Pure Mathematics 理论数学, 2015, 5(6), 272-277
Published Online November 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.56039

Hans汉斯

Some Notes on L-Semi Topological Space

Daofu Chen, Jian Zhong, Peiyong Zhu

School of Mathematical Sciences, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu Sichuan
Email: 744163393@qq.com, 1027150421@qq.com, zpy6940@uestc.edu.cn

Received: Oct. 26th, 2015; accepted: Nov. 13th, 2015; published: Nov. 17th, 2015

Abstract

Firstly, the concepts of both Left-semi topology and Right-semi topology are introduced by means of both sup-semi-topology and inf-semi-topology. Then, the point set theory of Left-semi-topological (*i.e.*, L-semi-topological) spaces is discussed. Some results on basic point sets, the properties of sub-spaces and the convergence of the net are obtained on L-semi-topological spaces. Furthermore, some basic properties of topological spaces are generalized, and it is cited by counterexamples that some results are not true on a L-semi topological space, but they are correct on topological spaces.

Keywords

Topological Space, L-Semi-Topology, L-Neighbourhood, L-Closure, L-Semi-Subtopology

关于L-半拓扑空间的一些注记

陈道富，钟　健，朱培勇

电子科技大学数学科学学院，四川 成都
Email: 744163393@qq.com, 1027150421@qq.com, zpy6940@uestc.edu.cn

收稿日期：2015年10月26日；录用日期：2015年11月13日；发布日期：2015年11月17日

摘　要

本文首先类比上半拓扑与下半拓扑引入左半拓扑与右半拓扑概念。然后，集中讨论左半拓扑(即，L-半拓

文章引用: 陈道富, 钟健, 朱培勇. 关于 L-半拓扑空间的一些注记[J]. 理论数学, 2015, 5(6): 272-277.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2015.56039

扑)空间的点集理论，获得了该类半拓扑空间的基本点集性质、子空间性质和网收敛性质。进而，使拓扑空间的基本性质得到推广。同时，也通过反例举出了在拓扑空间成立而在L-半拓扑空间不成立的一些结果。

关键词

拓扑空间，L-半拓扑，L-邻域，L-闭包，L-半子拓扑

1. 引言与预备知识

广义拓扑空间概念是由匈牙利数学家 A. Csaszar 于 2002 年在文献[1]中提出。他对广义拓扑空间作了深入研究，并且取得了一些初步成果。此后，不少学者积极投入，在广义拓扑空间的点集理论、映射性质等方面取得了一系列成果(参见文献[2]-[8])。由于广义拓扑实际上是一个半拓扑，最近文献[9]把广义拓扑空间重新命名为上半拓扑空间。进而，引入下半拓扑与下半拓扑空间的概念，并且获得了关于下半拓扑的一系列结果。在此，一个自然的问题是：能否类比文献[9]，将一个拓扑重新分割成两个半拓扑(称为左半拓扑与右半拓扑)？这两类新型的半拓扑空间是否一定具有比拓扑空间更为广泛的理论结果？

本文就上述问题进行研究，首先类比上半拓扑与下半拓扑引入左半拓扑(L-半拓扑)与右半拓扑(R-半拓扑)的概念，如下：

定义 1.1：设 X 是任一非空集合，δ 是 X 的一些子集构成的集族，

(1) 如果 $X\in\delta$ 并且对于任意集族 $\{G_\lambda:\lambda\in\Lambda\}\subset\delta$ 有 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda\in\delta$，则称 δ 为 X 上的一个左半拓扑(L-半拓扑)。其中 δ 中的每个元都称为是 X 的 L-开集，并称有序偶 (X,δ) 为一个左半拓扑空间(L-半拓扑空间)。

(2) 如果 $\phi\in\delta$ 并且对于任意 $G_1,G_2\in\delta$ 有 $G_1\bigcap G_2\in\delta$，则称 δ 为集合 X 上的一个右半拓扑(R-半拓扑)，其中 δ 中的每个元都称为是 X 的 R-开集，并且称有序偶 (X,δ) 为一个右半拓扑空间(R-半拓扑空间)。

