Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(1), 113-119
Published Online January 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.81014

Hans汉斯

The Inflations of Finite Cyclic Groups

Lan Du, Pinhong Long*

School of Mathematics and Statistics, Ningxia University, Yinchuan Ningxia
Email: *longph@nxu.edu.cn

Received: Jan. 9th, 2018; accepted: Jan. 24th, 2018; published: Jan. 31st, 2018

Abstract

In this paper, some properties of inflations of groups are given. Moreover, a necessary and sufficient condition for an inflation of a group to be a left Λ-semigroup is proved. Finally, we obtain the basic conclusions of finite cyclic groups.

Keywords

Finite Cyclic Group, Inflation of Group, Commutative Group

有限循环群的膨胀

杜　兰，龙品红*

宁夏大学数学统计学院，宁夏　银川
Email: *longph@nxu.edu.cn

收稿日期：2018年1月9日；录用日期：2018年1月24日；发布日期：2018年1月31日

摘　要

本文给出了群膨胀的一些性质，然后证明了群膨胀是左Λ-半群的一个充要条件。最后，给出了有限循环群膨胀的基本性质。

关键词

有限循环群，群的膨胀，交换半群

*通讯作者。

文章引用: 杜兰, 龙品红. 有限循环群的膨胀[J]. 理论数学, 2018, 8(1): 113-119.
DOI: 10.12677/pm.2018.81014

1. 引言

设 S 为一个半群，T 为 S 的子半群，Φ 为 S 到 T 的映射。如果对于任意 $t \in T$ 有 $\Phi(t)=t$，对于任意 $x,y \in S$ 有 $xy=\Phi(x)\Phi(y)$，那么称 S 为它的子半群 T 的膨胀，称 Φ 为 S 到 T 的膨胀映射。如果半群 S 是群 G 的膨胀，那么 S 一定是拟正则半群。若拟正则半群 S 的幂等元集合 E 为 S 的理想，则称 S 为 E-理想拟正则半群(见[1] [2])。

由对于半群 S，如果 S^2 有单位元，那么 S 是 S^2 的膨胀(见[3])。设 a,b 是半群 S 中的元素，如果 S 中的元素 x,y 使得 $ax=ya=b$，那么称 $a\,|\,b$ (见[4])。设 S 为半群，$f \in S$。若对任意 $a \in S$ 有 $faf=f$，则称 f 为 S 的强幂等元。设 S 为周期半群，若 S 的幂等元皆为强幂等元，则称 S 为强周期半群(见[5])。本文主要研究有限循环群膨胀的基本性质。为此，首先考虑半群的一些等价关系，然后给出了群膨胀的一些性质，并且证明群膨胀是左Λ-半群的一个充要条件。

设 S 是半群，$x \in S$，λ_x，ρ_x 表示 S 上的二元关系([6])：

$$\lambda_x=\{(a,b)\in S\times S \,|\, xa=xb\};$$

$$\rho_x=\{(a,b)\in S\times S \,|\, ax=bx\}.$$

下面我们定义半群上的等价关系。

定义 1.1. 设 S 是半群，$x \in S$，规定

$$\eta_x=\lambda_x\cap\rho_x;$$

$$\delta_x=\{(a,b)\in S\times S \,|\, xax=xbx\};$$

$$\alpha_x=\{(a,b)\in S\times S \,|\, axa=bxb\}.$$

引理 1.2. 设 S 是半群，$x \in S$，则 η_x，δ_x 和 α_x 都是 S 上的等价关系，并且 $\lambda_x\subseteq\delta_x$，$\rho_x\subseteq\delta_x$，$\eta_x\subseteq\delta_x$。

引理 1.3. 如果 S 是交换半群，$x \in S$，那么 $\lambda_x=\rho_x=\eta_x$，但是 $\lambda_x\neq\alpha_x$。

例 1.4. 令半群 $S=\{e,g,a\}$，则由乘法运算有

	e	e	a
e	e	g	g
g	g	e	e
a	g	e	e

则 λ_e-类 $=\rho_e$-类 $=\eta_e$-类 $=\{\{a,g\},\{a\}\}$。并且 $a\,|\,g$，$e\,|\,g$，$g\,|\,e$，$a\,|\,e$。

