Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(3), 253-258
Published Online May 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.83032

Hans汉斯

Weak BMO-Type Spaces Associated with Generalized Approximations to the Identity

Xiaojie Li

School of Mathematics and System Science, Beihang University, Beijing
Email: lixiaojie@buaa.edu.cn

Received: May 2nd, 2018; accepted: May 16th, 2018; published: May 25th, 2018

Abstract

In this paper, we introduce a new weak BMO-type space $WBMO_A^p(\chi)$ ($1<p<\infty$) on the homogeneous space χ, which is associated with generalized approximations to the identity and generalizes $WBMO^p(\chi)$ space. We show the equivalence of $BMO_A^p(\chi)$ space and $WBMO_A^p(\chi)$ space, and give the interpolation theorem of $WBMO_A^p(\chi)$ space and $L^p(\chi)$ space.

Keywords

Homogeneous Space, $WBMO_A^p(\chi)$ Space, Interpolation

与广义逼近恒等式相关的弱BMO型空间

李肖杰

北京航空航天大学，数学与系统科学学院，北京
Email: lixiaojie@buaa.edu.cn

收稿日期：2018年5月2日；录用日期：2018年5月16日；发布日期：2018年5月25日

摘　要

在本篇文章中，我们引入了齐型空间χ上与广义逼近恒等式相关的一类新的弱BMO型空间$WBMO_A^p(\chi)$，$1<p<\infty$，它是$WBMO^p(\chi)$空间的推广。我们证明了$BMO_A^p(\chi)$空间与$WBMO_A^p(\chi)$空间的等价性，并给出了$WBMO_A^p(\chi)$空间与$L^p(\chi)$空间的插值定理。

文章引用: 李肖杰. 与广义逼近恒等式相关的弱 BMO 型空间[J]. 理论数学, 2018, 8(3): 253-258.
DOI: 10.12677/pm.2018.83032

关键词

齐型空间，$WBMO_A^p(\chi)$空间，插值

1. 引言

19 世纪 60 年代引入的经典 $BMO(\mathbb{R}^n)$ 函数空间在现代调和分析中具有重要作用(可参见文献[1] [2])。设 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$，对任意的球 $B \subset \mathbb{R}^n$，称 $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$，若

$$\|f\|_{BMO(\mathbb{R}^n)} = \sup_{B\subset\mathbb{R}^n} \frac{1}{|B|}\int_B |f(x)-f_B|\mathrm{d}x < \infty,$$

其中 $f_B = \frac{1}{|B|}\int_B f(x)\mathrm{d}x$。在文献[1]中，John 和 Nirenberg 证明了对任意的 $1<p<\infty$， $BMO(\mathbb{R}^n)$ 空间与 $BMO^p(\mathbb{R}^n)$ 空间等价，其中 $BMO^p(\mathbb{R}^n)$ 空间定义如下：对任意的 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$，任意的球 $B \subset \mathbb{R}^n$，称 $f \in BMO^p(\mathbb{R}^n)$，若

$$\|f\|_{BMO^p(\mathbb{R}^n)} = \sup_{B\subset\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|B|}\int_B |f(x)-f_B|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p} < \infty.$$

众所周知，许多算子并不是从 L^1 到 L^1 有界的，而是从 L^1 到 $L^{1,\infty}$ 有界的，例如 Ricci-Stein 震荡奇异积分算子，Carderón-Zygmund 算子，Hardy-Littlewood 极大算子。因此，弱型空间在算子理论研究中具有重要的意义。最近，王定怀等[3]引进了弱型 BMO 空间 $WBMO^p(\mathbb{R}^n)$，$1<p<\infty$，它是类似于弱型 Lebesgue 空间 $L^{p,\infty}$ 所对应的 BMO 空间。并且他们证明了 $\|\cdot\|_{BMO}$ 与 $\|\cdot\|_{WBMO^p}$ 的等价性。