下一定理是不证自明的：

定理 1.1：设 X 是任一非空集合，δ 是 X 的一些子集构成的集族，则 δ 是 X 上的一个拓扑当且仅当它既是 X 上的左半拓扑又是 X 上的右半拓扑。

本文主要就左半拓扑进行研究，至于对右半拓扑的讨论将作为本文的后续论文。下面是关于左半拓扑相关的一些概念与术语：

定义 1.2：设 (X,δ) 为 L-半拓扑空间，$x\in X$，$x\in X$，如果存在 $G\in\delta$ 使得 $x\in G\subset U$，则称 U 为点 x 的一个 L-邻域，x 点的邻域的全体称为点 x 的 L-邻域系，记作 $u(x)$。

定义 1.3：设 (X,δ) 为 L-半拓扑空间，$A\subset X$，$x\in X$。

(1) 若 $A^C=X-A\in\delta$，则称 A 为 X 的 L-闭集；

(2) 若 $\exists U\in u(x)$ 得 $x\in U\subset A$，则称点 x 为点集 A 的 L-内点，并称 A 的内点的集合为 A 的 L-内部，记为 A_l°；

(3) 若 $\forall U\in u(x)$，有 $U\bigcap(A\setminus\{x\})\neq\phi$，则称 x 为点集 A 的 L-聚点，并称 A 的 L-聚点的集合为 A 的 L-导集，记为 A_l'；

(4) $A\bigcup A_l'$ 称 A 的 L-闭包，记为 $\overline{A_l}$，即 $\overline{A_l}=A\bigcup A_l'$；

(5) 若 $\exists U\in u(x)$ 使得 $U\bigcap(A\setminus\{x_0\})=\phi$，则称 x 为 A 的孤立点。

定义 1.4：设 (X,δ) 为 L-半拓扑空间，A 为 X 中的任意非空子集，则集合 A 的 L-半拓扑 $\delta|_A=\{G\bigcap A|G\in\delta\}$ 称为 L-半拓扑 δ 的一个 L-子半拓扑，并称 $(A,\delta|_A)$ 称为是 (X,δ) 的 L-子半拓扑空间，

为了方便简称 A 为 X 的子空间。

定义 1.5 [10]：设 (X,δ) 为 L-半拓扑空间，$(S,\prec)$ 为一个定向集，则映射 $f:S\to X$ 称为是 X 上的一个网，记为 $\{f(\delta)\}_{\delta\in S}$ 或记为 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}$，其中 $x_\delta=f(\delta)\in X$。为方便，在不发生混淆时，通常把 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}$ 简写成 $\{x_\delta\}$。

定义 1.6：设 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}$ 是 L-半拓扑空间中的一个网，$x_0\in X$

(1) 称网终在 U 内，如果 $\forall U\in u(x_0)$，$\exists\delta_0\in S$ 使得 $\forall\delta\in S$，$\delta\succ\delta_0$，有 $x_\delta\in U$。

(2) 称网 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}$ L-收敛 x_0 于或称 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}$ 以 x_0 为极限，如果网 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}$ 终在 x_0 的每一个 L-邻域内，并记为 $x_\delta\to x_0(\delta\in S)$ 或 $\lim\limits_{\delta\in S}x_\delta=x_0$，通常简记为 $x_\delta\to x_0$ 或 $\lim x_\delta=x_0$。

定义 1.7：设 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}$ 与 $\{y_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ 为 L-半拓扑空间中的两个网，若存在映射 $J:\Delta\to S$，使得 $\forall\alpha\in\Delta$，有 $y_\alpha=x_{J(\alpha)}$，并且满足下列两个条件：

(LSN1) $\forall\alpha_1,\alpha_2\in\Delta$，若 $\alpha_1\prec\alpha_2$，则 $J(\alpha_1)\prec J(\alpha_2)$；

(LSN2) $\forall\delta\in S$，$\exists\alpha\in\Delta$ 使得 $\delta\prec J(\alpha)$。

则称 $\{y_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ 为 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}$ 的子网。

此外，本文中所涉及的一切概念、术语和记号，如果没有特别申明，都来自于文献[10]。

2. 基本点集与子空间

定理 2.1：设 (X,δ) 为 L-半拓扑空间，$u=\{u(x)\,|\,x\in X\}$ 为 L-半拓扑 δ 导出的 X 的 L-邻域系，则满足下列条件：

(LN1) 若 $U\in u(x)$，则 $x\in U$；

(LN2) 若 $U\in u(x)$，$V\supset U$，则 $V\in u(x)$；

(LN3) 若 $U\in u(x)$，则 $\exists W\in u(x)$ 使得 $W\subset U$，并且对于 $\forall y\in W$，有 $W\in u(y)$。

