Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(3), 239-246
Published Online May 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.83030

Hans汉斯

Existence of Solutions for Two Class of Third-Order Nonlinear Boundary Value Problems under Barrier Strips Conditions

Dongmei Zhang, Yanqiong Lu

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu
Email: luyq8610@126.com

Received: May 2nd, 2018; accepted: May 15th, 2018; published: May 24th, 2018

Abstract

By using Leary-Schauder theorem, we study the existence of solutions for two classes of nonlinear third-order two-point boundary value problems. We establish the existence results of solutions for the above two classes of boundary value problems with nonlinearity satisfying barrier strips conditions and give some examples to illustrate our main results.

Keywords

Barrier Strips Conditions, Third-Order Boundary Value Problems, Existence, Leary-Schauder Theorem

障碍带条件下两类三阶非线性边值问题解的存在性

张冬梅，路艳琼

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州
Email: luyq8610@126.com

收稿日期：2018年5月2日；录用日期：2018年5月15日；发布日期：2018年5月24日

摘 要

运用Leray-Schauder原理，研究了两类非线性常微分方程三阶两点边值问题解的存在性问题。在非线性

文章引用: 张冬梅, 路艳琼. 障碍带条件下两类三阶非线性边值问题解的存在性[J]. 理论数学, 2018, 8(3): 239-246.
DOI: 10.12677/pm.2018.83030

项满足障碍带条件下，建立了上述两类边值问题解的存在性结果，并给出主要结果的应用实例。

关键词

障碍带条件，三阶边值问题，存在性，Leary-Schauder原理

Copyright © 2018 by authors and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

近几年来，随着科学技术的迅速发展，三阶微分方程边值问题在诸多领域都有显著的实用价值，尤其在工程、军事、医学及生态等领域发挥着重要的作用，如三阶微分方程边值问题刻画三层梁及带有固定或变化横截面的屈曲梁的挠度，见文献[1]。由于其重要的应用背景，三阶微分方程边值问题(正)解的存在性及多解性也备受诸多学者的关注，并且获得了丰硕的成果(见[2]-[9]及其参考文献)。

1994 年，P. Kelevedjiev [10]运用 Leray-Schauder 原理证明了障碍带条件下非线性二阶两点边值问题

$$\begin{cases} -u''(t) = f(t,u,u'),\ t\in[0,1], \\ u(0) = A, \quad u(0) = B \end{cases}$$

解的存在性。2008 年，杜睿娟[2]在障碍带条件下研究了非线性常微分方程三阶两点边值问题

$$\begin{cases} -u'''(t) = f(t,u,u',u''),\ t\in[0,1], \\ u(0) = u'(0) = u''(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

解的存在性，并获得了如下结论：

定理 1：设 $f:[0,1]\times R^3 \to R$ 连续，假定存在常数 $L_i, i=1,2,3,4$。满足 $L_2 > L_1 \ge 0, L_3 < L_4 \le 0$，使得 $f(t,x,p,q)\ge 0, (t,x,p,q)\in[0,1]\times R^2\times[L_1,L_2]$ 及 $f(t,x,p,q)\le 0, (t,x,p,q)\in[0,1]\times R^2\times[L_3,L_4]$ 成立，则边值问题(1)在 $C^3[0,1]$ 中至少有一个解。

2009 年，张宏旺[3]运用新的极大值原理及上下解的单调迭代法获得了非线性三阶边值问题

$$\begin{cases} -u'''(t) = f(t,u(t)),\ t\in[0,1], \\ u(0) = u'(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

解的存在性结果。2016 年，蒋志丽，杜娟[4]通过构造迭代的方法证明了如下非线性三阶边值问题

$$\begin{cases} -u'''(t) = f(t,u(t),u'(t),u''(t)),\ t\in(0,1), \\ u(0) = u'(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

解的存在性。

受文献[2]-[7]的启发，本文探讨在障碍带条件下的两类非线性三阶两点边值问题

$$\begin{cases} u'''(t) = f(t,u(t),u'(t),u''(t)),\ t\in[0,1], \\ u(0) = A, u(1) = B, u'(1) = C \end{cases} \tag{2}$$

