**Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(2), 95-102**
Published Online March 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.62014

Hans汉斯

# Application of CVaR Metric in Extreme Value Theory

**Jing Yao[1], Yongming Li[2]**

[1]Department of Mathematics, Guangxi Normal University, Nanning Guangxi
[2]Department of Mathematics, Shangrao Normal College, Shangrao Jiangxi
Email: 1010810071@qq.com

Received: Feb. 27th, 2016; accepted: Mar. 9th, 2016; published: Mar. 16th, 2016



## Abstract

**Since the last half a century, with the globalization and diversification of economy, the financial risk measurement has gradually been concerned by the financial and economic scholars. After the 1990s, the new risk management tool, VaR (value at risk) measurement method has been developed gradually, which can measure risk value scientifically, accurately and comprehensively, and it is welcomed in the international financial community, but in extreme event, the accuracy of VaR is less than that of CVaR (conditional value at risk). This paper is intended to study the application of CVaR measure in extreme value theory.**

## Keywords

**Extreme Value Theory, VaR, CVaR**

# CVaR度量在极值理论中的应用

**姚　竞[1]，李永明[2]**

[1]广西师范学院数学科学学院，广西　南宁
[2]上饶师范学院数学系，江西　上饶
Email: 1010810071@qq.com

收稿日期：2016年2月27日；录用日期：2016年3月9日；发布日期：2016年3月16日

文章引用:姚竞, 李永明. CVaR 度量在极值理论中的应用[J]. 理论数学, 2016, 6(2): 95-102
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.62014

## 摘　要

**近半个世纪以来，随着经济的全球化和多元化，金融风险的度量逐渐受到金融界以及经济学者的关注。90年代后，新型风险管理工具VaR(在险价值)测量方法逐步发展起来，以它能够科学、准确、综合的度量风险值而倍受国际金融界的青睐。但在极端事件发生期，VaR的度量准确性不如CVaR(条件在险价值)。本文意在研究CVaR度量在极值理论上的应用。**

## 关键词

**极值理论，VaR，CVaR**

## 1. 引言

本自 20 世纪 70 年代以来，金融市场的不稳定性日益明显，金融危机时有发生，例如 1930 年西方发生的经济大萧条及其金融危机、2008 年 9 月 15 日爆发的并引发全球经济危机的金融危机等，这些事件给人类社会的发展和进步提出了严峻的考验。金融风险大小、风险评估以及风险控制等是金融工程中的重要研究课题。究竟应该如何度量金融风险的大小呢？风险价值是一种度量风险大小的工具，近年来受到国内外金融资产管理者的关注。如所周知，金融资产交易过程中呈现出显著的不确定性，金融资产的确定性关联失效。出现了金融资产收益序列的尖峰、厚尾现象，以及交易数据不确定。这种情况下 VaR 模型很难精准衡量风险值。VaR 实质上是用收益分布的单一分位数表示，用以描述某一概率保证不超过它，但不能表示当超出 VaR 极端情况发生时期的期望损失程度。而 CVaR(条件风险价值)却可以衡量，CVaR 是一种一致性风险测度指标，在投资组合优化中有很大的应用潜能，但在金融领域内的实际应用研究尚未成熟。Tyrrel Rockafellar 和 Stanislav Uryasev 在网上发布名为 Optimization of Conditional Value-at-Risk 的文章[1]，首先给出了条件风险价值 CVaR 对于组合优化的风险计量技术，在该篇文章里定义了 CVaR 的基本概念，即损失超出 VaR 条件期望。继该篇文章之后，Fredrik Andersson, Helmut Mausser 等(2001) [2]进一步讨论了 CVaR 的约束问题，探讨了信用风险优化问题。CVaR 正处于研究的初期阶段，国内关于 CVaR 的研究才刚开始。国内早期更多的是对 CVaR 的理论综述。2008 年后研究的学者增多，研究力度加强，成果日益丰硕。早几年代表的有陈剑利，李胜[3]在 2004 年给出 CVaR 风险度量模型在投资组合中的运用；曲圣宁，田新[4]研究了投资组合风险管理中的 VaR 模型的缺陷以及 CVaR 模型；霍玉琳，何春雄[5]研究了 GARCH 模型下的极值一致风险度量。随着经济发展，CVaR 用于经济管理方面不断增加，有余星，孙红果，陈国华[6]探索了基于 CVaR 的融入期权的投资组合模型问题；黄鹂，魏岩[7]研究了基于 CVaR 模型投资组合保险的绩效实证等等。