命题 1.5. 设 S 是半群，$a,b\in S$，如果 $(a,b)\in\lambda_a\cap\rho_b$，那么有

$$a^4=ab^2a=ba^2b=(ab)^2=(ba)^2=b^4.$$

证明由 $(a,b)\in\lambda_a\cap\rho_b$ 得 $a^2=ab=b^2$。于是

$$(ab)^2=(a^2)^2=a^4,$$

$$(ab)(ba) = ab^2a = aa^2a = a^4,$$

$$(ba)(ab) = ba^2b = bb^2b = (b^2)^2 = (a^2)^2 = a^4,$$

$$(ba)^2 = b(ab)a = bb^2a = b^2ba = a^2ba = a(aba) = aa^2a = a^4.$$

因此，$a^4 = ab^2a = ba^2b = (ab)^2 = (ba)^2 = b^4$。

命题 1.6.设 S 是半群，$x \in S$，$a,b \in S$。如果 $(a,b) = \lambda_x \cap \alpha_x$，那么有

$$(ax)^2 = axbx = bxax = (bx)^2.$$

证明如果 $(a,b) = \lambda_x \cap \alpha_x$，那么 $xa = xb$，$axa = bxb$。于是

$$axa = axb = bxa = bxb,$$

$$(ax)^2 = (axa)x = (axb)x = (ax)(bx)$$

同理，$(ax)^2 = (bx)(ax), (ax)^2 = (bx)^2$。

命题 1.7.设 S 是半群，e 是 S 的一个幂等元，$a,b \in S$，如果 $(a,b) \in \lambda_e$，那么

$$(ea)^2 = ebea = eaeb = (eb)^2, eab = eb^2, eba = ea^2.$$

证明根据 $(a,b) \in \lambda_e$，则 $ea = eb$。于是

$$(ea)^2 = ebea, (eb)^2 = eaeb = ebea = (ea)^2, eab = eb^2, eba = ea^2.$$

命题 1.8.设半群 S 只有一个幂等元 e，$a,b \in S$。如果 $ab = e$，那么 $bea = e$。

证明根据 $ab = e$，则

$$(bea)^2 = beabea = bea.$$

既然 S 只有一个幂等元 e，则 $bea = e$。

命题 1.9.设半群 S 只有一个幂等元 e，$a \in S$。则

$$a \mid e \Leftrightarrow e \in SaS.$$

证明先证必要性。如果 $a \mid e$，那么有 $x, y \in S$ 使得 $ax = ya = e$。则 $e \in SaS$。

再证明充分性。如果 $e \in SaS$，那么有 $s,t \in S$ 使得 $e = sat$。于是

$$(ates)^2 = ates, (tesa)^2 = tesa.$$

既然 S 只有一个幂等元 e，则 $e = sat$，$e = sat$。因此 $a \mid e$。

2. 群的膨胀

在本节中，将给出关于群膨胀的一些性质。

定理 2.1.设 S 为交换群 G 的膨胀，$a,b,x \in S$。如果 $(a,b) \in \lambda_x$，那么 $a^2 = ab = ba = b^2$。

证明由 S 为交换群 G 的膨胀，$a,b,x \in S$ 得 $x^2 \in G$。如果 $(a,b) \in \lambda_x$，那么 $xa = bx$。于是

$$x^2a^2 = x^2ab = x^2ba = x^2b^2.$$

因此 $a^2 = ab = ba = b^2$。

定理 2.2.设 S 为交换群 G 的膨胀，$a,b \in S$。如果 $a^4 = a^2b^2 = b^2a^2 = b^4$，那么 $a^2 = b^2$。

证明由 S 为交换群 G 的膨胀，$a,b \in S$ 得 $a^2, b^2 \in G$。于是 $a^2 \in Ga^4$，$b^2 \in b^4G$，故存在 $x, y \in S$ 使得

$a^2 = xa^4$， $b^2 = b^4 y$ 。由 $a^4 = a^2b^2 = b^2a^2 = b^4$ 得到 $a^2b^4 = a^2b^2b^2 = a^4b^2$ 。于是

$$a^2 = xa^4 = xa^2b^2 = \left(xa^2\right)b^2 = xa^2b^4y = xa^4b^2y = a^2b^2y = b^4y = b^2.$$

