Pure Mathematics 理论数学, 2017, 7(5), 373-377
Published Online September 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2017.75048

New Criterion for Classification of Quadratic Curves

Lina Guan, Lihua Cao

School of Mathematics and Statistics, Shenzhen University, Shenzhen Guangdong
Email: linaguan1992@163.com

Received: Aug. 12th, 2017; accepted: Aug. 27th, 2017; published: Sep. 1st, 2017

Abstract

By virtue of Vieta theorem (or relationship between root and coefficient), we introduce the α-cut function, α-domain and α-discriminant of the quadratic curve, and then use them to give a new criterion to make the classification of general quadratic curves. Different from the classical method, this method does not depend on the concepts of rotation transformation, matrix, invariant, and the semi invariant. It only relies on the primary properties of α-cut function.

Keywords

Quadratic Curve, α-Cut Function, α-Domain and α-Discriminant

二次曲线分类新准则

关丽娜，曹丽华

深圳大学数学与统计学院，广东 深圳
Email: linaguan1992@163.com

收稿日期：2017年8月12日；录用日期：2017年8月27日；发布日期：2017年9月1日

摘　要

利用韦达定理(根与系数关系)引入一般二次曲线的α-割函数，α-定义域，以及α-判别式，并且利用它们给出了一般二次曲线分类新准则。与传统方法不同，此方法不依赖于旋转变换，矩阵，不变量和半不变量等概念，只依赖于α-割函数的简单性质。

文章引用：关丽娜, 曹丽华. 二次曲线分类新准则[J]. 理论数学, 2017, 7(5): 373-377.
DOI: 10.12677/pm.2017.75048

关键词

二次曲线，α-割函数，α-定义域，α-判别式

1. 引言

设二次曲线Γ的方程为$A_1x^2+B_1y^2+C_1xy+D_1x+E_1y+F_1=0$，其中$A_1,B_1,C_1,D_1,E_1,F_1\in R$且$A_1^2+B_1^2+C_1^2\neq 0$。对于曲线$\Gamma$的分类，是解析几何课程的一个重要内容。许多经典的国内解析几何教材都是采用旋转变换和不变量法对Γ进行分类。然而这些方法都涉及到矩阵、旋转变换、不变量和半不变量的概念，见文献[1]-[15]。此外，全国范围来看解析几何课程几乎都是放在大一学的。这些旋转变换、不变量与半不变量的概念对于大一新生来说显得很陌生。因此学生用这些方法掌握曲线Γ的分类显得十分吃力。为了使大一新生便于掌握曲线Γ的分类方法，我们需要在大一新生已有基础上建立起关于曲线Γ的新分类准则。因此，我们以高中生熟知的韦达定理(在高中数学中，韦达定理和根与系数的关系是一回事，因此接下来的讨论中，我们只提韦达定理这个名字)为基础，得到了关于曲线Γ的α-割函数，α-定义域，α-判别式。我们以α-割函数，α-定义域，α-判别式为工具，以几何直观为辅、代数证明为主，得到了曲线Γ的另外一种分类方法。它不依赖矩阵、旋转变换、不变量和半不变量等概念，只依赖于二次函数的简单性质。为了行文的方便，我们将文献[1]中的关于曲线Γ的分类方法给出(教材[1]-[15]对曲线Γ的分类方法本质上是一致的，因此我们只需讨论文献[1]中的方法即可)，且将其记为定理A。为了完整叙述定理A，我们先约定一些记号。

记$I_1=A_1+B_1$，$I_2=A_1B_1-\dfrac{C_1^2}{4}$，$I_3=\begin{vmatrix} A_1 & \frac{C_1}{2} & \frac{D_1}{2} \\ \frac{C_1}{2} & B_1 & \frac{E_1}{2} \\ \frac{D_1}{2} & \frac{E_1}{2} & F_1 \end{vmatrix}$，$K_1=(A_1+B_1)F_1-\dfrac{D_1^2+E_1^2}{4}$。则由文献[1]，我们有