极值理论(EVT)是处理与概率分布的中值相离极大的情况的理论，最早由提出 Gumbel 分布的 Emil Julius Gumbel 阐述。常用来分析概率罕见的情况，如百年一遇的地震、洪水等，在风险管理和可靠性研究中时常用到。本文结合极值理论和 CVaR 来研究金融市场的风险值。

## 2. 极值理论

预备知识

定义 1：一致性风险测度的定义

$\theta$ 为可测集，定义映射：$\rho:\theta\to(-\infty,\infty]$，$\rho(0)=0$。当同时满足下面的条件时，$\rho$ 称为致性风险测度：

1) 单调性：$X,Y\in\theta$，$X\le Y\Rightarrow\rho(X)\le\rho(Y)$，

2) 次可加性：$X$，$Y$； $X+Y\in\rho(X+Y)\le\rho(X)+\rho(Y)$，

3) 正齐次性： $X\in\theta$， $h>0$， $hX\in\theta\Rightarrow\rho(hX)=h\rho(X)$，

4) 传递性： $X\in\theta$， $\alpha\in R$， $X+\alpha\in\theta\Rightarrow\rho(X+\alpha)=\rho(X)+\alpha$。

VaR 不满足一致性测度公理的性质，CVaR 和 ES(Expected Shortfall)恰好能弥补 VaR 的不足。Acerbi (2002) [8]给出当收益 X 的分布函数 F(X)连续时，CVaR 和 ES 等价。

设 $\{Y_t\}_{t=1}^{n}$ 表一资产在某整段时间内的 $n$ 个时间段市场价格序列，定义 $X_t=\log(Y_t/Y_{t-1})$ 为第 $t$ 个时间段对数回报率。假设 $\{X_t\}_{t=1}^{n}$ 是一个严平稳相依时间序列，其边际分布函数为 $F(x)$，给定 $p\in(0,1)$，则在 $(1-p)$ 置信水平下的 VaR 的值为：

$$\gamma_p=-\inf\{u:F(u)\ge p\}$$

定义 VaR 样本分位数估计为：

$$\theta_{n,p}=-X_{[np]}+1$$

CVaR(损失超出 VaR 条件期望)值为：

$$CVaR_\alpha=-E\left(X\,\middle|\,X\le -VaR_\alpha\right) \tag{1}$$

极值分布的理论统称为极值理论，主要研究随机样本和随机过程机制中的概率值和统计推断。用极值理论估计 CVaR 时，只需考虑对尾部的近似表达，更有效避开模型风险。本文用 POT (Peaks over Threshold)模型估计 CvaR。我们规定收益序列取的相反数(即加上负号)可转化为损失序列。

## 2.1. 极值分布

假设变量序列 $X\_\{n\},t=1,\cdots,n$， 是损失序列，分布函数为 $F(x)$。Gumbel，Frechet，Weibull 分布分别为极值渐近分布的三种表现形式，为方便统计应用，Jenkinson (1995)给出了广义极值分布模型，广义极值分布(GEV 分布)；

$$H_\xi(x)=\begin{cases}\exp\left(-(1+\xi_x)^{-\frac{1}{\xi}}\right); & \xi\ne 0\\ \exp\left(-\mathrm{e}^{x}\right); & \xi=0\end{cases} \tag{2}$$

其中 $\xi=1/\alpha$ 是形状参数，$\alpha$ 是尾部参数，$1+\xi_x>0$。当 $\xi>o$ 时，$H_\xi(x)$ 是 Frechet 分布；当 $\xi=o$ 时，$H_\xi(x)$ 是 Weibull 分布；当 $\xi<o$ 时， $H_\xi(x)$ 是 Gumbel 分布。我们主要研究 Frechet 分布。

