Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(3), 215-220
Published Online May 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.83027

The Necessary and Sufficient Condition for the Existence of Integrating Factors with Its Application

Zhihong Kong

Department of Mathematics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi
Email: kzh196408@126.com

Received: Apr. 20th, 2018; accepted: May 4th, 2018; published: May 11th, 2018

Abstract

In this paper, we give the necessary and sufficient condition for the existence of integrating factors and their proof. Meanwhile, some examples are given for its application.

Keywords

Integrating Factors, Exact First-Order Differential Equations, Arbitrary Differentiable Functions, Integrating Factors for Grouping

积分因子存在性的充要条件及其应用

孔志宏

太原师范学院数学系，山西 晋中
Email: kzh196408@126.com

收稿日期：2018年4月20日；录用日期：2018年5月4日；发布日期：2018年5月11日

摘　要

给出了积分因子存在性的充要条件及证明，举例说明了它的应用。

关键词

积分因子，恰当微分方程，任意可微函数，分组求积分因子

文章引用：孔志宏. 积分因子存在性的充要条件及其应用[J]. 理论数学, 2018, 8(3): 215-220.
DOI: 10.12677/pm.2018.83027

1. 引言

用积分因子的观点可以统一各种一阶微分方程的初等积分法，也就是说，在理论上，积分因子法可以代替各种一阶微分方程的初等解法。

定理1 (积分因子的存在性定理)如果微分方程

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{1}$$

有通解$u(x,y)=c$，那么它就总有一个积分因子$\mu=\mu(x,y)$，同时$\mu\varphi(u)$也都是方程(1)的积分因子，并且(1)的积分因子必具有$\mu\varphi(u)$的形式，其中$\varphi(u)$是u的任意一个可微函数。

2. 定理的证明

由于方程(1)有通解$u(x,y)=c$，则有

$$\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\mathrm{d}y\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{2}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\partial u}{\partial x}\bigg/\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{3}$$

而(1)可改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{M}{N} \tag{4}$$

比较(3)与(4)，可得。

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg/\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{M}{N},$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg/M=\frac{\partial u}{\partial y}\bigg/N.$$

把这个相等的比记作$\mu(x,y)$，即有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\mu M,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\mu N.$$

用$\mu(x,y)$乘以(1)两端，得

$$\mu M\mathrm{d}x+\mu N\mathrm{d}y=0,$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x=0,$$

这是一个恰当微分方程。又因

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\varphi(u)M\right]&=\varphi(u)\frac{\partial(uM)}{\partial y}+\mu M\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial y}\\&=\varphi(u)\frac{\partial(uM)}{\partial y}+\mu M\varphi'(u)\mu N\\&=\varphi(u)\frac{\partial(uM)}{\partial y}+\mu^2MN\varphi'(u)\end{aligned}\tag{5}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\varphi(u)N\right]&=\varphi(u)\frac{\partial(uN)}{\partial x}+\mu N\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x}\\&=\varphi(u)\frac{\partial(uN)}{\partial x}+\mu N\varphi'(u)\mu M\\&=\varphi(u)\frac{\partial(uN)}{\partial x}+\mu^2MN\varphi'(u)\end{aligned}\tag{6}$$

因

$$\frac{\partial(uM)}{\partial y}=\frac{\partial(uN)}{\partial x},$$

比较(5)与(6)，便得到

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\varphi(u)M\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\varphi(u)N\right].$$

这就证得了 $\mu\varphi(u)$ 也都是方程(1)的积分因子。

反之，设 $\bar{\mu}(x,y)$ 也是方程(1)的积分因子，则同时有

$$\mu M\mathrm{d}x+\mu N\mathrm{d}y=\mathrm{d}u \text{ 和 } \bar{\mu}M\mathrm{d}x+\bar{\mu}N\mathrm{d}y=\mathrm{d}v,$$