定理A [1] 若(1) $I_2>0$，且$I_1I_3<0$，则Γ为椭圆；(2) $I_2>0$，且$I_1I_3>0$，则Γ为空集；(3) $I_2>0$，且$I_3=0$，则Γ为一点；(4) $I_2<0$，且$I_3\neq 0$，则Γ为双曲线；(5) $I_2<0$，且$I_3=0$，则Γ为两条相交直线；(6) $I_2=0$，且$I_3\neq 0$，则Γ为抛物线；(7) $I_2=0$，且$I_3=0$，且$K_1<0$，则Γ为一对平行线；(8) $I_2=0$，且$I_3=0$，且$K_1=0$，则Γ为一条直线；(9) $I_2=0$，且$I_3=0$，且$K_1>0$，则Γ为空集。

2. 主要结果

接下来我们将给出曲线Γ分类的新准则。由于A_1,B_1,C_1不同时为零，因此不妨设$B_1\neq 0$。考虑直线$l_\alpha: x=\alpha$，设直线l_α与Γ相交于M,N两点，令$f(\alpha)=MN$，由韦达定理，我们有如下的定理1:

定理1 设直线$l_\alpha: x=\alpha$与Γ相交于M,N两点，记$f(\alpha)=MN$，则有

$$f(\alpha)=\frac{\sqrt{\left(C_1^2-4A_1B_1\right)\alpha^2+2\left(C_1E_1-2B_1D_1\right)\alpha+E_1^2-4B_1F_1}}{|B_1|}.$$

证明 设 M,N 两点坐标分别为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，联立

$$\begin{cases} x=\alpha, \\ A_1x^2+B_1y^2+C_1xy+D_1x+E_1y+F_1=0. \end{cases}$$

消去 x 并且整理可得 $B_1y^2+(C_1\alpha+E_1)y+A_1\alpha^2+D_1\alpha+F_1=0$。由韦达定理可得，

$$\begin{cases} y_1+y_2=-\dfrac{C_1\alpha+E_1}{B_1}, \\ y_1y_2=\dfrac{A_1\alpha^2+D_1\alpha+F_1}{B_1}. \end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned} f(\alpha)&=|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2} \\ &=\sqrt{\left(-\frac{C_1\alpha+E_1}{B_1}\right)^2-4\frac{A_1\alpha^2+D_1\alpha+F_1}{B_1}} \\ &=\frac{\sqrt{(C_1^2-4A_1B_1)\alpha^2+2(C_1E_1-2B_1D_1)\alpha+E_1^2-4B_1F_1}}{|B_1|}. \end{aligned}$$

证毕。

评注：由于 A_1,B_1,C_1 不同时为零，因此我们亦可用同样方式对 $A_1\neq 0$ 的情形进行讨论。另外，若 A_1,B_1 同时为零，则此时必有 $C_1\neq 0$。此时的曲线 Γ 只能是双曲线，因此我们不对这种情形作细致讨论。

为了得到曲线 Γ 的分类新准则，我们需要引入一些与曲线 Γ 相关的概念。记 $D(\alpha)=\left\{\alpha:(C_1^2-4A_1B_1)\alpha^2+2(C_1E_1-2B_1D_1)\alpha+E_1^{\ 2}-4B_1F_1\geq 0\right\}$。设 $\#(D(\alpha))$ 表示 $D(\alpha)$ 的元素个数；记 $\Delta(\alpha)=(C_1E_1-2B_1D_1)^2-(E_1^2-4B_1F_1)(C_1^2-4A_1B_1)$。我们称 $f(\alpha)$ 为 Γ 的 α-割函数；称 $D(\alpha)$ 为 $f(\alpha)$ 的 α-定义域；$\Delta(\alpha)$ 称为 $f(\alpha)$ 的 α-判别式。