$WBMO^p(\mathbb{R}^n)$ 空间[3]定义如下：设 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$，对任意的球 $B \subset \mathbb{R}^n$，称 $f \in WBMO^p(\mathbb{R}^n)$，若

$$\|f\|_{WBMO^p(\mathbb{R}^n)} = \sup_{B\subset\mathbb{R}^n} \frac{1}{|B|^{1/p}} \sup_{\lambda>0} \lambda \left|\left\{x\in B : |f(x)-f_B|>\lambda\right\}\right|^{1/p} < \infty.$$

显然地，当 $1 \le p_1 \le p_2 < \infty$ 时， $BMO^{p_2} \subset WBMO^{p_1}$。

此外，Duong 和 Yan [4]引进了齐型空间 χ 上适当的函数集 $\mathrm{M}(\chi)$，并进一步引进了与广义逼近恒等式相关的一类新的 BMO 型函数空间 $BMO_A(\chi)$，它是经典 BMO 函数空间的推广。确切地说，设 $\{A_t\}_{t>0}$ 是由核 $\{a_t\}_{t>0}$ (其衰减速度足够快)所定义的一类积分算子，对任意的 $x\in\chi$ 和满足 χ 上某类增长条件的任意函数 f，

$$A_t f(x) = \int_\chi a_t(x,y) f(y)\mathrm{d}\mu(y).$$

称 $f \in BMO_A(\chi)$，如果对任意的 $f \in \mathrm{M}(\chi)$，任意的球 $B \subset \chi$，

$$\|f\|_{BMO_A(\chi)} = \sup_{B\subset\chi} \frac{1}{\mu(B)}\int_B \left|f(x) - A_{t_B} f(x)\right|\mathrm{d}\mu(x) < \infty,$$

其中 $t_B=r_B^m$，r_B 是球 B 的半径，m 是一个正常数。相应地，他们证明了对任意的 $1<p<\infty$，$BMO_A(\chi)$ 空间与 $BMO_A^p(\chi)$ 空间等价，其中 $BMO_A^p(\chi)$ 空间定义如下：称 $f\in BMO_A^p(\chi)$，如果对任意的 $f\in \mathrm{M}(\chi)$，任意的球 $B\subset\chi$，

$$\|f\|_{BMO_A^p(\chi)}=\sup_{B\subset\chi}\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B\left|f(x)-A_{t_B}f(x)\right|^p\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p}<\infty .$$

本文将文献[4]中的一些结论进行推广，引进了一类齐型空间 χ 上与广义逼近恒等式相关的新的弱 BMO 型函数空间 $WBMO_A^p(\chi)$，它是[4]中所引进的 $WBMO^p(\chi)$ 空间的推广。而且我们证明了 $BMO_A^p(\chi)$ 空间和 $WBMO_A^p(\chi)$ 空间的等价性，并对 $WBMO_A^p(\chi)$ 空间与 $L^p(\chi)$ 空间的插值理论进行了研究。

在本文中，字母 c 表示与主要参数无关的常数，并且每一处取值不一定相等。

2. 预备知识和主要结果

我们首先回忆齐型空间上的一些基本定义，可见文献[4] [5] [6]。

给定非空集合 χ，满足下列条件的函数 d：$\chi\times\chi\to[0,\infty)$ 称为 χ 上的拟度量：

i) 对任意的 $x,y\in\chi$，$d(x,y)\ge 0$，$d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$；

ii) 对任意的 $x,y\in\chi$，$d(x,y)=d(y,x)$；

iii) 存在常数 $C_1\in[1,\infty)$，使得对任意的 $x,y,z\in\chi$，

$$d(x,y)\le C_1\big(d(x,z)+d(z,y)\big). \tag{1}$$

拟度量 d 决定了一个拓扑，且对任意的 $x\in\chi$ 和 $r\in(0,\infty)$，所有的球 $B(x,r)=\{y\in\chi:d(y,x)<r\}$ 组成一个拓扑基。但当 $C_1>1$ 时，这些球不一定为开集(可参见文献[6])。