定理 2.3. 设 S 为交换群 G 的膨胀， $a,b,x \in S$ 。则 $(a,b) \in \delta_x$ 的充分必要条件是 $(a,b) \in \lambda_x \cap \rho_x$ 。

证明充分性显然。在此仅仅证明必要性。由 S 为交换群 G 的膨胀，得 $xax \in G$ 。如果 $(a,b) \in \delta_x$，那么 $xax = xbx$ 。于是 $ax = bx$， $xa = bx$ ，故 $(a,b) \in \lambda_x \cap \rho_x$ 。

定理 2.4. 设 S 为交换群 G 的膨胀， $a,b \in S$ 。如果 $(a,b) \in \lambda_a$， $ab = ba$， $(b,c) \in \lambda_b$， $bc = cb$，那么 $(a,c) \in \lambda_a$， $ac = ca$ 。

证明由 $(a,b) \in \lambda_a$， $ab = ba$， $(b,c) \in \lambda_b$， $bc = cb$ 得

$$a^2 = ab = ba,\ b^2 = bc = cb.$$

于是 $a^4 = \left(a^2\right)^2 = (ba)^2 = b^2a^2 = cba^2 = cbaa = ca^3$ 。

由 S 为交换群 G 的膨胀知 $a^2 \in G$，于是存在 $x \in G$ 使得 $a^2x = e$， $a^2 = a^4x$，其中 e 为 G 的单位元，所以

$$a^2 = a^4x = ca^3x = ca。$$

同理 $a^2 = ac$，即 $(a,c) \in \lambda_a$，并且 $ac = ca$ 。

定理 2.5. 设 S 为群 G 的膨胀，e 为 G 的单位元。如果 e 为 S 的强幂等元，那么 $G = \{e\}$，并且对 S 中的任意元素 s 有 $s^2 = es = se = e$ 。

证明设 g 是 G 中的任意元素由 e 为 S 的强幂等元得 $ege = e$，而 $ege = g$ 。故 $g = e$，即 $G = \{e\}$.

由 S 为群 G 的膨胀得 $s^2 \in G$， $es \in G$， $se \in G$，因此 $s^2 = es = se = e$ 。

推论 2.6. 设 S 为群 $\{e\}$ 的膨胀，那么 S 是强周期半群。

定理 2.7. 设 S 为群 G 的膨胀，e 为 G 的单位元。则对 S 中的任意元素 s 有 $s \mid e$ 。

定理 2.8. 设 S 为群 G 的膨胀，e 为 G 的单位元。如果 $(a,b) \in \lambda_e$，那么对 S 中的任意元素 s 有 $as = bs$， $sa = sb$ 。

定理 2.9. 设 $S = G \cup T\ (G \cap T = \varphi)$ 为群 G 的膨胀。则 S 是左 Λ 半群当且仅当对于 G 中单位元 e，λ_e 是 S 上的同余。

证明必要性显然成立。下面证明充分性。设 x,c 是 S 中的任意元素。若 $xa = xb$，由 S 为群 G 的膨胀得 $ea = eb$ 。由 λ_e 是 S 上的同余得 $eca = ecb$， $xeca = xecb$， $xca = xcb$ 。因此 λ_e 是同余。

3. 循环群膨胀的性质

如果 S 是群 G 的膨胀，e 是 G 的单位元，那么 e 是 S 的中心幂等元。交换群的膨胀是交换半群。特别地，循环群是交换群，循环群的膨胀也是交换半群，但是循环群的交并不一定是交换半群。

例 3.1. 令半群 $S = \{A,B,C\}$ 为 5×5 矩阵半群，其 $A = E_{11}$， $B = E_{11} + E_{12}$， $C = E_{11} + E_{12} + E_{35}$ （$A = E_{ij}$ 表示第 i 行第 j 列的元素 1，其余元素全部为零的 5×5 矩阵）。则由乘法运算有 S 的乘法表。