假设 $u$ 为门限损失值，称 $Y=X-u$ 为超量损失，当 $Y>0$\$的条件超限分布 $F_u(y)$ 为：

$$F_u(y)=P\left(X-u\le y\,\middle|\,Y>0\right)=\frac{F(u+y)-F(u)}{1-F(u)}$$

则有

$$F(x)=(1-F(u))Fu(y)+F(u) \tag{3}$$

在 1975 年，Pickands 首次介绍了广义 Pareto 分布，它含有两个参数 $\beta,\xi$。GPD 的分布函数为：

$$G_{\xi,\beta}(y)=\begin{cases}1-\left(\left(1+\dfrac{\xi_y}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\beta}}\right); & \xi\ne 0\\ 1-\exp\left(-\dfrac{y}{\beta}\right); & \xi=0\end{cases} \tag{4}$$

其中 $\beta$ 是尺度参数，$\xi$ 是形状参数。当 $\xi \ge 0$ 时，$x \ge 0$；当 $\xi \le 0$ 时，$0 \le x \le -\frac{\beta}{\xi}$，当 $\xi > 0$ 时广义 Pareto 是厚尾分布。

### 2.2. 极值 CVaR 的计算

由 Pickand 提出当 $u$ 足够大时，条件超限分布 $F_u(y)$ 近似于广义 Pareto 分布。即

$$F_u(y) \cong G_{\xi,\beta}(y)$$

构造 $F(x)$ 的尾部估计表达式：若 $x > u$，由(3)式可得：

$$F(x) = (1-F(u))G_{\xi,\beta}(y) + F(u) = (1-F(u))G_{\xi,\beta}(x-u) + F(u) \tag{5}$$

对 $F(x)$ 估计需要分以下几步进行：

A1：找到合适的阈值 $u$。

A2：估计广义 Pareto 分布 $G_{\xi,\beta}(x-u)$ 的参数 $\xi,\beta$ 采用极大似然估计。

A3：估计 $F_u$。

A4：估计尾部及分位数。

将 A1~A4 代入(5)得到 $F_x$ 的尾部估计

$$\hat{F}(x) = \left(1-\frac{n-N_u}{n}\right)\left[1-\left(1+\xi\frac{x-u}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right] + \frac{n-N_u}{n} = 1-\frac{N_u}{n}\left(1+\hat{\xi}\frac{x-u}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}},\ x>u, \tag{6}$$

其中 $\hat{F}(x) = \frac{n-N_u}{n}$ 表示经验分布在 $u$ 的取值，$n$ 为样本点总数，$N_u$ 为样本中超出门限值得数目。$x > u$ 时，定义 VaRp 为在 $p$ 的概率水平下的风险价值

$$VaR_p = F^{-1}(p) = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}}\left(\left(\frac{n}{N_u}(1-p)\right)^{-\hat{\xi}} - 1\right);\ p \ge F(u)$$

虽然 VaR 被广泛采用，但它不满足次可加性，且没有涉及到尾部风险的问题，然而 CVaR 恰好能够弥补这些缺陷。Acerb 和 Tasche 给出了概率水平为 $\alpha$ 的 ES 积分表示方法：

$$ES_\alpha = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha q(p)\,\mathrm{d}p$$

其中 $q(p)$表示对应概率水平为 $p$ 的分位数，他们还证明了在 $F(x)$ 连续的条件下 ES 和 CVaR 是等价的，故有：

$$CVaR_\alpha = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha q(p)\,\mathrm{d}p = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha -VaR_p\,\mathrm{d}p = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha\left(u+\frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}}\left(\left(\frac{n}{N_u}(1-p)\right)^{-\hat{\xi}}-1\right)\right)\mathrm{d}p$$

$$= u - \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}}\left[1-\frac{1}{1-\hat{\xi}}\left(\frac{n(1-p)}{N_u}\right)^{-\hat{\xi}}\right]$$