定义 1：设 χ 是一个集合，称 (χ,d,μ) 是齐型空间，其中 d 是 χ 上的拟度量，μ 是 χ 上满足二倍条件的 Borel 测度，即存在常数 $C_2\in[1,\infty)$，对任意的 $x\in\chi$，$r\in(0,\infty)$，使得

$$\mu\big(B(x,2r)\big)\le C_2\mu\big(B(x,r)\big)<\infty .$$

由上述二倍条件可得如下强齐次性：存在常数 n 和 c，使得对任意的 $x\in\chi$，$r\in(0,\infty)$ 和 $\lambda\in[1,\infty)$，

$$\mu\big(B(x,\lambda r)\big)\le c\lambda^n\mu\big(B(x,r)\big), \tag{2}$$

其中参数 n 是空间的维数。且存在 c 和 N，$0\le N\le n$，使得对任意的 $x,y\in\chi$ 和 $r>0$，

$$\mu\big(B(y,r)\big)\le c\left(1+\frac{d(x,y)}{r}\right)^N\mu\big(B(x,r)\big), \tag{3}$$

事实上，$N=n$ 时，(3)式可由拟度量 d 的三角不等式和强齐次性直接得到。若 χ 是 $\mathbb{R}^n$ 空间或多项式增长李群，则 $N=0$。

定义 2：设 ε 是(6)式(见定义 3)中的常数，且 $0<\beta<\varepsilon$，$f\in L_{loc}^1(\chi)$，称 f 为以 $x_0\in\chi$ 为心的 (x_0,β) 型函数，如果 f 满足

$$\int_\chi\frac{|f(x)|}{\big(1+d(x_0,x)\big)^{2N+\beta}\mu\Big(B\big(x_0,1+d(x_0,x)\big)\Big)}\mathrm{d}\mu(x)\le c<\infty . \tag{4}$$

记 $\mathrm{M}_{(x_0,\beta)}$ 为所有 (x_0,β) 型函数的集合，若 $f\in\mathrm{M}_{(x_0,\beta)}$，则 f 在 $\mathrm{M}_{(x_0,\beta)}$ 中的范数定义为

$$\|f\|_{\mathrm{M}_{(x_0,\beta)}}=\inf\{c\ge 0:(4)\text{成立}\}.$$

对一个固定的 $x_0 \in \chi$，易知当 $\|f\|_{\mathrm{M}_{(x_0,\beta)}} < \infty$ 时，$\mathrm{M}_{(x_0,\beta)}$ 是一个 Banach 空间。此外，对任意的 $x_1 \in \chi$，$\mathrm{M}_{(x_1,\beta)} = \mathrm{M}_{(x_0,\beta)}$，且它们的范数等价。

记

$$\mathrm{M}(\chi) = \bigcup_{x_0 \in \chi} \bigcup_{\beta: 0<\beta<\varepsilon} \mathrm{M}_{(x_0,\beta)},$$

其中 ε 是(6)式中的常数。

定义 3： 设函数 f 满足增长条件(4)，对任意的 $t>0$，广义逼近恒等式 $\{A_t\}_{t>0}$ 定义为：

$$A_t f(x) = \int_\chi a_t(x,y) f(y) \mathrm{d}\mu(y).$$

设核 a_t 满足：对任意的 $x,y \in \chi$，

$$|a_t(x,y)| \le h_t(x,y),$$

其中

$$h_t(x,y) = \frac{1}{\mu\left(B\left(x,t^{1/m}\right)\right)} g\left(\frac{d(x,y)^m}{t}\right), \tag{5}$$

m 是一个正常数，g 是一个正的、有界的、递减函数且对某个 $\varepsilon > 0$，

$$\lim_{r\to\infty} r^{n+2N+\varepsilon} g(r^m) = 0, \tag{6}$$

其中 N 取值与(3)式中相同，n 取值与(2)式中相同。

引理 1 [4]： 对任意的 $1 \le p < \infty$，$BMO_A^p(\chi) = BMO_A(\chi)$，且当 p 取值不同时，范数 $\|\cdot\|_{BMO_A^p(\chi)}$ 是等价的。

