Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(4), 312-317
Published Online July 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.64046

Hans汉斯

Existence of Multiple Solutions for Second Order Second-Point Boundary Value Problems of Dynamics Equation on Time Scale

Mengtian Zhao, Hongyu Li

School of Mathematics and Systems Science, Shandong University of Science and Technology, Qingdao Shandong
Email: 1650202192@qq.com

Received: Jul. 8th, 2016; accepted: Jul. 23rd, 2016; published: Jul. 28th, 2016

Abstract

In this paper, by using the fixed point theorems with lattice structure, we discuss the existence of multiple solutions for the following second-point boundary value problems of dynamics equation on a general time scale.

$$\begin{aligned} &-u^{\Delta\Delta}(t)+q(t)u^{\sigma}(t)=\lambda f\left(t,u^{\sigma}(t)\right), \quad t\in T,\\ &u(0)=u(1)=0, \end{aligned} \tag{1}$$

where $\lambda \in R$, Let T be a closed subset of the interval $[0,1]$, with $0,1\in T$, and the function $q:T\to R$ is continuous, with $q(t)\ge 0$. Combining the eigenvalues of the relevant linear operator, the existence of positive, negative and sign-changing solutions is obtained under the condition that the nonlinear term is sublinear.

Keywords

Time Scale, Sign-Changing Solution, Eigenvalue

测度链上动力方程两点边值问题多解的存在性

赵梦田，李红玉

文章引用: 赵梦田, 李红玉. 测度链上动力方程两点边值问题多解的存在性[J]. 理论数学, 2016, 6(4): 312-317.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.64046

山东科技大学数学与系统科学学院，山东 青岛
Email: 1650202192@qq.com

收稿日期：2016年7月8日；录用日期：2016年7月23日；发布日期：2016年7月28日

摘 要

利用格结构下的不动点定理，研究了一类测度链上动力方程的两点边值问题

$$\begin{cases} -u^{\Delta\Delta}(t)+q(t)u^{\sigma}(t)=\lambda f\left(t,u^{\sigma}(t)\right), \quad t\in T, \\ u(0)=u(1)=0, \end{cases} \tag{1}$$

其中，$\lambda\in R$，T是$[0,1]$上的闭集，$0,1\in T$。$q:T\to R$连续，且$q(t)\geq 0$。文中结合相应算子的特征值，在非线性项满足次线性条件下，得到此边值问题具有正解，负解和变号解。

关键词

测度链，变号解，特征值

1. 引言

测度链理论是由数学家 Hilger 提出的一新的分析理论，统一了离散分析与连续分析。测度链理论在昆虫种群模型、热传导、神经网络等方面有广泛应用。对于测度链上二阶动力方程边值问题正解存在性的研究，最早是由 Erbe 和 Peterson 于 1999 年最早开始研究，到目前已有许多成果出现，如文献[1] [2]，近年来，受到一些生态问题的影响，对微分方程变号解存在性问题的研究逐渐引起关注，如文献[3]-[5]，但是，目前还很少有研究测度链上边值问题变号解的存在性。

受文献[4]-[9]的启发，利用格结构下的不动点定理，研究了一类测度链上动力方程两点边值问题，我们先研究相应的线性算子的特征值的性质，在假设非线性项满足次线性条件下，得到边值问题(1)存在三个非平凡解：一个正解，一个负解和一个变号解。与文献[1] [2] [10]相比，本文采用的方法更新颖，所得的结论补充和改进了[1] [2] [10]中的结论。

2. 预备知识

设P是Banach空间E中的锥。E中的半序由锥P导出。若存在常数$N>0$，使得$\theta\leq x\leq y\Rightarrow\|x\|\leq N\|y\|$，则称$P$是正规锥。如果$P$含有内点，即$P$的内部$\operatorname{int}P\neq\varnothing$，则称$P$是体锥[9] [11]。