	A	B	C
A	A	B	B
B	A	B	B
C	A	B	B

则 S 不是交换半群。 $S = \{A\} \cup \{B,C\}$ 。 $\{B,C\}$ 是循环群 $\{B\}$ 的膨胀。

定理 3.2. 设 n 为正整数，半群 $S = G \cup \{a\}$，并且 $a \notin G$ 。G 是由 g 生成的 n 阶循环群，e 为 G 中单位

元，S 是 G 的膨胀。则对任意 $g^k \in G$，有 $g^k \mid e$， $a \mid e$。

证明因为 $e = gg^k g^{n-1-k}$，所以由命题 1.9 得 $g^k \mid e$。由 S 为群 G 的膨胀得 $a^2 \in G$。于是有 $g^l \in G$ 使得 $a^2 = g^l$，从而 $aag^{-1} = e$， $g^{-1}aa = e$。故 $a \mid e$。

定理 3.3. 设 n 为正整数，半群 $S = G \cup \{a\}$，并且 $a \notin G$。G 是由 g 生成的 n 阶循环群，e 为 G 中单位元。则下列条件等价：

i) S 是 G 的膨胀；

ii) $ea = ae \in G$， $a^2 \in G$；

iii) $S^2 = G$， $ea = ae$。

证明 i) $\Leftrightarrow$ ii) 因为 S 为循环群 G 的膨胀，所以存在 Φ 是 S 到 G 的膨胀映射。由 $e \in G$， $a \in G$ 得 $\Phi(e) = e$， $\Phi(a) \in G$， $ea \in G$， $a^2 \in G$。于是 $ea = eae$。同理 $ae = eae$。因此 $ea = ae$。

ii) $\Leftrightarrow$ iii) 显然。

iii) $\Leftrightarrow$ i) 由于 $S^2 = G$，所以 $a^2 \in G$。任取 $x \in G$，令 $\varphi(x) = ex$，则知 φ 是 S 到 G 的膨胀映射，即 S 是 G 的膨胀。

定理 3.4. 设 n 为正整数，半群 $S = G \cup \{a\}$，并且 $a \notin G$。G 是由 g 生成的 n 阶循环群，e 为 G 中单位元。如果有非负整数 k,l 使得 $ea = ae = g^k$， $a^2 = g^l$，那么 S 是 G 的膨胀，并且对于任意 $g^r \in G$ 有 $g^r a = ag^r = g^{r+k}$， $2k \equiv l \pmod{n}$，其中 $0 \le k \le n$， $0 \le l \le n$。

证明由 $ea = ae = g^k$ 得

$$g^r a = g^r ea = g^{r+k}, ag^r = aeg^r = g^{r+k}.$$

因此 $g^r a = ag^r$，即 S 为交换半群。由定理 3.3 得 S 是 G 的膨胀。由于 $a^2 = g^l$， $g^n = e$，所以 $ea^2 = g^l$，从而 $g^{2k} = g^l$， $2k \equiv l \pmod{n}$。

定理 3.5. 设 n 为正整数，半群 $S = G \cup \{a\}$，并且 $a \notin G$。G 是由 g 生成的 n 阶循环群，e 为 G 中单位元，S 是 G 的膨胀。则 λ_e 是 S 上的同余。

证明显然 λ_e 是 S 上的右同余。设 b,c 为 S 中元素，并且 $(b,c) \in \lambda_e$，d 是 S 中任意元素。则 $deb = dec$，$edeb = edec$。由 S 是 G 的膨胀得 $edb = edc$，故 $(db, dc) \in \lambda_e$，即 λ_e 是 S 上的左同余。因此，λ_e 是 S 上的同余。

设 n 为正整数，半群 $S = G \cup \{a\}$，并且 $a \notin G$。S 是 n 阶循环群 G 的膨胀。下面给出 $n = 1,2,3$ 时 G 的乘法表(表 1~6)。

Table 1. Multiplication table of semigroup $S = \{e\} \cup \{a\}$ when $n = 1$， $l = 1$ and $k = 1$

表 1. $n = 1$， $l = 1$ 和 $k = 1$ 时 $S = \{e\} \cup \{a\}$ 的乘法表

	e	a
e	e	e
a	e	e

Table 2. Multiplication table of semigroup $S = \{e, g\} \cup \{a\}$ when $n = 2$， $l = 2$ and $k = 1$