其中 $v=v(x,y)$ 与 $u(x,y)$ 类似，即

$$\mu M=\frac{\partial u}{\partial x},\ \mu N=\frac{\partial u}{\partial y},\ \bar{\mu}M=\frac{\partial v}{\partial x},\ \bar{\mu}N=\frac{\partial v}{\partial y}$$

由于雅可比行列式

$$\frac{\partial(u,y)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}&\frac{\partial u}{\partial y}\\\frac{\partial v}{\partial x}&\frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mu M&\mu N\\\bar{\mu}M&\bar{\mu}N\end{vmatrix}\equiv 0$$

且

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=\mu M\cdot\mu N\not\equiv 0,$$

所以函数 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 彼此相关，可表示为

$$v(x,y)=\psi\left(u(x,y)\right).$$

于是

$$\bar{\mu}(M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y)=\mathrm{d}v=\mathrm{d}\psi(u)=\psi'(u)\mathrm{d}u=\psi'(u)\mu(M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y),$$

从而 $\bar{\mu}=\mu\psi'(u)$。记 $\psi'(u)=\varphi(u)$，则 $\bar{\mu}=\mu\varphi(u)$。这就证得了方程(1)的其它积分因子必具有 $\mu\varphi(u)$ 的形式。

3. 应用举例

例 1 [1]设 $\mu_1(x,y),\mu_2(x,y)$ 是方程(1)的两个积分因子，且 $\frac{\mu_1}{\mu_2}\neq$ 常数，求证 $\frac{\mu_1}{\mu_2}=c$ (任意常数)是方程(1)的通解。

证明 已知 μ_2 是方程(1)的一个积分因子，则相应地有一个可微函数 u，使得

$$\mu_2(M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y)=\mathrm{d}u,$$

且 $u(x,y)=c$ (任意常数)为方程(1)的通解。根据上述定理知 $\mu_1=\mu_2\varphi(u)$，其中 $\varphi(t)$ 是 t 的可微函数，于是

$$\frac{\mu_1}{\mu_2}=\varphi(u). \tag{7}$$

由(7)，则 $\frac{\mu_1}{\mu_2}=c$ (任意常数)就等价于 $\varphi(u)=c$ (任意常数)。从而

$$0\equiv\mathrm{d}\varphi(u)\equiv\varphi'(u)\mathrm{d}u\equiv\varphi'(u)\mu_2(M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y).$$

因 $\mu_2\neq0$，$\varphi(u)$ 不恒为常数，即 $\varphi'(u)\neq0$，故 $M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y\equiv0$，即对 $\varphi(u)=c$ 微分后推导出 $M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y\equiv0$。这说明由 $\varphi(u)=c$ (任意常数)所确定的 y 与 x 的关系式是方程(1)的解，故 $\frac{\mu_1}{\mu_2}=c$ (任意常数)是(1)的通解。

例 2 [1]齐次微分方程 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 当 $xM+yN\neq0$ 时有积分因子 $\mu=\frac{1}{xM+yN}$，假设该微分方程还是恰当的，试证它的通解可表为 $xM(x,y)+yN(x,y)=c$ (c 为任意常数)。

证明 所给方程是恰当的，即它的积分因子为 1。根据例 1 的结果，则

$$xM(x,y)+yN(x,y)=c$$

是所给方程的通解，这里 c 为任意常数。

例 3 [1]求解方程

$$x(4y\mathrm{d}x+2x\mathrm{d}y)+y^3(3y\mathrm{d}x+5x\mathrm{d}y)=0.$$

解：对第一组，有

$$x(4y\mathrm{d}x+2x\mathrm{d}y)=x\left[(2y\mathrm{d}x+2x\mathrm{d}y)+2x\mathrm{d}y\right]=x\left[2\mathrm{d}(xy)+2y\mathrm{d}x\right]=2x\mathrm{d}(xy)+2xy\mathrm{d}x=\mathrm{d}(2x^2y)$$