显然，$f(\alpha)$ 刻画了直线 l_α 与 Γ 相交所成的弦长公式依赖于 α 的变化规律。从 $f(\alpha)$ 的表达式可以看出，若 $C_1^2-4A_1B_1=0$，且 $C_1E_1-2B_1D_1\neq 0$ 时，$f(\alpha)$ 是一次函数与幂函数 $\sqrt{x}$ 的复合；若 $C_1^2-4A_1B_1\neq 0$，则 $f(\alpha)$ 是一个一元二次函数与幂函数 $\sqrt{x}$ 的复合；若 $C_1^2-4A_1B_1=C_1E_1-2B_1D_1=0$，且 $E_1^2-4B_1F_1>0$，则 $f(\alpha)$ 是一个常数函数。对于 $D(\alpha)$，它也有明显的几何意义，它表示 Γ 在 x 轴的投影的像的范围。而 $\Delta(\alpha)$ 在代数上刻画了 $D(\alpha)$ 的解的情况。由函数 $f(\alpha)$ 的简单性质，及 $D(\alpha)$，$\Delta(\alpha)$ 简单性质，我们可以大概判断 Γ 的形状。比如：若 $\#(D(\alpha))=0$，则 l_α 与曲线 Γ 没有交集，说明了此时的 Γ 是一个空集；若 $\#(D(\alpha))=1$，则说明了 l_α 与曲线 Γ 只有一个交点，这说明了曲线 Γ 是一个单点集。

对于 $\#(D(\alpha))>1$ 的情形比较复杂，但是我们依旧可以以简单的几何直观为辅、代数证明为主，建立此时的分类情形。比如此时若有 $\Delta(\alpha)=0$，则函数 $f(\alpha)$ 具有以下的形式：

$$f(\alpha)=|P'\alpha+Q'|,$$

其中 P',Q' 由 A_1,B_1,C_1,D_1,E_1,F_1 所决定。此时由 $f(\alpha)$ 表达式可以看出它的图像是一条折线，因此此时的 Γ 是双直线。

以上分析的情形是对于 $\Delta(\alpha)\leq 0$ 来说的。若 $\Delta(\alpha)>0$，则对于 $C_1^2-4A_1B_1$ 的符号，它有三种情形：$C_1^2-4A_1B_1>0$，$C_1^2-4A_1B_1=0$，$C_1^2-4A_1B_1<0$。若 $C_1^2-4A_1B_1>0$，则此时函数 $f(\alpha)$ 在 $D(\alpha)$ 上从左往右先减后增，再以几何直观为辅助，可以断定此时的曲线 Γ 是一个双曲线。对于 $C_1^2-4A_1B_1=0$，

$C_1^2-4A_1B_1<0$ 的讨论方法类似。

总结以上的分析，我们有以下的定理 2：

定理 2 设 $B_1\neq 0$，则若 $\#(D(\alpha))=0$，则 Γ 为空集；若 $\#(D(\alpha))=1$，则 Γ 为单点集；若 $\#(D(\alpha))>1$，我们有以下两种情形：

1)：若 $\Delta(\alpha)=0$，则 Γ 为双直线(单直线看作两条重合的直线)；

2)：若 $\Delta(\alpha)>0$，则 $\begin{cases} C_1^2-4A_1B_1<0,\Gamma\text{为椭圆;}\\ C_1^2-4A_1B_1=0,\Gamma\text{为抛物线;}\\ C_1^2-4A_1B_1>0,\Gamma\text{为双曲线.}\end{cases}$

以下我们证明定理 2 与定理 A 是等价的，从而证明了定理 2。但是从上述分析可知，我们得到的定理所用到的工具都很初等，只需要到高中数学的韦达定理和二次函数的性质即可。刚上大一的新生对韦达定理的应用是比较熟悉的，因为高考中的圆锥曲线对韦达定理是作要求的。因此，定理 2 的方法是在大一新生所具有的基础上所建立的，所以大一新生接受它们比较容易和自然。