## 3. 实证分析

本文意在研究恒生股指的风险和收益，我们收集了恒生指数的原始数据 $x_t$，$x_t$ 表示第 $t$ 天的实数收盘价，我们定义每天对数收益率为：$\gamma_t = \log(x_t/x_{t-1})$，数据样本从 2006-01-04 到 2015-09-13 (数据来源：

通信达)，共 2390 个样本点，本文用 R 语言来实现 GPD 参数的极大似然估计和 CVaR 的计算。

表 1 给出了样本数据的部分基本统计量，可知峰度(Kurtosis)大于 3，即样本数据存在厚尾现象，偏度(Skewness)大于 0 表示图形右偏，即有右厚尾现象。即该时间段恒生股指的日对收益序列不服从正态分布，而是服从帕累托分布。

图 1，图 2 分别为 Hill 图和 QQ 图，用于判断序列是否为正态分布，同时帮助确定阈值。

从图 3~图 5 可以看出样本序列服从帕累托分布，其中图 3 经验分布函数图；图 4 简单均值剩余图，图形呈现向上的直线，说明有厚尾现象，且可知阈值在 0.02 左右以上；图 5 估计极值指标。

图 6 和图 7 是两个 GPD 相关图形：图 6 估计 GPD 参数图，GPD 有两个参数，其中分布的形状参数 $\hat{\xi}$ 都大于 0，表示不同指数的左右胖尾程度是不同的。但 $\hat{\xi}$ 越大($\hat{\xi}>0$)，尾部就越大，那么发生极端事件的概率就更大；图 2 是 GPD 高分位数尾估计图，表明该样本序列的 GPD 尾估计小于 0.07。

表 2 给出了同等条件下 VaR 度量风险的值和 CVaR 的度量值，从数值上对风险做出来客观的描述，CVaR 值都比相应 VaR 值大，从简单的数字可以看出 CVaR 风险度量对于风险的描述更加准确。置信水平越小 CVaR 度量方法的优势越明显。综上可知，恒生股指序列存在尖峰厚尾现象，预度量该股的风险值，可用 CVaR 测度估计。

**Table 1.** Basic statistics
**表 1.** 基本统计量

| N | Mean | Median | CV | Skewness | Kuetosis |
|---|---|---|---|---|---|
| 2390 | 6.612446e-05 | 0.000282 | 10,830.49 | 0.0303079 | 8.597846 |