证明：由邻域的定义，(LN1)和(LN2)成立是显然的。现在验证(LN3)，设 $U\in u(x)$，则存在 $G\in\delta$ 使得 $x\in G\subset U$。令 $W=G$，故 $W\in u(x)$，并且 $W\subset U$。另外，对于 $\forall y\in W$，因为 $G=W\in\delta$ 使得 $y\in G\subset W$。再由邻域的定义，$W\in u(y)$。从而(LN3)真。

在拓扑空间中，具有命题：“若 $U_1,U_2\in u(x)$，则 $U_1\cap U_2\in u(x)$”成立。但在 L-半拓扑空间中，这命题不真。事实上，可取 $X=\{a,b,c\}$，$\delta=\{X,\{a,b\},\{a,c\}\}$，则 (X,δ) 是一个 L-半拓扑空间，而且 $U_1=\{a,b\}$ 与 $U_2=\{a,c\}$ 均是点 a 的邻域，但 $U_1\cap U_2=\{a\}\notin u(x)$。

定理 2.2：设 (X,δ) 为 L-半拓扑空间，$\mathcal{F}$ 为 X 中闭集的全体，则满足条件：

(LF1) $\phi\in\mathcal{F}$；(LF2)若 $F_\lambda\in\mathcal{F}(\lambda\in\Lambda)$，则 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda\in\mathcal{F}$。其中 Λ 为任意指标集。

证明：由 L-半拓扑空间定义中(LF1)(LF2)和 de Morgan 公式直接推知。

在拓扑空间中，有命题：“若 $F_1,F_2\in\mathcal{F}$ 则 $F_1\cup F_2\in\mathcal{F}$”成立。但是，两个 L-闭集的并集未必一定是 L-闭集。下面是这问题的一个反例：令 $X=\{a,b,c\}$，作 L-半拓扑 $\delta=\{X,\{a,b\},\{a,c\}\}$，并且取 L-闭集 $F_1=\{b\},F_2=\{c\}\in\mathcal{F}$，则 $F_1\cup F_2=\{b,c\}\notin\mathcal{F}$。

定理 2.3：设 (X,δ) 为 L-半拓扑空间，$A\subset X$，则 $x\in\overline{A}_l$ 当且仅当 $\forall U\in u(x)$ 有 $U\cap A\neq\phi$。

证明：*必要性*：$x\in\overline{A}_l$，则 $x\in A\cup A_l'$，则 $x\in A$ 或者 $x\in A_l'$，若 $x\in A$，显然 $\forall U\in u(x)$，有 $x\in U\cap A\neq\phi$；若 $x\notin A$，则 $x\in A_l'$，则 $\forall U\in u(x)$，有 $U\cap(A\setminus\{x\})\neq\phi$。从而，$U\cap A\neq\phi$。

充分性：“若 $x\notin\overline{A}_l$，则 $x\notin A_l'$，故 $\exists U\in u(x)$，使得 $x\in U\cap\{A\setminus\{x\}\}=\phi$。又因为 $x\notin A$，故 $U\cap A=U\cap\{A\setminus\{x\}\}=\phi$，这与已知矛盾，因此，$x\in\overline{A}_l$。

定理 2.4：设 (X,δ) 为 L-半拓扑空间，则 X 的任意子集 A，B 与其 L-闭包满足下列条件：

(LC1) $\overline{\phi}_l=\phi$；(LC2) $A\subset\overline{A}_l$；(LC3) $\overline{\overline{A}}_l=\overline{A}_l$；(LC4) $\overline{A}_l\cup\overline{B}_l\subset\overline{(A\cup B)}_l$

证明：如果 $\overline{\phi}_l \neq \phi$，即 $\exists x \in \overline{\phi}_l$，由定理 2.3，$\forall U \in u(x)$，有 $U \cap \phi \neq \phi$。这与 $U \cap \phi = \phi$ 矛盾，故 $\overline{\phi}_l = \phi$。又由 $\overline{A}_l = A \cup A'_l$ 得 $A \subset \overline{A}_l$，即(LC2)真。