E在半序$\leq$下成为一个格，即对任意的$x,y\in E$，$\sup\{x,y\}$和$\inf\{x,y\}$都存在。对$x\in E$，$x^{+}=\sup\{x,\theta\}$，$x^{-}=\sup\{-x,\theta\}$，分别称为x的正部与负部，$|x|=x^{+}+x^{-}$称为是x的模[7] [9]。显然，$x^{+}\in P$，$x^{-}\in -P$，$|x|\in P$，$x=x^{+}+x^{-}$。

为了文中叙述方便，使用下列符号：$x_{+}=x^{+},x_{-}=-x^{-}$，于是，$x=x^{+}+x_{-}$，$|x|=x^{+}-x_{-}$。

下面给出文中需要的定义和引理。

定义 2.1： 定义算子$\sigma,\rho:T\to T$，

$$\sigma(t)=\inf\{s\in T:s>t\},\quad \rho(t)=\sup\{s\in T:s<t\},\quad t\in T,$$

且满足$\sigma(0)=0,\rho(1)=1$。

设 T 是 R 上的拓扑空间，$u:T\to R$。若对任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\subset T$ 使得

$$\left|u(\sigma(t))-u(s)-u^{\Delta}(t)(\sigma(t)-s)\right|\le\varepsilon\left|\sigma(t)-s\right|,\quad s\in N$$

则称 u 在 T 上可微，记作 $u^{\Delta}(\sigma(t))$，u 的二阶导记作 $u^{\Delta\Delta}(t)=\left(u^{\Delta}\right)^{\Delta}(t)$，$t\in T$。我们定义函数 $u^{\sigma}=u\circ\sigma$。

引理 2.1： 假设 $u,v:T\to\mathbb{R}$，$s,t\in T$ 则，

i) 若 u 在 t 点可微，则 u 在 t 点连续；

ii) 若 $\sigma(t)>t$，并且 u 在 t 点连续，则 u 在 t 点可微；

iii) 若 u,v 可微，则 uv 可微，且

$$(uv)^{\Delta}(t)=u^{\sigma}(t)v^{\Delta}(t)+u^{\Delta}(t)v(t);$$

iv) 若 u 是 T 上的连续函数，那么存在原函数 $U:T\to\mathbb{R}$，且；

$$\int_s^t u(\tau)\Delta\tau=U(t)-U(s)。$$

定义 2.2 [7] [9]**：** 设 $D\in E$，$A:D\to E$ 是一个非线性算子。如果存在 $y_0\in E$，使得 $Ax=Ax_{+}+Ax_{-}+y_0$，$\forall x\in E$，则称 A 是格结构下的拟可加算子。

引理 2.2 [7] [9]**：** 设 E 是 Banach 空间，P 是 E 中的正规体锥，$A:E\to E$ 全连续算子，并且是格结构下的拟可加算子。又设

i) 存在正有界线性算子 B_1，B_1 的谱半径 $r(B_1)<1$，以及 $u^{*}\in P,u_1\in P$ 使得

$$-u^{*}\le Ax\le B_1x+u_1,\forall x\in P;$$

ii) 存在正有界线性算子 B_2，B_2 的谱半径 $r(B_2)<1$，以及 $u_2\in P$ 使得

$$Ax\ge B_2x-u_2,\forall x\in(-P);$$

iii) $A\theta=\theta$，A 在 θ 的 Fre$\acute{c}$het 导数 A'_{θ} 存在，1 不是 A'_{θ} 的特征值，并且 A'_{θ} 的对应于区间 $(1,+\infty)$ 的所有特征值的代数重数和 β 是非零偶数，$A(P\setminus\{\theta\})\subset\operatorname{int}P$，$A(-P\setminus\{\theta\})\subset\operatorname{int}(-P)$。则算子 A 至少有三个非零不动点，其中至少有一个正不动点，一个负不动点和一个变号不动点。

3. 主要结果

令 $\phi(t),\psi(t)$ 是 $Lu(t)=0$ 的特解，并满足边值条件

$$\phi(0)=0,\quad \phi^{\Delta}(0)=1$$
$$\psi(1)=0,\quad \psi^{\Delta}(1)=1$$

引理 3.1： 存在常数 $d\ne0$ 使得 $d=\psi(t)\phi^{\Delta}(t)-\phi(t)\psi^{\Delta}(t),t\in T$。