则其积分因子和二元函数如下：

$$\mu_1=1,u_1=2x^2y.$$

对第二组，有

$$y^3(3y\mathrm{d}x+5x\mathrm{d}y)=3y^4\mathrm{d}x+5xy^3\mathrm{d}y.$$

易见它有一个积分因子 $\mu_2=\frac{1}{xy^4}$，相乘后得

$$\frac{3}{x}\mathrm{d}x+\frac{5}{y}\mathrm{d}y=3\mathrm{d}(\ln|x|)+5\mathrm{d}(\ln|y|)=\mathrm{d}(\ln|x^3y^5|),$$

相应地有 $u_2=\ln\left|x^3y^5\right|$。根据积分因子的存在性定理，可以考虑选择适当的可微函数 φ 与 $\tilde{\varphi}$，使得

$$1\cdot\varphi\left(2x^2y\right)=\frac{1}{xy^4}\tilde{\varphi}\left(\ln\left|x^3y^5\right|\right).$$

取 $\varphi\left(2x^2y\right)=2x^2y$，$\tilde{\varphi}\left(\ln\left|x^3y^5\right|\right)=2x^3y^5$，则得到原方程的一个积分因子 $\mu=2x^2y$。用它乘原方程两边，得

$$2x^2y\mathrm{d}\left(2x^2y\right)+6x^2y^5\mathrm{d}x+10x^3y^4\mathrm{d}y=0.$$

即

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}\left(2x^2y\right)^2+2y^5\mathrm{d}x^3+2x^3\mathrm{d}y^5=\mathrm{d}\left(2x^4y^2\right)+\mathrm{d}\left(2x^2y^5\right)=\mathrm{d}\left(2x^4y^2+2x^3y^5\right)=0,$$

原方程的通解为

$$x^4y^2+x^3y^5=c,$$

这里 c 是任意常数。

例 4 [2]求解方程

$$\left(x^3y-2y^2\right)\mathrm{d}x+x^4\mathrm{d}y=0.$$

解 将方程改写为

$$\left(x^3y\mathrm{d}x+x^4\mathrm{d}y\right)+\left(-2y^2\mathrm{d}x\right)=0,$$

即

$$x^3\left(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y\right)+\left(-2y^2\mathrm{d}x\right)=0. \tag{8}$$

第一组有积分因子 $\mu_1=\frac{1}{x^3}$ 和原函数 $u_1=xy$；第二组有积分因子 $\mu_2=\frac{1}{-2y^2}$ 和原函数 $u_2=x$。现在要寻找可微函数 φ 与 $\tilde{\varphi}$，使得

$$\frac{1}{x^3}\varphi\left(xy\right)=\frac{1}{-2y^2}\tilde{\varphi}\left(x\right).$$

取 $\varphi\left(xy\right)=\frac{1}{\left(xy\right)^2}$，$\tilde{\varphi}\left(x\right)=-\frac{2}{x^5}$，则得到原方程的一个积分因子

$$\mu=\mu\left(x,y\right)=\frac{1}{x^5y^2}.$$

用它乘以改写后的方程(8)，得

$$\frac{1}{x^2y^2}\mathrm{d}\left(xy\right)-\frac{2}{x^5}\mathrm{d}y=0,$$

即

$$\mathrm{d}\left(-\frac{1}{xy}\right)+\mathrm{d}\left(\frac{1}{2x^4}\right)=0,$$

或

$$\mathrm{d}\left(-\frac{1}{xy}+\frac{1}{2x^4}\right)=0.$$

因此，原方程的通解为

$$-\frac{1}{xy}+\frac{1}{2x^4}=c,$$

这里 c 为任意常数。此外， $y=0$ 也是原方程的一个解。

参考文献

[1] 王高雄, 周之铭, 朱思铭, 等. 常微分方程[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2006: 61.

[2] 丁同仁, 李承治. 常微分方程[M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2004: 49-50.