Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(1), 41-46
Published Online January 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.81007

A Description of the Teichmüller Equivalent Quasi-Conformal Mapping Class on the Compact Solenoid

Fei Song

School of Mathematic and System Science, Beihang University, Beijing
Email: songfei19860810@163.com

Received: Jan. 1st, 2018; accepted: Jan. 17th, 2018; published: Jan. 24th, 2018

Abstract

Let S_G be the compact solenoid. In the present article, we give a representation of the Teichmúller space of S_G in the sense of being marked. Moreover, we give the description of the Teichmüller equivalence of quasi-conformal maps in the universal covering space of S_G. We prove that two quasi-conformal maps have common value in the limit set if and only if they are Teichmüller equivalent.

Keywords

Compact Solenoid, Teichmüller Space, Quasi-Conformal Mapping, Universal Covering

紧线体上拟共形映射Teichmüller等价类的一个刻画

宋　飞

北京航空航天大学数学与系统科学学院，北京
Email: songfei19860810@163.com

收稿日期：2018年1月1日；录用日期：2018年1月17日；发布日期：2018年1月24日

摘　要

本文讨论了紧线体 S_G 的Teichmüller空间在标记紧线体意义下的表示，并且给出了两个拟共形映射

文章引用: 宋飞. 紧线体上拟共形映射 Teichmüller 等价类的一个刻画[J]. 理论数学, 2018, 8(1): 41-46.
DOI: 10.12677/pm.2018.81007

Teichmüller等价在其万有覆盖的极限集中的一个刻画，我们证明了两个拟共形映射具有相同的极限集映射值当且仅当它们是Teichmüller等价的。

关键词

紧线体，Teichmüller空间，拟共形映射，万有覆盖

1. 引言

在[1]中，Sullivan 引入了紧线体 S 的概念，S 可以看成是 Cantor 集多个相关的紧黎曼曲面的笛卡尔乘积组成的拓扑空间。Sullivan 同时定义了 S 的复结构，并且讨论了它对应的 Teichmüller 空间理论。Sullivan 首先注意到了紧线体的 Teichmüller 空间理论与一个较为经典的猜想：即 Ehrenpreis 猜想非常相关。这个猜想是指对任何两个给定紧双曲黎曼曲面，以及任意给定的 $\varepsilon>0$，都存在各自的非分歧，有限层全纯提升，使得提升后的曲面之间是 $1+\varepsilon$-拟共形相依的[2]。由于双曲型黎曼曲面的万有覆盖均为单位圆盘，所以该问题可以转化为：是否对任何紧致双曲型黎曼曲面，它的有限层，非分歧全纯覆盖都可以逼近其万有覆盖。

Saric [3]对紧线体 Teichmüller 空间，即 T(S)的形变理论进行了非常系统的研究。他研究了紧线体 Fuchsian 群作用意义下的表示：

$$S_G = D\times\hat{G}/G$$

并且在这个表示下讨论了 $T(S_G)$ 的相关性质，他同时定义了 S_G 上的全纯二次微分空间和 Beltrami 系数组成的 Banach 空间。Odden 证明了群表示意义下的紧线体与覆盖意义下的紧线体是同胚的[4]。如同黎曼曲面的 Teichmüller 空间，可以构造 $T(S_G)$ 的 Bers 嵌入映射，并且可以通过该映射得到 $T(S_G)$ 上的复 Banach 流形结构。Saric 也给出了 $T(S_G)$ 上的 Teichmüller 度量的定义，并且给出了 S 中点的极值映射的刻画。在[5]中，Saric 引入了 $T(S_G)$ 的上地震映射，并且由此得到了它的 Thurston 边界。Penner 和 Saric 定义了穿孔轮胎面的线体，并且讨论了该线体的 Teichmüller 理论[6]。

为了方便研究，Sullivan 给出了 S 上的一种特殊的复结构，即所谓的局部常数变换(TLC)复结构，并证明了这种复结构在紧线体的所有复结构中是稠密的[1]。另外一个研究紧线体 Teichmüller 理论的重要工具是所谓的叶。即紧线体 S 的道路连通分支，可以证明任何叶在 S 上都是稠密的[7]。Saric 将叶的概念用群表示进行了表述，并且说明了叶是单连通的[3]。