和

$$\begin{cases} u'''(t) = f\left(t, u(t), u'(t), u''(t)\right),\ t \in [0,1], \\ u(0) = A, u(1) = B, u'(0) = C \end{cases} \tag{3}$$

解的存在性，其中 $f:[0,1]\times R^3 \to R$ 连续，A，B，C 为给定的常数。

2. 预备知识

令 $C[0,1]$ 表示区间 $[0,1]$ 上连续函数构成的空间，定义其上范数为 $\|u\|_0 = \max\{|u(t)|: t\in[0,1]\}$。记 $C^3[0,1] = \{u \mid u, u', u'', u''' \in C[0,1]\}$，其上范数为：

$$\|u\|_3 = \max\left\{\|u\|_0, \|u'\|_0, \|u''\|_0, \|u'''\|_0\right\},$$

则 $C^3[0,1]$ 按范数 $\|u\|_3$ 构成 Banach 空间。

记

$$A_1 = \{u \in C[0,1] \mid u(0) = A, u(1) = B, u'(1) = C, A, B, C\text{为常数}\},$$

$$A_2 = \{u \in C[0,1] \mid u(0) = A, u(1) = B, u'(0) = C, A, B, C\text{为常数}\}$$

分别为满足问题(2)和(3)中边值问题的函数构成的集合，并令 $C^3_{A_i}[0,1] = C^3[0,1]\cap A_i, i = 1,2$。

定义算子：$T_i: C^3_{A_i}[0,1] \to C[0,1]$ 如下

$$T_i u = u''', i = 1,2.$$

显然，$T_i: C^3_{A_i}[0,1] \to C[0,1]$ 为一一映射。

本文主要工具为 Leray-Schauder 原理：

定理 2： 令 E 为 Banach 空间，设 $A: E\to E$ 为全连续算子。若

$$\{u \mid u\in E, u = \lambda A u, 0<\lambda<1\}$$

有界，则 A 在 E 的闭球 B 中必有不动点，这里 $B = \{u \mid u\in E, \|u\| < R\}$，$R$ 满足 $R = \sup\{\|u\| \mid u = \lambda A u, 0<\lambda<1\}$。

3. 主要结果及证明

定理 3： 设 $f:[0,1]\times R^3\to R$ 连续，假定存在常数 $L_i, i = 1,2,\cdots,8$ 使得

$$L_2 > L_1 \ge D, L_4 > L_3 \ge D, L_5 < L_6 \le D, L_8 < L_7 \le D,$$

其中 $D = \dfrac{C-B+A}{1-d}, d\in(0,1)$，满足

$$f(t,u,p,q)\ge 0, (t,u,p,q)\in[0,1]\times R^2\times\left([L_1,L_2]\cup[L_5,L_6]\right),$$

$$f(t,u,p,q)\le 0, (t,u,p,q)\in[0,1]\times R^2\times\left([L_3,L_4]\cup[L_7,L_8]\right),$$

则问题(2)在 $C^3[0,1]$ 中至少存在一个解。

证明： 考虑同伦族问题：

$$\begin{cases} u'''(t) = \lambda f\left(t, u(t), u'(t), u''(t)\right), t\in[0,1], \lambda\in[0,1], \\ u(0) = A, u(1) = B, u'(1) = C. \end{cases} \tag{4}$$

显然，$T_1 u = u'''$ 是一一映射。因此，运用定理 2，若问题(4)的所有可能解 u 在 $C^3[0,1]$ 中有一个不依

赖于 $\lambda\in[0,1]$ 的先验界，即存在正常数 $M<+\infty$，使得 $\|u\|_3<M$，则问题(2)在 $C^3[0,1]$ 中有解。