证明：定义 $f(t)=\psi(t)\phi^{\Delta}(t)-\phi(t)\psi^{\Delta}(t)$，由引理 2.1 可知

$$f^{\Delta}(t)=\psi^{\sigma}(t)\phi^{\Delta\Delta}(t)+\psi^{\Delta}(t)\phi^{\Delta}(t)-\phi^{\sigma}(t)\psi^{\Delta\Delta}(t)-\phi^{\Delta}(t)\psi^{\Delta}(t)=0,$$

因此，$f(t)=d$。证毕。

令 $E=\{u\,|\,u:T\to\mathbb{R}\}$，具有范数 $\|u\|=\sup\{|u(t)|:t\in T\}$，可知，$E$ 是 Banach 空间。令 $P=\{u\in E\,|\,u(t)\ge0,t\in T\}$，则 P 是 E 的正规体锥，且 E 在 P 导出的半序 $\le$ 下成为一个格[4]-[6]。

对任意 $(t,s)\in T\times T$，令 $g(t,s)=\begin{cases}\dfrac{1}{d}\psi(t)\phi^{\sigma}(t), & t\ge\sigma(t),\\[2mm] \dfrac{1}{d}\phi(t)\psi^{\sigma}(t), & t\le s,\end{cases}$

定义算子

$$(Au)(t)=\int_0^1 g(t,s)f\left(s,u^\sigma(s)\right)\Delta s \tag{2}$$

$$(Ku)(t)=\int_0^1 g(t,s)u^\sigma(s)\Delta s \tag{3}$$

记 $\left(fu^\sigma\right)(t)=f\left(t,u^\sigma(t)\right),t\in T$，显然，$A=Kf$，边值问题(1)的解等价于算子 A 存在不动点。

引理 3.2 [10]：线性算子 K 的的特征值是

$$\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\cdots,\frac{1}{\lambda_n},\cdots,\quad 0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots\lambda_n<\cdots,\lambda_n\in\mathbb{R},$$

且线性算子 K 的所有正特征值的代数重数和为 1。

为了应用方便，在本文中假设下列条件成立。

(H_1)：$f:T\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续，$f(t,v)v>0,\forall t\in T,v\in\mathbb{R},v\neq 0$，且 $f(t,0)=0$；

(H_2)：$\lim\limits_{v\to 0}\dfrac{f(t,v)}{v}=\lambda,\forall t\in T$，$\lambda$ 满足 $\lambda_{2n_0}<\lambda<\lambda_{2n_0+1},\left(n_0\in\mathbb{N}\right)$，其中 $\lambda_{2n_0},\lambda_{2n_0+1}$ 按引理 3.1 定义；

(H_3)：存在 $\delta>0$，使得

$$\lim_{|v|\to+\infty}\frac{f(t,v)}{v}\leq\lambda_1-\delta,\forall t\in T,$$

其中 λ_1 按引理 3.1 定义。

引理 3.3：i) 算子 $A:E\to E$ 是全连续算子；

ii) 算子 $K:P\to P$ 是全连续算子；

iii) A 是格结构下的拟可加算子。

证明：由文献[5] [12]可得 i) ii)成立，由文献[7] [9]易得 iii)成立。

定理 3.1：设(H_1)，(H_2)，(H_3)成立，则边值问题(1)至少存在三个非平凡解，其中至少一个正解，一个负解和一个变号解。

证明：由(H_3)知，存在 $R>0$，使得

$$\frac{f(t,v)}{v}\leq\lambda_1-\frac{\delta}{2},\forall t\in T,|v|\geq R$$

从而有

$$f(t,v)\leq\left(\lambda_1-\frac{\delta}{2}\right)v+M,\forall t\in T,v\geq 0 \tag{4}$$

$$f(t,v)\geq\left(\lambda_1-\frac{\delta}{2}\right)v-M,\forall t\in T,v\leq 0 \tag{5}$$