为了证明(LN3)，只需证 $\overline{\overline{A}}_l = \overline{A}_l$ 即可。事实上，$\forall x \in \overline{\overline{A}}_l$，由定理 2.3，$\forall U \in u(x)$，有 $U \cap \overline{A}_l \neq \phi$。因为 U 是点 x 的邻域，则存在开集 $G \subset X$ 使得 $x \in G \subset U$。又因 $G \in u(x)$，则 $G \cap \overline{A}_l \neq \phi$。取 $y \in G \cap \overline{A}_l$，再由定理 2.3，$G \cap A \neq \phi$。从而 $U \cap A \neq \phi$。于是 $x \in \overline{A}_l$。故 $\overline{\overline{A}}_l = \overline{A}_l$，即(LC3)真。

现在证(LC4)：设 $x \in \overline{A}_l \cup \overline{B}_l$，不妨设 $x \in \overline{A}_l$，$\forall U \in u(x)$，$\phi \neq U \cap A \subset U \cap (A \cup B)$，即 $x \in \overline{(A \cup B)}_l$。从而(LC4)真。

上述定理中(LC4)的包含关系 $\overline{A}_l \cup \overline{B}_l \subset \overline{(A \cup B)}_l$ 能否变成等式 $\overline{A}_l \cup \overline{B}_l = \overline{(A \cup B)}_l$ 呢？

下面给出反例：令 $X = \{a,b,c\}$，并取 $\delta = \{X, \{b,c\}, \{a,c\}\}$，则 (X,δ) 是一个 L-半拓扑空间。取它的二子集 $A = \{a\}$ 与 $B = \{b\}$，则 $\overline{(A \cup B)}_l = \{a,b,c\}$ 而 $\overline{A}_l = \{a\}$，$\overline{B}_l = \{b\}$，因此，$\overline{A}_l \cup \overline{B}_l = \{a,b\}$。从而，$\overline{A}_l \cup \overline{B}_l \neq \overline{(A \cup B)}_l$。

定理 2.5：A 为 L-闭集当且仅当 $\overline{A}_l = A$。

证明：充分性：设 A 为 L-闭集，则 A^C 为 L-开集。为证 $\overline{A}_l = A$，只需证 $\overline{A}_l \subset A$。事实上，若 $\overline{A}_l \not\subset A$，则 $\exists x \in \overline{A}_l \setminus A \subset X \setminus A = A^C \in u(x)$，即 $\exists U = A^C \in u(x)$ 使得 $U \cap A = A^C \cap A = \phi$。这与 $x \in \overline{A}_l$ 矛盾。所以，$\overline{A}_l \subset A$。故 $\overline{A}_l = A$。

必要性：设 $\overline{A}_l = A$。下证：A^C 开于 X。事实上，对于 $\forall x \in A^C$，因为 $x \notin A = \overline{A}_l$，由定理 2.3，$\exists U_x \in u(x)$ 使得 $U_x \cap A = \phi$。取开集 G_x，使得 $x \in G_x \subset U_x$。于是 $G_x \cap A = \phi$，即 $G_x \subset A^C$。则 $A^C = \bigcup_{x \in A^C} G_x$ 是 X 中的开集。所以，A 闭于 X。

下面是关于子空间的一些结果：

定理 2.6：设 $y \in Y \subset X$，并且 Y 是 L-半拓扑空间 X 的一个子空间，则

(1) 如果分别记 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}_Y$ 为 X 与 Y 上的全体闭集构成的集族，则 $\mathcal{F}_Y = \mathcal{F}|_Y$。

(2) 如果分别记 $u(y)$ 和 $u_Y(y)$ 为 X 与 Y 上点的邻域系，则 $u_Y(y) = u(y)|_Y$。

证明：设 X 上的拓扑为 δ，则子空间 Y 上拓扑为 $\delta|_Y$。

(1) $\forall F \in \mathcal{F}_Y$，因 $Y \setminus F \in \delta|_Y$，则 $\exists G \in \delta$ 使 $Y \setminus F = G \cap Y$，故 $F = Y \setminus G \cap Y = Y \cap (X \setminus G)$。

又因 $X \setminus G = \mathcal{F}$，则 $F = Y \cap (X \setminus G) \in \mathcal{F}|_Y$。