设 $u\in C^3[0,1]$ 是问题(4)的一个解。则由微分中值定理得，存在 $d\in(0,1)$，使得 $u'(d)=u(1)-u(0)=B-A$。同理，存在 $\xi\in(d,1)$，使得

$$u''(\xi)=\frac{u'(1)-u'(d)}{1-d}=\frac{C-B+A}{1-d}=D.$$

因此，

$$f(t,u,p,q)\ge 0,(t,u,p,q)\in[0,\xi]\times R^2\times[L_1,L_2],$$

$$f(t,u,p,q)\le 0,(t,u,p,q)\in[0,\xi]\times R^2\times[L_7,L_8].$$

为证 $\|u\|_3<M$，首先估计 $u''(t)$ 的界。

假设集合

$$S_0=\{t\in[0,\xi]:L_1<u''(t)\le L_2\},\ S_1=\{t\in[0,\xi]:L_7<u''(t)\le L_8\}$$

非空。取定 $t_0\in S_0$，$t_1\in S_1$，如果存在 $t_0'\in(t_0,\xi]$，$t_1'\in(t_1,\xi]$ 使得

$$u''(t_0')<u''(t_0),\ u''(t_1')>u''(t_1). \tag{5}$$

由 u'' 的连续性，甚至可以取到 $t_0'\in(t_0,\xi]\cap S_0$，$t_1'\in(t_1,\xi]\cap S_1$，但对 $t\in S_0$，有

$$u'''(t)=\lambda f(t,u(t),u'(t),u''(t))\ge 0,$$

所以 $u''(t_0')\ge u''(t_0)$。同理，对 $t\in S_1$，有 $u''(t_1')\le u''(t_1)$，这与(5)矛盾！从而

$$u''(t_0')\ge u''(t_0),t\in(t_0,\xi],\ u''(t_1')\le u''(t_1),t\in(t_1,\xi].$$

特别地，$u''(\xi)\ge u''(t_0)>L_1\ge D,u''(\xi)\le u''(t_1)<L_8\le D$，这与 $u''(\xi)=D$ 矛盾，所以 S_0 与 S_1 是空集。

因为 $u''(t)$ 在 $t\in(0,\xi]$ 上连续，所以存在 $L_8\le u''(t)\le L_1$，且

$$|u''(t)|\le\max\{|L_1|,|L_8|\},t\in[0,\xi].$$

同理，由条件

$$f(t,u,p,q)\le 0,(t,u,p,q)\in[\xi,1]\times R^2\times[L_3,L_4],$$

$$f(t,u,p,q)\ge 0,(t,u,p,q)\in[\xi,1]\times R^2\times[L_5,L_6]$$

可得 $|u''(t)|\le\max\{|L_3|,|L_6|\},t\in[\xi,1]$。因此，对任意的 $t\in[0,1]$，有

$$|u''(t)|\le M_0, \tag{6}$$

其中 $M_0=\max\{|L_1|,|L_3|,|L_6|,|L_8|\}$。

其次，估计 $u'(t)$ 和 $u(t)$ 的界，对每一个 $t\in[0,1)$，存在 $\tau\in(t,1)$，使得

$$u'(1)-u'(t)=u''(\tau)(1-t)$$

由此得

$$|u'(t)|\le M_1,t\in[0,1], \tag{7}$$

其中 $M_1=|C|+M_0$。

对每个 $t\in(0,1]$，存在 $\rho\in(0,t)$，使得

$$u(t)-u(0)=u'(\rho)t,$$

由此得

$$|u(t)|\le M_2, t\in[0,1], \tag{8}$$

其中 $M_2=|A|+M_1$。

最后，由于 $u'''(t)=\lambda f(t,u(t),u'(t),u''(t))\ge 0, t\in[0,1]$，$f$ 连续，$\lambda\in[0,1]$，所以

$$|u'''(t)|\le M_3, t\in[0,1], \tag{9}$$

其中 $M_3<+\infty$ 是不依赖于 λ 的常数，结合(6)，(7)，(8)，(9)，则

$$\|u\|_3<\max\{M_0,M_1,M_2,M_3\}+1.$$

故问题(2)在 $C^3[0,1]$ 中至少存在一个解。

对偶地，通过类似的讨论，可获得如下问题(2)解的存在性结果。

定理 4：设 $f:[0,1]\times R^3\to R$ 连续，假定存在常数 $L_i, i=1,2,\cdots,8$，使得

$L_2>L_1\ge D, L_4>L_3\ge D, L_5<L_6\le D, L_8<L_7\le D$，其中 $D=\dfrac{C-B+A}{1-d}, d\in(0,1)$，满足