其中，$M=\max\limits_{t\in T,|v|\leq R}|f(t,v)|>0$。记 $\widetilde{u^\sigma}(t)=M\int_0^1 g(t,s)\Delta s$，则 $\widetilde{u^\sigma}\in P$。令 $B=\left(\lambda_1-\dfrac{\delta}{2}\right)K$，由引理 3.3 可知，$B:T\to T$ 是正有界线性算子，由引理 3.2 及谱半径定义得，

$$r(K)=\sup_{\lambda\in\left\{\frac{1}{\lambda_n},n=1,2,\cdots\right\}}|\lambda|=\frac{1}{\lambda},$$

因此，$r(B)=\left(\lambda_1-\dfrac{\delta}{2}\right)r(K)=1-\dfrac{\delta}{2\lambda_1}<1$，由(4)式可知，对 $\forall u^\sigma\in P$，有

$$\begin{aligned}\left(Au^{\sigma}\right)(t)&=\int_0^1 g(t,s)\,f\left(s,u^{\sigma}(s)\right)\Delta s\\&\le\int_0^1 g(t,s)\left(\left(\lambda_1-\frac{\delta}{2}\right)u^{\sigma}(s)+M\right)\Delta s\\&\le\left(\lambda_1-\frac{\delta}{2}\right)\int_0^1 g(t,s)u^{\sigma}(s)\Delta s+M\int_0^1 g(t,s)\Delta s\\&=\left(\lambda_1-\frac{\delta}{2}\right)Ku^{\sigma}(t)+\widetilde{u^{\sigma}}(t)\\&=Bu^{\sigma}(t)+\widetilde{u^{\sigma}}(t)\end{aligned}\tag{6}$$

由(5)式知，对 $\forall p^{\sigma}\in(-P)$，有

$$\begin{aligned}\left(Ap^{\sigma}\right)(t)&=\int_0^1 g(t,s)\,f\left(s,p^{\sigma}(s)\right)\Delta s\\&\ge\int_0^1 g(t,s)\left(\left(\lambda_1-\frac{\delta}{2}\right)p^{\sigma}(s)-M\right)\Delta s\\&\ge\left(\lambda_1-\frac{\delta}{2}\right)\int_0^1 g(t,s)p^{\sigma}(s)\Delta s-M\int_0^1 g(t,s)\Delta s\\&=\left(\lambda_1-\frac{\delta}{2}\right)Ku^{\sigma}(t)-\widetilde{u^{\sigma}}(t)\\&=Bu^{\sigma}(t)-\widetilde{u^{\sigma}}(t)\end{aligned}\tag{7}$$

由(6)和(7)两式知，引理 2.2 中的(i)，(ii)成立。

由(H_1)中的 $f(t,0)=0$ 可以推出 $A\theta=\theta$。由(H_2)知，$\forall\varepsilon>0,\exists r>0$，使得

$$\left|f(t,v)-\lambda v\right|<\varepsilon v,\ \forall t\in T,\left|v\right|\le r,$$

则

$$\left|\left(fu^{\sigma}\right)(t)-\lambda u^{\sigma}(t)\right|=\left|f\left(t,u^{\sigma}(t)\right)-\lambda u^{\sigma}(t)\right|\le\varepsilon\left\|u\right\|,\forall\left\|u^{\sigma}\right\|\le r\text{。}$$

因此

$$\left\|Au^{\sigma}-A\theta-\lambda Ku^{\sigma}\right\|=\left\|K\left(fu^{\sigma}\right)-\lambda Ku^{\sigma}\right\|\le\varepsilon\left\|K\right\|\cdot\left\|u^{\sigma}\right\|,\forall\left\|u^{\sigma}\right\|\le r\text{。}$$

故

$$\lim_{\left\|u^{\sigma}\right\|\to0}\frac{\left\|Au^{\sigma}-A\theta-\lambda Ku^{\sigma}\right\|}{\left\|u^{\sigma}\right\|}=0,$$