本文将考虑在 S_G 上的 Teichmüller 等价的拟共形映射在万有覆盖的极限集，即 $S^1\times\hat{G}$ 的一个刻画。为此我们给出了 $T(S_G)$ 一个标记意义下的定义。而本文主要定理的证明主要分为两个部分，首先我们将证明 Teichmüller 等价的标记紧线体满足诱导相等群同态的条件：

定理 1.1. 给定两个标记紧线体 $[\Omega_1,f],[\Omega_2,g]\in T(S_G)$，则有 $[\Omega_1,f]=[\Omega_2,g]$ 在 $T(S_G)$ 中成立当且仅

$$\theta_{\tilde{f}}=\theta_{\tilde{g}}.$$

之后，我们证明满足上述诱导相等群同态条件的拟共形映射具有相同的极限集映射值：

定理 1.2. 对任意两个拟共形映射 $f_j:S_G\to\Omega_j,(j=1,2)$，$\theta_{\tilde{f}_1}=\theta_{\tilde{f}_2}$ 当且仅当 $\tilde{f}_1\big|_{S^1\times\hat{G}}=\tilde{f}_2\big|_{S^2\times\hat{G}}$ 成立。

有了上述两个结论，直接可以看出 $T(S_G)$ 上两个拟共形映射是 **Teichmüller** 等价的当且仅当它们具有相同的极限集映射值。

2. 准备工作

这一节我们将要介绍一些重要的概念和基本定理，首先我们给出紧线体的两个形式不同的定义。细节部分可以参考[3]。

2.1. 紧线体的两种定义

设 (S_0,x_0) 是给定的双曲型紧黎曼曲面 S_0 和它上面的一个点 x_0 组成的二元组。考虑 S_0 的所有非分歧，有限阶且含有点对应的覆盖映射 $\Pi:(S_i,x_i)\to(S_0,x_0)$，且在同构意义下视为同一映射。由此我们可以得到一个二元组之间的偏序关系，即可以按照以下关系定义偏序关系：若存在非分歧，有限阶含有点对应的覆盖映射 $\Pi_{i,j}:(S_j,x_j)\to(S_i,x_i)$，使得 $\Pi_j=\Pi_i\circ\Pi_{i,j}$ 成立，则“≤”关系成立：

$$(\Pi_i,S_i,x_i)\le(\Pi_j,S_j,x_j).$$

不难得知任何两个覆盖映射：$\Pi_i:(S_i,x_i)\to(S_0,x_0)$ 以及 $\Pi_j:(S_j,x_j)\to(S_0,x_0)$，都存在覆盖映射 $\Pi_k:(S_k,x_k)\to(S_0,x_0)$ 使得

$$(\Pi_j,S_j,x_j),(\Pi_i,S_i,x_i)\le(\Pi_k,S_k,x_k).$$

成立，所以这种覆盖关系存在逆极限。(关于逆极限的概念，可以参考[9]。)定义紧线体

$$\lim_{\leftarrow}(S_i,x_i)$$

由上述过程不难看出，紧线体 S 与初始选取的二元组没有关系。另外，不难得知 $S\subset\Pi_{i\in I}S_i$，

其中 I 是覆盖的指标集合。由于每一个黎曼曲面 S_i 是紧的，可以看出 $\Pi_{i\in I}S_i$ 在 Tychonov 拓扑意义下是紧集，由定义可以知道 S 在 $\Pi_{i\in I}S_i$ 是闭的，所以 S 是紧的。且在局部上可以看成是小圆盘和 Cantor 集的笛卡尔乘积。称 S 的道路连通分支为叶，Sullivan [1]证明了所有紧线体上的叶都是稠密的。

有了紧线体的概念，就可以定义紧线体的复结构。S 上的光滑结构为一组坐标卡的覆盖，且满足参数转换函数限制在所有叶上是 C^∞ 微分同胚，且相对 Cantor 集方向在函数的 C^∞ 拓扑下是连续的。S 上的复结构，是 S 上光滑结构的子覆盖，使得参数转换函数限制在任意局部叶上都是全纯的，且相对 Cantor 集方向在函数的 C^∞ 拓扑下是连续的。另外，若给定一个双曲型闭黎曼曲面 S_i，都存在着由它生成的紧线体上的自然投影 $\Pi:S\to S_i$。通过该投影的拉回可以得到紧线体 S 任意叶上的复结构，不难看出这样得到的复结构相对 Cantor 集方向参数转换函数局部均为常数。我们称这样的复结构为 TLC 复结构[4]。Sullivan 证明了对于紧线体 S，TLC 复结构在所有紧线体的复结构中是稠密的[1]。