反过来，$F \in \mathcal{F}|_Y$，$\exists A \in \mathcal{F}$ 使得 $F = Y \cap A$。故 $Y \setminus F = Y \setminus A \cap Y = Y \cap (X \setminus A) \in \delta|_Y$。因此 $F \in \mathcal{F}_Y$。从而，$\mathcal{F}_Y = \mathcal{F}|_Y$ 成立。

(2)对于 $\forall U \in u_Y(y)$，令 $W = U \cup (X \setminus Y)$，则 $U = W \cap Y$。下证：$W = u(y)$。

事实上，因 $U \in u_Y(y)$，则 $\exists V \in \delta|_Y$ 使得 $y \in V \subset U$。又 $\exists G \in \delta$ 使得 $V = G \cap Y$，故 $y \in G \cap Y \subset U$。这必有 $y \in G \subset W$。这是因为对 $\forall z \in G$，若 $z \in Y$，则 $z \in G \cap Y \subset U \subset W$；若 $z \notin Y$，则 $z \in X \setminus Y \subset W$。因此，$G \subset W$。故 $U = W \cap Y \in u(y)|_Y$；反过来，$\forall U \in u(y)|_Y$，$\exists V \in u(y)$，使得 $U = V \cap Y$。故 $\exists G \in \delta$ 有 $y \in G \subset V$。所以 $y \in G \cap Y \subset V \cap Y = U$，即 $U \in u_Y(y)$。于是，$u_Y(y) = u(y)|_Y$。

定理 2.7：设 Y 是 L-半拓扑空间 X 的子空间，$A \subset Y$，则：

(1) $A'_{lY} = A'_l \cap Y$；

(2) $cl_{lY} A = cl_l A$，其中 A'_{lY} 和 $cl_{lY} A$ 分别表示点集 A 在子空间 Y 中 L-导集和 L-闭包。

证明：(1) $\forall y \in A'_{lY}$，$\forall U \in u(y)$，则 $U \cap Y \in u(y)|_Y$。故 $\phi \neq (U \cap Y) \cap (A \setminus \{y\}) \subset U \cap (A \setminus \{y\})$，所以 $\phi \neq U \cap (A \setminus \{y\})$，即 $y \in A'_l$。又因 $y \in A'_{lY} \subset Y$，故 $y \in A'_l \cap Y$。反过来，$\forall y \in A'_l \cap Y$，$\forall U \in u(y)|_Y$，$\exists V \in u(y)$，有 $U = V \cap Y$，因为 $U \cap (A \setminus \{y\}) = V \cap Y \cap (A \setminus \{y\}) = V \cap (A \setminus \{y\}) \neq \phi$。从而 $y \in A'_{lY}$，即 $A'_{lY} \supset A'_l \cap Y$，即(1)真。

(2) $cl_{lY} A = A \cup A'_{lY} = (A \cap Y) \cup (A'_l \cap Y) = (A \cup A'_l) \cap Y = cl_l A$。

3. 关于网的一些结果

定理 3.1：设 X 为一 L-半拓扑空间 $A\subset X$，则

(1) 存在网 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}\subset A\setminus\{x\}$，使得 $x_\delta\to x$，则 $x\in A'_l$。

(2) 存在网 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}\subset A$，使得 $x_\delta\to x$，则 $x\in \bar{A}_l$。

(3) A 为 L-开集，则不存在 A^C 中网收敛于 A 中的点。

证明：(1) 设网 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}\subset A\setminus\{x\}$，使得 $x_\delta\to x$。则 $\forall U\in u(x)$，$\exists\delta_U\in S$，使得 $\forall\delta\in S$，当 $\delta\succ\delta_U$ 时，有 $x_\delta\in U$。故 $x_\delta\in U\bigcap(A\setminus\{x\})$。因此 $x\in A'_l$。

(2) 设网 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}\subset A$，使得 $x_\delta\to x$，则 $\forall U\in u(x)$，$\exists\delta_0\in S$，当 $\delta\succ\delta_0$ 时，有 $x_\delta\in U$，故 $x_\delta\in U\bigcap A$。由定理 2.3，有 $x\in\bar{A}_l$。

(3) 设 A 为 L-开集，如果存在网 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}\subset A^C$，使得 $x_\delta\to x\in A$，则 $\exists\delta_0\in S$，当 $\delta\succ\delta_0$ 时，$x_\delta\in A$。这与 $x_\delta\in A^C$ 矛盾。