$$f(t,u,p,q)\le 0,(t,u,p,q)\in[0,1]\times R^2\times([L_1,L_2]\cup[L_5,L_6]),$$

$$f(t,u,p,q)\ge 0,(t,u,p,q)\in[0,1]\times R^2\times([L_3,L_4]\cup[L_7,L_8]),$$

则边值问题(2)在 $C^3[0,1]$ 中至少存在一个解。

注 5：定理 3 与定理 4 对问题(3)也成立，只需取 $D=\dfrac{B-A-C}{d}$。

注 6：边值问题(2)或(3)中的边值条件中 A，B，C 取零时，上述结论仍然成立。

注意到，定理 3，定理 4 中的非线性项 f 满足障碍带条件是在区间上给出的，自然地，当区间退化为一点时，是否仍然能获得边值问题(2)或(3)解的存在性呢？下面我们给予肯定的回答。

定理 7：设 $f:[0,1]\times R^3\to R$ 连续，假定存在常数 $\underline{L},\overline{L}$ 满足

$\underline{L}<0<\overline{L}$，使得

$$f(t,u,p,q)\ge 0,(t,u,p,q)\in[0,1]\times R^2\times\{\overline{L}\},$$

$$f(t,u,p,q)\le 0,(t,u,p,q)\in[0,1]\times R^2\times\{\underline{L}\},$$

则边值问题(3)在 $C^3[0,1]$ 中至少存在一个解。

证明：由 Tietze-Urysohn 引理，存在连续函数 $\phi:R\to[-1,1]$，使得

$$\phi(\overline{L})=1, \phi(\underline{L})=-1.$$

对任一正整数 m，令 $f_m(t,u,p,q)=f(t,u,p,q)+\dfrac{1}{m}\phi(q)$，显然 f_m 连续。考察辅助边值问题

$$\begin{cases}u'''(t)=f_m(t,u,u',u''), t\in[0,1],\\ u(0)=A, u(1)=B, u'(1)=C\end{cases} \tag{10}$$

易见 $f_m(t,u,u',\overline{L})=f(t,u,u',\underline{L})+\dfrac{1}{m}\phi(\overline{L})\ge\dfrac{1}{m}>0$，从而由连续函数的保号性知，存在 $L_{m,1},L_{m,2}$ 满足

$0 \le L_{m,1} < \overline{L} < L_{m,2}$，使得

$$f_m(t,u,p,q) > 0, (t,u,p,q) \in [0,1] \times R^2 \times [L_{m,1}, L_{m,2}].$$

同理，存在 $L_{m,3}, L_{m,4}$ 满足 $L_{m,3} < \overline{L} < L_{m,4} \le 0$，使得

$$f_m(t,u,p,q) < 0, (t,u,p,q) \in [0,1] \times R^2 \times [L_{m,3}, L_{m,4}].$$

显然，选取区间如下：

$$[L_{m+1,1}, L_{m+1,2}] \subseteq [L_{m,1}, L_{m,2}], \tag{11}$$

$$[L_{m+1,3}, L_{m+1,4}] \subseteq [L_{m,3}, L_{m,4}], \tag{12}$$

类似定理 3 的证明可证得，边值问题(10)在 $C^3[0,1]$ 中有解 u_m，且满足

$$L_{m,4} \le u''(t) \le L_{m,1}, t \in [0,1].$$

因此，存在常数 M_4，使得

$$|u_m''(t)| \le M_4, t \in [0,1]. \tag{13}$$

由微分中值定理，对任意的 $t \in (0,1]$，存在 $\eta \in (0,t]$，使得

$$u_m'(t) - u_m'(0) = u_m''(\eta)t,$$

则存在正的常数 M_5，使得

$$|u_m'(t)| \le M_5, t \in [0,1]. \tag{14}$$

同理，存在正的常数 M_6，使得

$$|u_m(t)| \le M_6, t \in [0,1]. \tag{15}$$

则由(13)，(14)，(15)及(10)得，存在不依赖于 λ 的正常数 $M_7 < \infty$，使得

$$|u_m'''(t)| \le M_7, t \in [0,1]. \tag{16}$$

结合(13)~(16)，易证 $\|u_m\|_3 < \max\{M_4, M_5.M_6, M_7\} + 1$。

下证问题(10)的解序列 $\{u_m\}$ 存在一收敛子列 $\{u_{m_{i_{jk}}}\}$，满足 $\lim\limits_{k\to\infty} u_{m_{i_{jk}}} = v$ 且 v 是边值问题(3)的解。