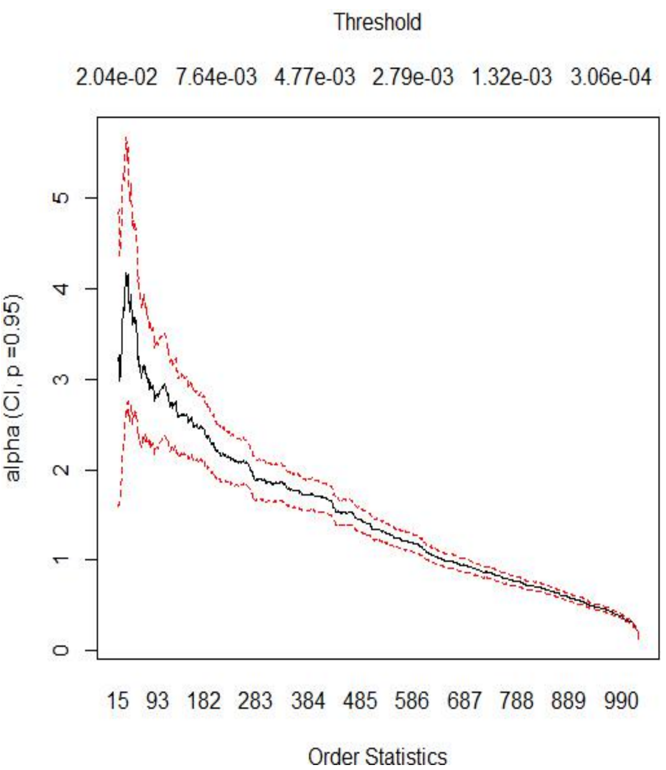


**Figure 1.** Hill diagram
**图 1.** Hill 图

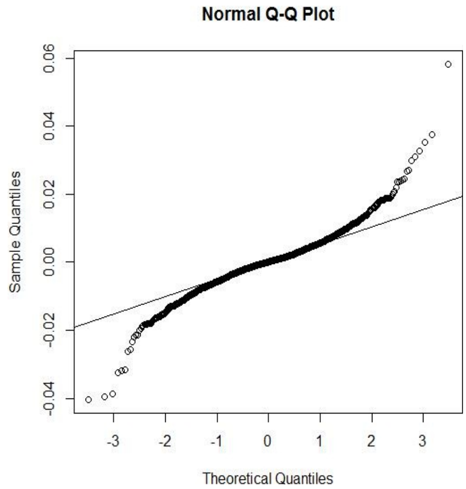


**Figure 2.** QQ diagram
**图 2.** QQ 图

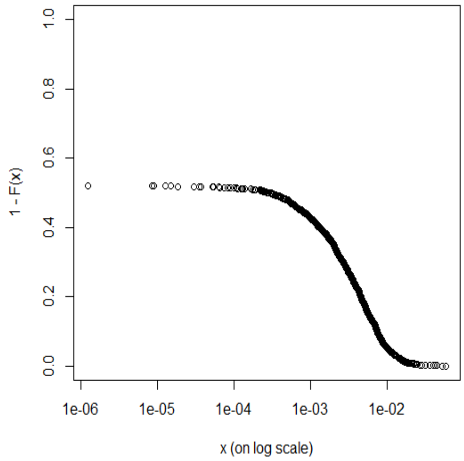


**Figure 3.** Empirical distribution function
**图 3.** 经验分布函数图

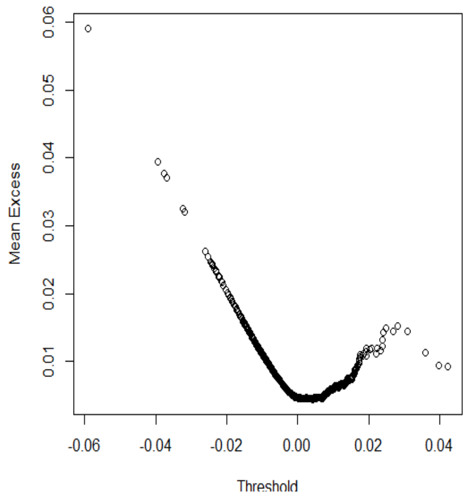


**Figure 4.** Simple average remaining figure
**图 4.** 简单均值剩余图

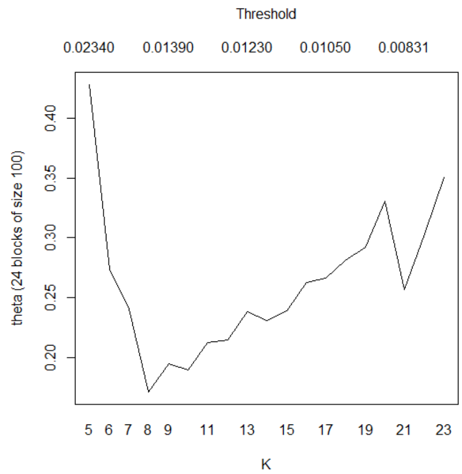


**Figure 5.** Estimate extreme value index
**图 5.** 估计极值指标

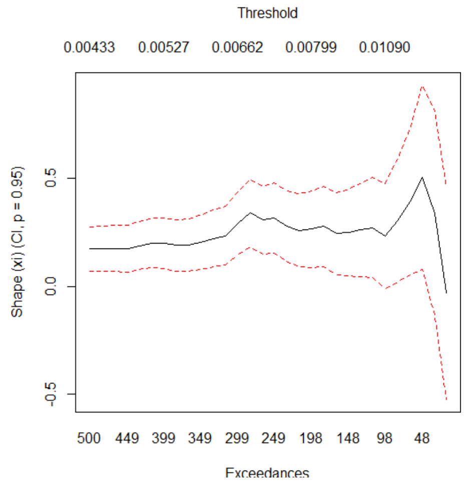


**Figure 6.** Parameters estimated GDP figure
**图 6.** 估计 GPD 参数图

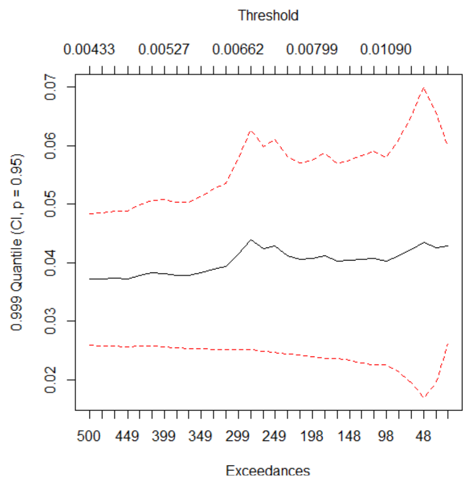


**Figure 7.** GDP higher median estimated figure
**图 7.** GPD 高分位数尾估计图

**Table 2.** Risk measurement
**表 2.** 风险度量值

| $\alpha$ | 0.01 | 0.025 | 0.05 |
|---|---|---|---|
| VaR | −0.021565 | −0.014882 | −0.011097 |
| CVaR | −0.027413 | −0.021647 | −0.017189 |

## 4. 总结

本文在研究超限分布为 GPD 分布时，利用极值理论并结合 R 语言，选择恒生股指 2390 个样本点作为研究的对象，之所以选择恒生股指，一是它从 1994 年至今能够反映股票的性质，二是其他学者大多数研究上证或沪深，而笔者又想知道其他的股票是不是也能试用。极值理论是描述经验分布尾部的一个工具，不需拟合整个序列的分布，其基础理论是基于次序统计量的渐近分布理论。