与此同时，Saric 给出了紧线体的一种群作用表示下的定义[3]。为了介绍这个概念，我们首先定义群 G 上的预有限度量。给定双曲型紧黎曼曲面 S_0，设 G 是 S_0 的基本群，则可以用如下方式可以定义 G 上的预有限度量：记 G_n 是 G 中所有阶数不超过 n 的子集合之交，可以看出 G_n 是阶数有限的。则 $\{G_n\}_{n\in N}$ 是 G 中的一个由其有限阶子群组成的下降序列。由于 G 是余有限的，可以得到 $\bigcap_{n\in N}G_n=\{id\}$。定义 $A,B\in G$ 之间的预有限度量为：

$$d_{pf}(A,B)=\mathrm{e}^{-1/n},$$

其中 $AB^{-1}\in G_n\setminus G_{n+1}$。可以证明 G 可以被这种度量完备化，记它的完备化后的集合为 $\hat{G}$。

设 D 为单位圆盘，考虑乘积空间 $D\times\hat{G}$，可以定义群 G 在该乘积空间的作用：任何 $A\in G$ 在 $D\times\hat{G}$ 上的作用定义为：

$$A(z,t)=\left(Az,zt^{-1}\right),\ \forall(z,t)\in D\times\hat{G}.$$

那么群 G 标记的紧线体为：

$$S_G=D\times\hat{G}/G.$$

Odden [4]证明了这两种不同定义下的紧线体是同胚的。同样地，在 S_G 上也有叶的概念。Saric 将对任意给定的 $t\in\hat{G}$，$D\times\{t\}$ 在 G 作用下的轨道定义为叶。可以验证 S_G 上的叶和 S 上的叶同胚。另外，S_G 上有从 $D\times\hat{G}$ 继承的商复结构，也可以定义 S_G 上的 TLC 复结构，细节可以参考[4]。

2.2. S_G 上的 Beltrami 系数，全纯二次微分和 Teichmüller 空间

下面介绍 S_G 上 Beltrami 系数和全纯二次微分的概念，他们主要定义方法和黎曼曲面的情况很类似，细节部分可以参考[3]。

定义 2.1. 称 μ 为 S_G 上的光滑 Beltrami 微分若 μ 在 S_G 的任意叶的限制为(−1,1)形式，且相对 Cantor 集方向是 C^∞ 连续的。若 μ 还满足 $\|\mu\|\le 1$，则称 μ 是 S_G 上的光滑 Beltrami 系数。称 ϕ 为 S_G 上的全纯二次微分，若 ϕ 在 S_G 的任意叶的限制为全纯二次微分，且相对 Cantor 集方向是 C^∞ 连续的。

为了方便，我们记 $M(S_G)$ 为 S_G 上 Beltrami 系数空间，记 $B(S_G)$ 为 S_G 上全纯二次微分空间。

与上述定义类似，可以给出 S_G 上拟共形映射的定义，共形映射的定义也可以直接得到：

定义 2.2. 称微分同胚 $f:S_G\to\Omega$ 是拟共形映射，若 f 限制在 S_G 的任意叶上为可微拟共形映射，相对 Cantor 集方向 C^1 映射的 C^1 拓扑是连续的，其中 Ω 是任意紧线体。特别地，称 f 是 K-拟共形映射，若 f 限制在所有叶上的拟共形常数的上确界为 K。当 $K=1$ 时，f 是 S_G 上的共形映射。

有了上面的几个概念，我们就可以引入紧线体 Teichmüller 空间(记为 $T(S_G)$)的定义了：

定义 2.3. 紧线体 S_G 的 Teichmüller 空间 $T(S_G)$ 定义为 S_G 上所有拟共形映射 Teichmüller 等价类的集合。称 f_1,f_2 是 S_G 上 Teichmüller 等价的拟共形映射，若存在两个像集之间的共形映射 c，使得 $f_2^{-1}\circ c\circ f_1$ 同伦于恒等映射。记 $[f]_T\in T(S_G)$ 为 S_G 上拟共形映射 f 的 Teichmüller 等价类。