证明 若 $\#(D(\alpha))=0$，此时我们证明它与定理 A 中的(2)，(9)是等价的。这是因为若 $\#(D(\alpha))=0$，则它等价于对于所有的 $\alpha\in R$，不等式

$$\left(C_1^2-4A_1B_1\right)\alpha^2+2\left(C_1E_1-2B_1D_1\right)\alpha+E_1^2-4B_1F_1<0 \tag{$*$}$$

恒成立。这有两种情况：$C_1^2-4A_1B_1=0$ 与 $C_1^2-4A_1B_1\neq 0$。

若 $C_1^2-4A_1B_1\neq 0$，则由(*)可知，必有 $C_1^2-4A_1B_1<0$，即 $I_2>0$，且有 $\Delta(\alpha)<0$。简单计算表明

$$\Delta(\alpha)=-4B_1I_3. \tag{$**$}$$

另外 $4A_1B_1>C_1^2\geq 0$，因此 A_1,B_1 同号。故 B_1 与 $I_1=A_1+B_1$ 同号。因此 $\Delta(\alpha)<0\Leftrightarrow I_1I_3>0$。这就证明了它与(2)是等价的。

若 $C_1^2-4A_1B_1=0$，则由于不等式(*)对于 $\alpha\in R$ 都成立，因此必有 $C_1E_1-2B_1D_1=0$，否则 $2(C_1E_1-2B_1D_1)\alpha+E_1{}^2-4B_1F_1<0$ 的解是一个区间，这与 $\#(D(\alpha))=0$ 矛盾，因此有 $C_1E_1-2B_1D_1=0$。联立

$$\begin{cases} C_1^2-4A_1B_1=0,\\ C_1E_1-2B_1D_1=0.\end{cases} \tag{$***$}$$

若 $A_1=0$，则必有 $C_1=D_1=0$。此时(*)变为 $E_1^2-4B_1F_1<0$；另外一方面，此时 $K_1=B_1F_1-\dfrac{E_1^2}{4}$；因此 $E_1^2-4B_1F_1<0\Leftrightarrow K_1>0$。

若 $A_1\neq 0$。若 $E_1=0$，则必有 $D_1=0$。此时(*)变为 $-4B_1F_1<0$，即 $-4I_1F_1<0$。另外，此时 $K_1=I_1F_1$。故 $-4I_1F_1<0\Leftrightarrow K_1>0$。若 $E_1\neq 0$，则必有 $D_1\neq 0$。此时由(***)可得 $A_1=\dfrac{C_1D_1}{2E_1}$，$B_1=\dfrac{C_1E_1}{2D_1}$，且有 $\Delta(\alpha)=0$，故由(**)知 $I_3=0$。另外，由于 $E_1^2-4B_1F_1<0$，所以 $\dfrac{4B_1F_1}{E_1^2}>1\Leftrightarrow\dfrac{4C_1F_1}{D_1E_1}>1$。因此，

$\dfrac{4B_1F_1}{E_1{}^2}>1\Leftrightarrow F_1\cdot\dfrac{C_1}{2}\left(\dfrac{D_1}{E_1}+\dfrac{E_1}{D_1}\right)>\dfrac{D_1^2+E_1^2}{4}$，即

$\dfrac{4B_1F_1}{E_1^2}>1\Leftrightarrow F_1\cdot\left(A_1+B_1\right)>\dfrac{D_1^2+E_1^2}{4}$。从而，$E_1^2-4B_1F_1<0\Leftrightarrow K_1>0$。这就证明了 $\#(D(\alpha))=0$ 与定理 A 的(2)，(9)是等价的。