金融市场的极端现象频繁发生，用极值理论分析金融市场的波动和度量其风险是一个发展必然趋势。分析数据是否存在尖峰厚尾现象，采用极值理论估计 CVaR 的值不需要对整体分布建模，仅需考虑对尾部的分析表达，计算出 CVaR 的值。这是极值方法的优势，如果用正态分布或者其他分布，那序列分布的尾部难以拟合的好，那对风险的评估就存在极大的误差。极值理论在尖峰厚尾情况下估计 CVaR 的优点，使得极值理论近年得到了广泛的应用，其在金融风险管理中的前景也是不可估量的。

## 参考文献 (References)


[1] Rockafellar, T. and Uryasev, S. (2000) Optimization of Conditional Value-at-Risk. *Jouranl of Risk*, **2**, 21-41.

[2] Andersson, F., Mausser, H., Rosen, D. and Uryasev, S. (2001) Credit Risk Optimization with Conditional Value-at-Risk Criterion. *Mathematical Programming*, **89**, 273-291. http://dx.doi.org/10.1007/PL00011399

[3] 陈剑利，李胜. CVaR 风险度量模型在投资组合中的运用[J]. 运筹与管理, 2004(1): 95-99.

[4] 曲圣宁，田新. 投资组合风险管理中的 VaR 模型的缺陷以及 CVaR 模型[J]. 统计与决策, 2005(10): 18-20.

[5] 霍玉琳，何春雄. 研究了 GARCH 模型下的极值一致风险度量[J]. 金融经济, 2006(2): 152-154.

[6] 余星，孙红果，陈国华. 基于 CVaR 的融入期权的投资组合模型[J]. 数学的实践与认识, 2014(1): 11-14.

[7] 黄鹂，魏岩. 基于 CVaR 模型投资组合保险的绩效实证[J]. 金融理论与实践, 2015(4): 98-103.

[8] Acerbi, C. and Tasche, D. (2002) On the Coherence of Expected Shortfall. *Journal of Banking and Finance*, **26**, 1487-1503. http://dx.doi.org/10.1016/S0378-4266(02)00283-2