事实上，类似于黎曼曲面的 Teichmüller 空间，紧线体的 Teichmüller 空间上有一个自然的度量，称为 Teichmüller 度量，定义为

$$d_T\left([f]_T,[g]_T\right)=\inf_{f\in[f]_T,g\in[g]_T}1/2\log K\left(f_1\circ g_1\right)$$

其中，$K(f)$ 是拟共形映射 f 限制在所有叶上的拟共形常数的上确界[4]。由于所有叶在 S_G 上都是稠密的，且拟共形映射 f 在 Cantor 集方向的 C^1 拓扑下连续，可知 f 限制在所有叶上的拟共形常数均为 K。

同样地，也可以用标记线体的方式定义 $T(S_G)$：给定两个拟共形映射 $f:S_G\to\Omega_1,g:S_G\to\Omega_2$。这样我们得到两个二元组 $(\Omega_1,f),(\Omega_2,g)$。称这两个二元组是 Teichmüller 等价的，若 $g\circ f^{-1}:\Omega_1\to\Omega_2$ 同伦于共形映射 $h:\Omega_1\to\Omega_2$。我们记 (Ω_1,f) 的 Teichmüller 等价类为 $[\Omega_1,f]$，则 $T(S_G)=\{[\Omega,f]\}$，其中 f 取遍 S_G 上所有拟共形映射。

3. 主要结果及其证明

考虑 S_G 的万有覆盖 $D\times\hat{G}$，则 $S^1\times\hat{G}$ 可以看成是 S_G 万有覆盖的边界。其中 S^1 为单位圆周。给定 f 为 S_G 上的拟共形映射，则存在 $\tilde{f}:D\times\hat{G}\to D\times\hat{G}$ 为 f 在万有覆盖上的提升，特别地，若要求对任意 $t\in\hat{G}$，

$\tilde{f}$ 保持 $i\times\{t\},\pm1\times\{t\}$ 不动，则称 $\tilde{f}:D\times\hat{G}\to D\times\hat{G}$ 为 f 的典范提升。

引理 3.1 对任何点 $\varsigma\in S^1\times\hat{G}$，都存在 G 中的序列 $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得对于任何点 $p\in D\times\hat{G}$，都有 $\{\gamma_n(P)\}_{n=1}^{\infty}$ 趋近于 ς。

证：设 ω 是 D 在 G 作用下的基本多变形。则称 $\omega\times\hat{G}$ 为 $D\times\hat{G}$ 在 G 作用下的基本多边形[4]，它的闭包 $\bar{\omega}\times\hat{G}$ 在 $D\times\hat{G}$ 上为紧集。由基本多边形的定义不难得知，可以选取 G 中的一组序列 $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\omega\times\hat{G}$ 上的一组点列 $\{p_n\}$，使得 $\{\gamma_n(P_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 趋近于 $\varsigma\in S^1\times\hat{G}$。由于 $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是正规族，故可以假设 $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $D\times\hat{G}$ 上内闭一致收敛到全纯映射 $\tilde{f}:D\times\hat{G}\to\varsigma$。由[8]中定理 2.18 可知 $\tilde{f}$ 为常值映射，且 $\tilde{f}$ 的值恒为 $\varsigma\in S^1\times\hat{G}$。

证毕!

为了引入本文的主要定理，还需要介绍一些基本符号：设 $\tilde{f}$ 是 S_G 上拟共形映射 f 在 $D\times\hat{G}$ 上的典范提升，给定同态映射：

$$\theta_{\tilde{f}}:G\to PSL(2,R),$$

$$\theta_{\tilde{f}}=\tilde{f}\circ\gamma\circ\tilde{f}^{-1},\ \ \forall\gamma\in G.$$

我们将用以下定理说明标记紧线体的等价类和拟共形映射诱导的群同态之间的关系：

定理 3.1 给定两个标记紧线体 $[\Omega_1,f],[\Omega_2,g]\in T(S_G)$，则有 $[\Omega_1,f]=[\Omega_2,g]$ 在 $T(S_G)$ 中成立当且仅当 $\theta_{\tilde{f}}=\theta_{\tilde{g}}$。