引理 2 [4]： 设 $1 \le s \le q$，T 是一个次线性算子。若 T 在 $L^q(\chi)$ 上是有界的，$1 \le q < \infty$，且

$$\left\|M_{A,s}^{\#} Tf\right\|_{L^\infty(\chi)} \le c\|f\|_{L^\infty(\chi)},$$

则对任意的 $q < p < \infty$，T 在 $L^p(\chi)$ 上是有界的。

现在我们介绍与广义逼近恒等式 $\{A_t\}_{t>0}$ 相关的 $WBMO_A^p(\chi)$ 空间。

定义 4： 设 $1 < p < \infty$，对任意的 $f \in \mathrm{M}(\chi)$，任意的球 $B \subset \chi$，称 $f \in WBMO_A^p(\chi)$，如果

$$\|f\|_{WBMO_A^p(\chi)} = \sup_{B\subset\chi} \frac{1}{\mu(B)^{1/p}} \sup_{\lambda>0} \lambda \mu\left(\left\{x \in B : \left|f(x) - A_{t_B} f(x)\right| > \lambda\right\}\right)^{1/p} < \infty. \tag{7}$$

本文的主要结果如下。

定理 1： 设 $1 < p < \infty$，$\{A_t\}_{t>0}$ 是定义 3 中的广义逼近恒等式。则 $BMO_A^p(\chi) = WBMO_A^p(\chi)$，且它们的范数等价。

定理 2： 设 $1 < p < \infty$，χ 是齐型空间。假设 $\{A_t\}_{t>0}$ 是满足(5)和(6)的广义逼近恒等式，且对任意的 $t>0$，$A_t(1) = 1$ 几乎处处成立，即对几乎所有的 $x \in \chi$，$\int_\chi a_t(x,y)\mathrm{d}\mu(y) = 1$，则有 $WBMO^p(\chi) \subset WBMO_A^p(\chi)$，且存在一个正常数 c 使得

$$\|f\|_{WBMO_A^p(\chi)} \le c\|f\|_{WBMO^p(\chi)}. \tag{8}$$

但反向不等式不一定成立。

注： 注意到对(8)式来说，条件 $A_t(1) = 1$ 几乎处处成立是必要的。事实上，对任意的 $x \in \chi$，考虑 $f(x) = 1$，

由(8)式得 $\|1\|_{WBMO_A^p(\chi)}=0$。因此，对任意的 $t>0$， $A_t(1)=1$ 几乎处处成立。

由定理 1 和引理 2，我们可得如下插值定理。

定理 3：设 T 是一个次线性算子。对 $1<p<\infty$，若 T 在 $L^p(\chi)$ 上是有界的，且

$$\|Tf\|_{WBMO_A^p(\chi)}\le c\|f\|_{L^\infty(\chi)},$$

则对任意的 $p<q<\infty$，T 在 $L^q(\chi)$ 上是有界的。

3. 定理证明

为了证明定理 1，我们首先证明以下两个引理。

引理 3：设 $1\le p_1\le p_2<\infty$，则有 $BMO_A^{p_2}(\chi)\subset WBMO_A^{p_1}(\chi)$，且存在一个正常数 c 使得

$$\|\cdot\|_{WBMO_A^{p_1}(\chi)}\le c\|\cdot\|_{BMO_A^{p_2}(\chi)}. \tag{9}$$

证明：设 $f\in BMO_A^{p_2}(\chi)$，由引理 1 得

$$\frac{1}{\mu(B)^{1/p_1}}\lambda\mu\left(\left\{x\in B:\left|f(x)-A_{t_B}f(x)\right|>\lambda\right\}\right)^{1/p_1}=\frac{1}{\mu(B)^{1/p_1}}\left(\int_{\{x\in B:|f(x)-A_{t_B}f(x)|>\lambda\}}\lambda^{p_1}\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p_1}$$

$$\le\frac{1}{\mu(B)^{1/p_1}}\left(\int_{\{x\in B:|f(x)-A_{t_B}f(x)|>\lambda\}}\left|f(x)-A_{t_B}f(x)\right|^{p_1}\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p_1}\le\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B\left|f(x)-A_{t_B}f(x)\right|^{p_1}\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p_1}$$