事实上，由于 $C^3[0,1]$ 紧嵌入 $C[0,1]$，若 $\{u_m\}$ 在 $C^3[0,1]$ 有界，则 $\{u_m\}$ 是 $C[0,1]$ 中的相对紧集，则存在 $\{u_{m_i}\} \subseteq \{u_m\}$，满足

$$\lim_{i\to\infty} u_{m_i} = v \in C[0,1].$$

又 $\{u_{m_i}\}$ 有界，且 $C^3[0,1]$ 紧嵌入 $C^1[0,1]$，故存在子序列 $\{u_{m_{i_j}}\} \subseteq \{u_m\}$，满足

$$\lim_{i\to\infty} u_{m_{i_j}} = v, \lim_{j\to\infty} u'_{m_{i_j}} = v',$$

同理存在 $\{u_{m_{i_{jk}}}\} \subseteq \{u_m\}$，满足

$$\lim_{i\to\infty} u_{m_{i_{jk}}} = v, \lim_{j\to\infty} u'_{m_{i_{jk}}} = v', \lim_{k\to\infty} u''_{m_{i_{jk}}} = v''.$$

不妨记 $\theta_m = u_{m_{i_{jk}}}$，则 θ_m 满足边值问题

$$\begin{cases}\theta_m'''(t)=f_m(t,\theta_m,\theta_m',\theta_m''),t\in[0,1],\\ \theta_m(0)=A,\theta_m(1)=B,\theta_m'(0)=C,\end{cases}\tag{17}$$

显然问题(17)等价于积分方程

$$\theta_m(t)=\int_0^1 G(t,s)f_m(s,\theta_m(s),\theta_m'(s),\theta_m''(s))\mathrm{d}s+(B-A-C)t^2+Ct+A,\tag{18}$$

其中

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{t^2(1-s)^2}{2},0\le t\le s\le 1\\ \dfrac{(1-t)s(t-s+t(1-s))}{2},0\le s\le t\le 1,\end{cases}$$

为边值问题(3)的 Green 函数。因为 f_m 收敛到 f，且 $G(t,s)f_m(s,\theta_m(s),\theta_m'(s),\theta_m''(s))\mathrm{d}s$ 连续，故对(18)两端取极限，可得 $v(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,v(s),v'(s),v''(s))\mathrm{d}s$，从而 $v\in C^3[0,1]$，且满足问题(3)。

类似地可证下面对偶问题成立。

定理 8：设 $f:[0,1]\times R^3\to R$ 连续，假定存在常数 $\underline{L},\overline{L}$ 满足 $\underline{L}<0<\overline{L}$，使得

$$f(t,u,p,q)\le 0,(t,u,p,q)\in[0,1]\times R^2\times\{\overline{L}\},$$

$$f(t,u,p,q)\ge 0,(t,u,p,q)\in[0,1]\times R^2\times\{\underline{L}\},$$

则边值问题(3)在 $C^3[0,1]$ 中至少存在一个解。

注 9：定理 7，8 对边值问题(2)也成立，只需 θ_m 满足边值问题(17)的边值条件替换为 $\theta_m(0)=A,\theta_m(1)=B,\theta_m'(1)=C$，且问题(17)等价于积分方程

$$\theta_m(t)=\int_0^1 G(t,s)f_m(s,\theta_m(s),\theta_m'(s),\theta_m''(s))\mathrm{d}s+(C-B+A)t^2+(2B-2A-C)t+A,$$

其中

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{(1-t)^2s^2}{2}, & 0\le s\le t\le 1;\\ \dfrac{(1-s)[(1-t)ts+t(s-t)]}{2}, & 0\le t\le s\le 1\end{cases}$$