证：首先我们假设 $[\Omega_1,f]=[\Omega_2,g]$ 在 $T(S_G)$ 中成立。由定义不妨假设 $\Omega_1=\Omega_2$，且 f 同伦于 g。设 f 与 g 之间的同伦可以记为一个单参数同胚群 $\{\kappa_t\}_{1\le t\le 2}$，其中 $\kappa_1=f,\kappa_2=g$。不难得知 $\{\kappa_t\}_{1\le t\le 2}$ 可以被提升至 $D\times\hat{G}$。我们仅考虑一个叶上的情况，即设 $m\in\hat{G}$，考虑 $\{\kappa_t\}_{1\le t\le 2}$ 在 $D\times\{m\}$ 上的典范提升。可知该提升是唯一的，我们将之记为 $\{\tilde{\kappa}_{t_m}\}_{1\le t\le 2}$。且对任意 $m\in\hat{G}$，均有 $\tilde{\kappa}_1=\tilde{f}$，$\tilde{\kappa}_2=\tilde{g}$ 成立。

任意选取 $\gamma\in G$ 以及 $(z,m)\in D\times\hat{G}$。不妨考虑对固定的 $m\in\hat{G}$，该叶上的两条道路 $R_1=\{\tilde{\kappa}_t\circ\gamma(z)\}$ 和 $R_2=\left\{\tilde{f}\circ\gamma\circ\tilde{f}^{-1}(\tilde{\kappa}_t(z))\right\},t\in[1,2]$。显然 R_1 和 R_2 具有相同的起点，且在 Ω_1 上的投影均为 $\{\kappa_t\}_{1\le t\le 2}$。由道路提升定理，可知 $R_1=R_2$。特别地，两条道路终点重合。即：$\tilde{\kappa}_2\circ\gamma(z)=\tilde{f}\circ\gamma\circ\tilde{f}^{-1}(\tilde{\kappa}_2(z))$。由于在任意给定的叶上，z 是任意选取的，我们可以得到：

$$\tilde{\kappa}_2\circ\gamma\circ\tilde{\kappa}_2^{-1}=\theta_{\tilde{f}}(\gamma).$$

再由 γ 的任意性，且注意到 $\{\tilde{\kappa}_t\}_{1\le t\le 2}$ 均为典范提升，可知 $\tilde{\kappa}_2(0\times\{m\})=0\times\{m\}$。我们把所有的叶组合起来，就可以得到紧线体整体上满足 $\tilde{\kappa}_2(0\times\hat{G})=0\times\hat{G}$，此即 $\tilde{\kappa}_2$ 和 G 相容，且为 g 在 $D\times\hat{G}$ 上的典范提升，所以可以得到 $\theta_{\tilde{f}}=\theta_{\tilde{g}}$。

另一方面，若 $\theta_{\tilde{f}}=\theta_{\tilde{g}}=\theta$ 成立，则对任何 $\gamma\in G$ 都有以下等式成立：

$$\tilde{f}\circ\gamma=\theta(\gamma)\circ\tilde{f},\ \ \tilde{g}\circ\gamma=\theta(\gamma)\circ\tilde{g}.$$

固定 $\tilde{t}\in\hat{G}$。对任意 $n\in[0,1]$ 以及 $z\in D\times\hat{G}$，设 Γ_z 是连接 $\tilde{f}$ 和 $\tilde{g}$ 的双曲测地线。记 $\tilde{f}(z,n)$ 是分割 Γ_z 使之长度比为 $n:(1-n)$ 的点。将所有的 $\tilde{t}\in\hat{G}$ 合并，则可知 $\left\{\tilde{f}_n=\tilde{\kappa}_t(z,t-1)\right\}_{m\in[1,2]}$ 是 $\tilde{f}$ 和 $\tilde{g}$ 之间的同伦。且满足 $\tilde{f}_n\circ\gamma=\theta(\gamma)\circ\tilde{f}_n$。再将 $\tilde{f}_n$ 投影至 Ω_1 可得连续映射 f_n。由上述构造可以看出，f_n 就是 f 和 g 之间的同伦。

证毕!