接着我们证明 $\#(D(\alpha))=1$ 与定理 A 中的(3)是等价的。这是因为若 $\#(D(\alpha))=1$，则不等式(*)只有一

DOI: 10.12677/pm.2017.75048

个解。那么它必为 $-X^2 \ge 0$ 的形式。因此必有 $C_1^2 - 4A_1B_1 < 0$，且 $\Delta(\alpha) = 0$。由(*)可知，这等价于 $I_2 > 0, I_3 = 0$。因此此时 $\#(D(\alpha)) = 1$ 与(3)是等价的。

最后我们证明 $\#(D(\alpha)) > 1$，它与(1)，(4)，(5)，(6)，(7)，(8)是等价的。以下我们分情况进行讨论。

情形 **1**：若 $C_1^2 - 4A_1B_1 = 0$，即 $I_2 = 0$ 时。由于 $\#(D(\alpha)) > 1$，故此时方程(*)必有解，且变为 $2(C_1E_1 - 2B_1D_1)\alpha + E_1^2 - 4B_1F_1 \ge 0$。此时若 $\Delta(\alpha) = 0$，则必有 $C_1E_1 - 2B_1D_1 = 0$，且有 $E_1^2 - 4B_1F_1 \ge 0$。类似于 $\#(D(\alpha)) = 0$ 的讨论，它与(7)，(8)是等价的。若 $\Delta(\alpha) \ne 0$，则由(**)可知 $I_3 \ne 0$，这与(6)是等价的。

情形 **2**：若 $C_1^2 - 4A_1B_1 > 0$，即 $I_2 < 0$，此时必有 $\#(D(\alpha)) > 1$。若 $\Delta(\alpha) = 0$，则由(**)可知 $I_3 = 0$，此时它与(5)等价；若 $\Delta(\alpha) \ne 0$，则由(**)知 $I_3 \ne 0$，这与(4)等价。

情形 **3**：若 $C_1^2 - 4A_1B_1 < 0$，即 $I_2 > 0$。此时由 $\#(D(\alpha)) > 1$ 可得 $\Delta(\alpha) > 0$。由(**)可知，这等价于 $I_1I_3 < 0$，它与(1)是等价的。综上所述，定理 2 的证明已经完成。

参考文献 (References)

[1] 尤承业. 解析几何[M]. 北京: 北京大学出版社, 2004: 136-139, 142-153.

[2] 杨存斌, 孙永苇. 解析几何[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1987: 42-43, 52-65.

[3] 吴光磊, 丁石孙, 姜伯驹, 田畴. 解析几何[M]. 北京: 人民教育出版社, 1962: 109-129.

[4] 刘增贤, 王汇淳. 解析几何[M]. 北京: 中央广播电视大学出版社, 1984: 150-161.

[5] 丘维声. 解析几何[M]. 北京: 北京大学出版社, 1988: 150-160, 161-171.

[6] 陈抚良, 张振兰. 解析几何[M]. 北京: 科学出版社, 2005: 214-223, 225-239.

[7] 谢敬然, 柯媛元. 空间解析几何[M]. 北京: 高等教育出版社, 2013: 141-155.

[8] 杨文茂, 李全英. 空间解析几何[M]. 第 2 版. 武汉: 武汉大学出版社, 2006: 148-160.

[9] 朱鼎勋, 陈绍菱. 空间解析几何[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1984: 232-256.

[10] 孙步青, 华宣积, 忻云龙, 张国栋. 空间解析几何[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1984: 145-152.

[11] 廖华奎, 王宝富. 解析几何教程[M]. 北京: 科学技术出版社, 2007: 80-86.

[12] 周建伟. 解析几何[M]. 北京: 高等教育出版社, 2005: 147-163.

[13] 吕杰, 陈奇斌, 李健全, 余海波. 解析几何[M]. 北京: 科学技术出版社, 2009: 113-130.

[14] 方德植. 解析几何[M]. 北京; 高等教育出版社, 1986: 61-65, 79-89.

[15] 吕林根, 许子道. 解析几何[M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2006: 213-243.