为边值问题(2)的 Green 函数。

例 10：考虑三阶两点边值问题

$$\begin{cases}u'''(t)=\dfrac{1}{5!}(u''(t)-D)^5-\dfrac{1}{3!}(u''(t)-D)^3+u''(t)-D,t\in[0,1],\\ u(0)=A,\ u(1)=B,\ u'(1)=C,\end{cases}\tag{19}$$

其中 A，B，C 为任意常数，$D=\dfrac{C-B+A}{1-d},d\in(0,1)$。

易见，令

$$L_1=D+\frac{1}{2},L_2=D+\frac{3}{2},L_3=D+\frac{9}{2},L_4=D+5,$$

$$L_5=D-4,L_6=D-\frac{7}{2},L_7=D-2,L_8=D-1,$$

不难验证 $f(t,u,p,q)=\frac{1}{5!}(q-D)^5-\frac{1}{3!}(q-D)^3+q-D$ 满足定理 3 的所有条件，因此边值问题(19)在 $C^3[0,1]$ 中至少有一个解。

例 11：考虑三阶两点边值问题

$$\begin{cases} u'''(t)=(u''(t)-D)^3+\frac{7}{10}(u''(t)-D)^2-\frac{9}{5}(u''(t)-D), t\in[0,1], \\ u(0)=A,\ u(1)=B,\ u'(0)=C, \end{cases} \tag{20}$$

其中 A，B，C 为任意常数，$D=\frac{B-A-C}{d}, d\in(0,1)$。

易见，取 $\overline{L}=D+\frac{5}{2},\underline{L}=D-13$，不难验证 $f(t,u,p,q)=(q-D)^3\frac{7}{10}(q-D)^2-\frac{9}{5}(q-D)+\frac{3}{8}$ 满足定理 8 的全部条件，因此边值问题(20)在 $C^3[0,1]$ 中至少存在一个解。

基金项目

国家自然科学基金数学天元项目(11626188)，甘肃省年科技基金计划项目(1606RJYA232)，西北师范大学青年教师科研能力提升计划一般项目(NWNU-LKQN-15-16)。

参考文献

[1] Grenier, W. (2004) Classical Mechanics-Point Particles and Relativity. Springer, Berlin.

[2] 杜睿娟. 障碍带条件下一类三阶边值问题解的存在性[J]. 佳木斯大学学报(自然科学版), 2008, 26(2): 267-271.

[3] 张宏旺. 一类非线性三阶边值问题解的存在性[J]. 兰州工业高等专科学校学报, 2009, 16(1): 48-50.

[4] 蒋志丽, 杜娟. 一类非线性三阶边值问题解的存在性[J]. 哈尔滨师范大学自然科学学报, 2016, 32(2): 16-18.

[5] 姚庆六. 三阶常微分方程的某些非线性特征值问题的正解[J]. 数学物理学报, 2003, 23A(5): 513-519.

[6] Aftabizadeh, A.R., Gupta, C.P. and Xu, J.M. (1989) Existence and Uniqueness Theorems for Three-Point Boundary Value Problems. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **20**, 716-726. https://doi.org/10.1137/0520049

[7] Ma, R.Y. and Lu, Y.Q. (2014) Disconjugacy and Extremal Solutions of Nonlinear Third-Order Equations. *Communications on Pure and Applied Analysis*, **13**, 1223-1236. https://doi.org/10.3934/cpaa.2014.13.1223

[8] 翟成波, 赵莉. 三阶两点边值问题非平凡解的存在唯一性[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2017, 40(3): 416-420.

[9] 郝彩云, 王文霞, 鞠梦兰. 带积分边界条件的三阶微分方程凸单调正解的存在唯一性[J]. 烟台大学学报(自然科学与工程版), 2017, 30(1): 11-16.

[10] Kelevedjiev, P. (1994) Existence of Solutions for Two-Point Boundary Value Problems. *Nonlinear Analysis*, **22**, 217-224. https://doi.org/10.1016/0362-546X(94)90035-3

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org