接下来我们将讨论 S_G 上两个拟共形映射诱导的群同态和它们的边界值之间的关系。

定理 3.2 对任意两个拟共形映射 $f_j : S_G \to \Omega_j, (j=1,2)$，$\theta_{\tilde{f}_1} = \theta_{\tilde{f}_2}$ 当且仅当 $\tilde{f}_1\big|_{S^1\times\hat{G}} = \tilde{f}_2\big|_{S^2\times\hat{G}}$。

证明："$\Rightarrow$"假设 $\tilde{f}_1\big|_{S^1\times\hat{G}} = \tilde{f}_2\big|_{S^2\times\hat{G}}$。可知对任意 $\gamma \in G$ 且对任意固定的 $t \in \hat{G}$，都有 $\theta_{\tilde{f}_1}(\gamma)\big|_{S^1\times\{t\}} = \theta_{\tilde{f}_2}(\gamma)\big|_{S^1\times\{t\}}$，而 $\theta_{\tilde{f}_j}, (j=1,2)$ 均为 Möbious 变换，故可得：$\theta_{\tilde{f}_1} = \theta_{\tilde{f}_2}$。

"$\Leftarrow$"仍然设 $\theta_{\tilde{f}_1} = \theta_{\tilde{f}_2} = \theta$，选取 $z_0 \in D\times\hat{G}$。由引理 3.1 可知对任何 $\varsigma \in S^1\times\hat{G}$，均存在 G 中序列 $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n(z_0) = \varsigma$。另外，由引理 3.1 的证明过程可以看出 $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $D\times\hat{G}$ 中内闭一致收敛到常数 ς。由于 $\tilde{f}_j \circ \gamma_n(z_0) = \theta(\gamma_n)\circ\tilde{f}_j(z_0), (j=1,2)$。令 $n\to\infty$，我们可以得到 $\tilde{f}_1(\varsigma) = \tilde{f}_2(\varsigma)$。由于 ς 的任意性，可知 $\tilde{f}_1\big|_{S^1\times\hat{G}} = \tilde{f}_2\big|_{S^2\times\hat{G}}$。

证毕！

综上所述，我们证明了紧线体上两个拟共形映射是等价的当且仅当它们在万有覆盖的极限集上的值相同。

基金项目

国家自然科学基金资助(No. 11371045)。

参考文献 (References)

[1] Sullivan, D. (1993) Linking the Universallities of Milnor-Thurston. Feigenbaum and Ahlfors-Bers. In: Goldberg, L. and Phillips, A., Eds., *Topological Methods in Modern Mathematics*, Publish or Perish, Houston, 543-563.

[2] Ehrenpreis, L. (1970) Cohomology with Bounds. *Symposia Mathematics IV* (*INDAM*, *Rome*, 1968/69), Academic Press, London, 389-395.

[3] Saric, D. (2008) On Quasiconformal Deformations of the Universal Hyperbolic Solenoid. *Journal d'Analyse Mathematique*, **105**, 303-343. https://doi.org/10.1007/s11854-008-0038-0

[4] Odden, C. (2005) The Baseleaf Preserving Mapping Class Group of the Universal Hyperbolic Solenoid. Tran. *American Mathematical Society*, **357**, 1829-1858. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-04-03472-5

[5] Saric, D. (2007) Earthquakes and Thurston Boundary for the Teichmüller Space of the Universal Hyperbolic Solenoid. *Pacific Journal of Mathematics*, **233**, 205-228. https://doi.org/10.2140/pjm.2007.233.205

[6] Penner, R.C. and Saric, D. (2008) Teichmüller Theory of the Punctured Solenoid. *Geometriae Dedicata*, **132**, 179-212. https://doi.org/10.1007/s10711-007-9226-9

[7] Sullivan, D. (1992) Bounds Quadratic Differentials and Renormalization Conjectures. American Mathematical Society Centennial Publications, Vol. II, Amer. Math. Soc., Providence.

[8] Imayoshi, Y. and Taniguchi, M. (1992) An Introduction to Teichmüller spaces. Springer-Varlag, Tokyo, Berlin, Heidelberg, New York.

[9] MacLane, S. (1998) Categories for the Working Mathematician. 2nd Edition, Springer.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org