i\leq m}\left\{\lambda_i\right\},\lambda^-=\max\limits_{m<i\leq s}\left\{\lambda_i\right\}$，上式变为

$$\left\|x\left(t\right)\right\|\leq\left(1+\theta_1\right)\cdots\left(1+\theta_M\right)\alpha_{p_0}\cdots\alpha_{p_M}e^{-\lambda^-T^-\left(0,t\right)+\lambda^+T^+\left(0,t\right)}\left\|x_0\right\|$$

取$\theta=\max_k\left\{\theta_k\right\},\alpha=\max_i\left\{\alpha_i\right\},\theta_0=0$，得到

$$\left\|x\left(t\right)\right\|\leq\left(1+\theta\right)^M\alpha^{M+1}e^{-\lambda^-T^-\left(0,t\right)+\lambda^+T^+\left(0,t\right)}\left\|x_0\right\|$$

对于给定的θ和α，一定存在一个有限的常数k，满足$\left(1+\theta\right)\alpha\leq e^k$

因此，又得到下面的式子

$$\left\|x\left(t\right)\right\|\leq\alpha e^{\kappa M}e^{-\lambda^-T^-\left(0,t\right)+\lambda^+T^+\left(0,t\right)}\left\|x_0\right\|$$

由(4)式，

$$\lambda^+T^+\left(0,t\right)-\lambda^-T^-\left(0,t\right)\leq\lambda^*\left[T^+\left(0,t\right)+T^-\left(0,t\right)\right]=\lambda^*t$$

如果取$\lambda^*\geq\lambda^+$，即使所有的子系统是不稳定的，即$T^-\left(t_0,t\right)=0$，上述等式也成立，得到

$$\left\|x\left(t\right)\right\|\leq\alpha e^{kM}e^{\lambda^*t}\left\|x_0\right\|\tag{6}$$

又因为一定存在一个常数v，满足

$$kN_\sigma\left(0,t\right)+\lambda^*t\leq v+\lambda t$$

且$N_\sigma\left(0,t\right)=M$表示在$\left(0,t\right)$上切换次数，所以

$N_{\sigma}(0,t)\le N_0+\frac{t}{\tau_a^*}$，$N_0=\frac{v}{k},\tau_a^*=\frac{k}{\lambda-\lambda^*}$，得到

$$\|x(t)\|\le\alpha e^{v+\lambda t}\|x_0\|\le\alpha e^{v+\lambda T}\|x_0\| \tag{7}$$

$$\lambda_{\min}(\Gamma)\|x_0\|^2\le x_0^T\Gamma x_0\le c_1 \tag{8}$$

$$\|x_0\|\le\sqrt{\frac{c_1}{\lambda_{\min}(\Gamma)}} \tag{9}$$

结合(6)，(7)，(8)，(9)式，得

$$\|x(t)\|\le\alpha e^{v+\lambda T}\|x_0\|\le\alpha e^{v+\lambda T}\sqrt{\frac{c_1}{\lambda_{\min}(\Gamma)}}\le\sqrt{\frac{c_2}{\lambda_{\max}(\Pi)}} \tag{10}$$

又因为

$$x^T(t)\Pi x(t)\le\lambda_{\max}(\Pi)\|x(t)\|^2 \tag{11}$$

结合(10)，(11)式，得 $x^T(t)\Pi x(t)\le c_2$

则系统(5)是在任意的平均停留时间下是有限时间稳定的。

3. 总结与展望

大部分文献给出的结论都是通过构造 Lyapunov 函数去证明系统的有限时间稳定，而 Lyapunov 函数不容易构造。本文从解的存在性入手，即用求解微分方程组的方法，系统的解若满足一些条件，即可证明系统的稳定性，最后，把结果推广到连续时间的脉冲切换系统的稳定性问题上。

有限时间稳定在实际应用和理论研究中有很大的价值，所以吸引了许多学者的关注，但是现在存在的结果比较保守，而且大部分是充分条件，即使给出的是必要条件，这些结果都有很大的局限性，并不能解决所有问题，这促使我们继续研究，本文可以从以下几个个方面继续讨论。

1) 研究带有时滞的脉冲切换系统的有限时间稳定。

2) 把构造解的方法推广到更复杂的混杂系统中。

基金项目

中国自然科学基金：11261033。

参考文献 (References)

[1] Dorato, P. (1961) Short time stability in linear time-varying systems. In: *Proceedings of the IRE international Convention Record Part* 4, New York, 9 May 1961, 83-87.

[2] Weiss, L. and Infante, E.F. (1967) Finite time stability under perturbing forces and on product spaces. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **12**, 54-59.

[3] Shorten, R., Wirth, F. and Leith, D. (2006) A positive systems model of TCP-like congestion control: Asymptotic results. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, **14**, 616-629.

[4] Berman, A., Shorten, R. and Leith, D. (2004) Positive matrices associated with synchronized communication networks. *Linear Algebra and Its Applications*, **393**, 47-54.

[5] Varga, E.H., Middleton, R., Colaneri, P. and Blanchini, F. (2011) Discrete-time control for switched positive systems with application to mitigating viral escape. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **21**, 1093-1111.

[6] Commault, C. and Marchand, N. (2006) Positive systems. *Proceedings of the Second Multidisciplinary International Symposium on Positive Systems*: *Theory and Applications* (*POSTA* 06), Grenoble, 30 August-1 September 2006, 429-443.

[7] Commault, C. and Marchand, N. (2006) Multidisciplinary international symposium positive systems No. 2. In: *Lecture Notes in Control and Information*, Vol. 341, Grenoble, France, 49-56.

[8] Mason, O. and Shorten, R. (2007) On linear co-positive Lyapunov functions and the stability of switched positive linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **52**, 1346-1349.

[9] Gurvits, L., Shorten, R. and Mason, O. (2007) On the stability of switched positive linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **l52**, 1099-1103.

[10] Knorn, F., Mason, O. and Shorten, R. (2009) On linear co-positive Lyapunov functions for sets of linear positive systems. *Automatica*, **45**, 1943-1947.

[11] Liu, X. (2009) Stability analysis of switched positive systems: A switched linear co-positive Lyapunov function method. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II*: *Express Briefs*, **56**, 414-418.

[12] Fornasini, E. and Valcher, M.E. (2012) Stability and stabilizability criteria for discrete-time positive switched systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **57**, 1208-1221.

[13] Zhao, X., Zhang, L., Shi, P. and Liu, M. (2012) Stability of switched positive linear systems with average dwell time switching. *Automatica*, **48**, 1132-1137.

[14] Amato, F., Ariola, M., Cosentino, C., Abdallah, C.T. and Dorato, P. (2003) Necessary and sufficient conditions for finite-time stability of linear systems. In: *Proceedings of the American Control Conference*, Denver, 4-6 June 2003, 4452-4456.

[15] Amato, F., Ariola, M. and Cosentino, C. (2005) Finite-time control of linear time-varying Systems via output feedback. In: *Proceedings of the American Control Conference*, Portland, 8-10 June 2005, 4723-4727.

[16] Amato, F., Ambrosino, R., Cosentino, C. and De Tommasi, G. (2011) Finite-time stabilization of impulsive dynamical linear system. *Nonlinear Analysis*: *Hybrid Systems*, **5**, 89-101.