表 2. $n = 2$， $l = 2$， $k = 1$ 时半群 $S = \{e, g\} \cup \{a\}$ 的乘法表

	e	g	a
e	e	g	g
g	g	e	e
a	g	e	e

Table 3. Multiplication table of semigroup $S=\{e,g\}\cup\{a\}$ when $n=2$, $l=2$ and $k=2$

表 3. $n=2$， $l=2$ 和 $k=2$ 时半群 $S=\{e,g\}\cup\{a\}$ 的乘法表

	e	g	a
e	e	g	e
g	g	e	g
a	e	g	e

Table 4. Multiplication table of semigroup $S=\{e,g,g^2\}\cup\{a\}$ when $n=3$, $l=1$ and $k=2$

表 4. $n=3$， $l=1$ 和 $k=2$ 时半群 $S=\{e,g,g^2\}\cup\{a\}$ 的乘法表

	e	g	g^2	a
e	e	g	g^2	g^2
g	g	g^2	e	e
g	g^2	e	g	g
a	g^2	e	g	g

Table 5. Multiplication table of semigroup $S=\{e,g,g^2\}\cup\{a\}$ when $n=3$, $l=2$ and $k=1$

表 5. $n=3$， $l=2$ 和 $k=1$ 时半群 $S=\{e,g,g^2\}\cup\{a\}$ 的乘法表

	e	g	g^2	a
e	e	g	g^2	g
g^2	g	g^2	e	g^2
g	g^2	e	g	e
a	g	g^2	e	g^2

Table 6. Multiplication table of semigroup $S=\{e,g,g^2\}\cup\{a\}$ when $n=3$, $l=3$ and $k=3$

表 6. $n=3$， $l=3$ 和 $k=3$ 时半群 $S=\{e,g,g^2\}\cup\{a\}$ 的乘法表

	e	g	g^2	a
e	e	g	g^2	e
g	g	g^2	e	g
g^2	g^2	e	g	g^2
a	e	g	g^2	e

设半群 $S=G\cup\{a\}$，G 是由 g 生成的 n 阶循环群，S 是 G 的膨胀。下面给出 S 的乘法表(表 7)。

Table 7. Multiplication table of semigroup $S=\{e,g,g^2\}\cup\{a\}$

表 7. $S=\{e,g,g^2\}\cup\{a\}$ 的乘法表

	e	g	g^2	g	a
e	e	g	g^2	g^{n-1}	g^k
g	g	g^2	g^3	e	g^{k+1}
g^2	g^2	g^3	g^4	g	g^{k+2}
g^{n-1}	g^{n-1}	e	g	g^{2n-2}	g^{k+n-1}
a	g^k	g^{k+1}	g^{k+2}	g^{k+n-1}	g^l

设半群 $S=G\cup\{a\}$，G 是由 g 生成的 n 阶循环群，S 是 G 的膨胀。下面给出 $n=1,2,3,4,5$ 时 l 和 k 的取值表(表 8)。

Table 8. Value table of n, l and k
表 8. n，l 和 k 的取值表

n	1	2	2	3	3	3	4	4	5	5	5	5	5
l	1	2	2	1	2	3	2	4	1	2	3	4	5
k	1	1	2	2	1	3	1	2	3	1	4	2	5

基金项目

本文由宁夏高等学校科研项目(NGY2017011)资助。

参考文献 (References)

[1] 郭聿琦, 任学明. *E*-理想拟正则半群[J]. 中国科学(A 辑), 1989(5): 479-486.

[2] 廖群英, 喻秉钧. 平移同态的正规带及其膨胀[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 1999, 22(2): 125-129.

[3] Monzo, R.A.R. (2008) Further Results in Theory of Generalized Inflations of Semigroups. *Semigroup Forum*, **76**, 540-560.

[4] Putcha, M.S. and Weissglass, J. (1971) A Semilattice Decomposition into Semigroups Having at Most One Idempotent. *Pacific Journal of Mathematics*, **39**, 225-228.

[5] 张建新, 唐善桂. 强幂等元、强周期半群及正则半群[J]. 国防科技大学学报, 2000, 22(2): 115-116.

[6] 高艳玲. 关于左Λ-半群[J]. 青海师范大学学报(自然科学版), 1995(1): 9-12.