在拓扑空间中，定理 3.1 中结论(1)、(2)、(3)的逆命题也都是成立的，即它们都是充分必要的。但是，在 L-半拓扑空间中，这三个结论的逆命题均不成立。下面是它们的反例：

事实上，可取 $X=\{a,b,c\}$，$\delta=\{X,\{b,c\},\{a,c\}\}$，则 (X,δ) 是 L-半拓扑空间。又取 $A=\{a,b\}\subset X$，则不难验证：$\bar{A}_l=\{a,b,c\}$，并且 $A'_l=\{c\}$。令 $x=c$，则 $x\in A'_l$，但不存在 A 中网 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}$ 使得 $x_\delta\to x$。因此，定理 3.1(1)和(2)的逆命题都不真。

此外，令 $A=\{c\}$，则 $A^C=\{a,b\}$。显然，不存在 A^C 中的网收敛于 c 并且 A 不为 L-开集。因此，定理 3.1(3)的逆也不真。

理 3.2：在 L-半拓扑空间中，若网 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}$ 收敛于 x，则它的任意子网也收敛于 x。

证明：设 $\lim\limits_{\delta\in S}x_\delta=x_0$，则 $\forall U\in u(x)$，$\exists\delta_U\in S$，当 $\delta\succ\delta_U$，有 $x_\delta\in U$。若 $\{y_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ 是 $\{x_\delta\}_{\delta\in S}$ 的一个子网，即存在映射 $J:\Delta\to S$，对于 $\delta_U\in S$，$\exists\alpha_U\in\Delta$，使得 $J(\alpha_U)\succ\delta_U$。故当 $\alpha\succ\alpha_U$ 时，$J(\alpha)\succ J(\alpha_U)\succ\delta_U$，故 $x_{J(\alpha)}\in U$。因此，当 $\alpha\succ\alpha_U$ 时，有 $y_\alpha=x_{J(\alpha)}\in U$。从而 $y_\alpha\underset{\alpha}{\to}x$。

4. 小结

本文类比文献[9]引入上、下半拓扑空间的方法，定义了左半拓扑(L-半拓扑)与右半拓扑(R-半拓扑的概念)。类比拓扑空间，在 L-半拓扑空间上建立了点集的基本概念与理论，得到其开集、闭集、导集、网与网收敛的一些基本结果。从而，使得拓扑空间的相应结论得到推广。在此基础上，通过一些反例来说明在 L-半拓扑空间中一些拓扑性质的不成立。

致　谢

感谢电子科技大学科研实训创新项目基金的经费资助。

参考文献 (References)

[1] Csaszar, A. (2002) Generalized Topology, Generalized Continuity. *Acta Mathematica Hungarica*, **96**, 351-357. http://dx.doi.org/10.1023/A:1019713018007

[2] Csaszar, A. (2005) Generalized Open Sets in Generalized Topologies. *Acta Mathematica Hungarica*, **106**, 53-66. http://dx.doi.org/10.1007/s10474-005-0005-5

[3] Csaszar, A. (1997) Generalized Open Sets. *Acta Mathematica Hungarica*, **75**, 65-87. http://dx.doi.org/10.1023/A:1006582718102

[4] Csaszar, A. (2009) Products of Generalized Topologies. *Acta Mathematica Hungarica*, **123**, 127-132. http://dx.doi.org/10.1007/s10474-008-8074-x

[5] Csaszar, A. (2004) Separation Axioms for Generalized Topologies. *Acta Mathematica Hungarica*, **104**, 63-69.

[6] Min, W.K. (2010) Remarks on Separation Axioms on Generalized Topological Space. *Chungcheong Mathematical Society*, **23**, 293-298.

[7] Sarsak, M.S. (2011) Weak Separation Axioms in Generalized Topological Spaces. *Acta Mathematica Hungarica*, **131**, 110-121. http://dx.doi.org/10.1007/s10474-010-0017-7

[8] Shen, R. (2009) Remarks on Products of Generalized Topologies. *Acta Mathematica Hungarica*, **124**, 363-369. http://dx.doi.org/10.1007/s10474-009-8207-x

[9] 胡西超, 朱培勇. 一类新型半拓扑空间及其分离性质[J]. 理论数学, 2015, 5(4): 129-135.

[10] 朱培勇, 雷银彬. 拓扑学导论[M]. 北京: 科学出版社, 2009: 44-50.