即

$A_{\theta}'=\lambda K$。其中 K 是由(3)式定义的。由引理 3.2 可知 $\frac{1}{\lambda_n}$ 是线性算子 K 的特征值，则 A_{θ}' 的特征值为 $\frac{\lambda}{\lambda_n}$，因为 $\lambda_{2n_0}<\lambda<\lambda_{2n_0+1}$，从而 1 不是 A_{θ}' 的特征值。令 w 为 A_{θ}' 的对应于区间 $(1,+\infty)$ 的所有特征值的代数重数和，则 $w=2n_0$ 是偶数。

由于 $q(t)\ge0$，易得

$$\left(Ku^{\sigma}\right)(t)\ge0\tag{8}$$

由(8)式知，

$$K\left(P\setminus\{\theta\}\right)\subset\operatorname{int}P\tag{9}$$

由(H_1)知， $f(t,v)>0,\forall v>0; f(t,v)<0,\forall v<0$ 。因此，

$$f(P\setminus\{\theta\})\subset P\setminus\{\theta\},\quad f((-P)\setminus\{\theta\})\subset \operatorname{int}(-P) \tag{10}$$

从而由(9) (10)知

$$A(P\setminus\{\theta\})\subset \operatorname{int} P,\quad A(-P\setminus\{\theta\})\subset \operatorname{int}(-P)$$

于是引理 2.2 中的(iii)成立，由引理 2.2 可知，边值问题(1)至少存在三个非平凡解，其中至少一个正解，一个负解和一个变号解。

参考文献 (References)

[1] Agarwal, R.P. and Regan, D.O. (2001) Nonlinear Boundary Value Problems on Time Scale. *Nonlinear Analysis*, **44**, 527-535. http://dx.doi.org/10.1016/S0362-546X(99)00290-4

[2] Avery, R.I. and Anderson, D.R. (2002) Existence of Three Positive Solutions to a Second Order BVP on a Measure Chain. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **141**, 65-73. http://dx.doi.org/10.1016/S0377-0427(01)00436-8

[3] Zhang, K.M. and Sun, J.X. (2003) Existence of Sign-Changing Solutions for Nonlinear Operator Equations and Its Applitions. *Acta Mathemathca Scientica*, **46**, 4 (in Chinese).

[4] Xu, X. and Sun, J.X. (2004) Onsign-Changing Solution for Some Three-Point Boundary Value Problem. *Nonlinear Analysis*, **59**, 491-505. http://dx.doi.org/10.1016/S0362-546X(04)00270-6

[5] 崔玉军，邹玉梅，李红玉. 非线性算子方程的变号解及其应用[J]. 系统科学与数学, 2009, 29(8): 1094-1101.

[6] Liu, X.Y. and Sun, J.X. (2009) Computation of Topological Degree of Unilaterally Asymptotically Linear Operators and Its Applications. *Nonlinear Analysis*, **71**, 96-106. http://dx.doi.org/10.1016/j.na.2008.10.032

[7] Sun, J.X. and Liu, X.Y. (2008) Computation of Topological Degree for Nonlinear Operators and Applications. *Nonlinear Analysis*, **69**, 4121-4130. http://dx.doi.org/10.1016/j.na.2007.10.042

[8] Li, H.Y. (2014) Existence of Nontrivial Solutions for Unilaterally Asymptotically Linear Three-Point Boundary Value Problems. *Abstract and Applied Analysis*, **2014**, Article ID: 263042.

[9] 孙经先. 非线性泛函分析及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[10] Davidson, F.A. and Rynne, B.P. (2002) Global Bifurcation on Time Scale. *Mathematical Analysis and Applications*, **267**, 345-360. http://dx.doi.org/10.1006/jmaa.2001.7780

[11] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 第 2 版. 济南: 山东科学技术出版社, 2001.

[12] Zhang, G.W. and Sun, J.X. (2004) Positive Solutions of m-Point Boundary Value Problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **291**, 406-418. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2003.11.034