$$\le\|f\|_{BMO_A^{p_1}(\chi)}\le c\|f\|_{BMO_A^{p_2}(\chi)}$$

引理 4. 设 $1\le p_1<p_2<\infty$，则有 $WBMO_A^{p_2}(\chi)\subset BMO_A^{p_1}(\chi)$，且存在一个正常数 c 使得

$$\|\cdot\|_{BMO_A^{p_1}(\chi)}\le c\|\cdot\|_{WBMO_A^{p_2}(\chi)}. \tag{10}$$

证明：设 $f\in WBMO_A^{p_2}(\chi)$，对任意给定的球 $B\subset\chi$ 和 $\lambda>0$，

$$\frac{1}{\mu(B)^{1/p_2}}\left(\lambda^{p_2}\mu\left(\left\{x\in B:\left|f(x)-A_{t_B}f(x)\right|>\lambda\right\}\right)\right)^{1/p_2}\le\|f\|_{WBMO_A^{p_2}(\chi)},$$

即

$$\mu\left(\left\{x\in B:\left|f(x)-A_{t_B}f(x)\right|>\lambda\right\}\right)\le\|f\|_{WBMO_A^{p_2}(\chi)}^{p_2}\mu(B)\lambda^{-p_2}.$$

取

$$N=\|f\|_{WBMO_A^{p_2}(\chi)}\left(\frac{p_1}{p_2-p_1}\right)^{1/p_2},$$

因此

$$\begin{aligned}\int_B\left|f(x)-A_{t_B}f(x)\right|^{p_1}\mathrm{d}\mu(\chi)&=p_1\int_0^\infty\lambda^{p_1-1}\mu\left(\left\{x\in B:\left|f(x)-A_{t_B}f(x)\right|>\lambda\right\}\right)\mathrm{d}\lambda\\&\le p_1\int_0^N\lambda^{p_1-1}\mu(B)\mathrm{d}\lambda+p_1\int_N^\infty\lambda^{p_1-1}\|f\|_{WBMO_A^{p_2}(\chi)}^{p_2}\mu(B)\lambda^{-p_2}\mathrm{d}\lambda.\\&=\mu(B)N^{p_1}+\frac{p_1}{p_2-p_1}\|f\|_{WBMO_A^{p_2}(\chi)}^{p_2}\mu(B)N^{p_1-p_2}\end{aligned}$$

于是

$$\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B\left|f(x)-A_{t_B}f(x)\right|^{p_1}\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p_1}\le 2\left(\frac{p_1}{p_2-p_1}\right)^{1/p_2}\|f\|_{WBMO_A^{p_2}(\chi)},$$

则

$$\|f\|_{BMO_A^{p_1}(\chi)}\le 2\left(\frac{p_1}{p_2-p_1}\right)^{1/p_2}\|f\|_{WBMO_A^{p_2}(\chi)}.$$

定理 1 的证明：对任意的$1<p<\infty$，由引理 3 可得$BMO_A^p(\chi)\subset WBMO_A^p(\chi)$。因此，我们只需证明$WBMO_A^p(\chi)\subset BMO_A^p(\chi)$。对任意的$f\in WBMO_A^p(\chi)$，由引理 1 和引理 4 得

$$\|f\|_{BMO_A^p(\chi)}\le c\|f\|_{BMO_A(\chi)}\le c\|f\|_{WBMO_A^p(\chi)}.$$

定理 2 的证明：当$1<p<\infty$时，由定理 1 得

$$\|f\|_{WBMO_A^p(\chi)}\le c\|f\|_{BMO_A^p(\chi)},$$

再由命题 2.5 [4]和命题 2.3 [3]可得

$$\|f\|_{BMO_A^p(\chi)}\le c\|f\|_{BMO^p(\chi)}\le c\|f\|_{WBMO^p(\chi)},$$

因此，$\|f\|_{WBMO_A^p(\chi)}\le c\|f\|_{WBMO^p(\chi)}$。

下证(8)的反向不等式不一定成立。

设$\chi=\mathbb{R}$，对任意的$x,y\in\chi$，设$\{A_t\}_{t>0}$的核

$$a_t(x,y)=\frac{1}{2t^{1/m}}\chi_{\left(x-t^{1/m},x+t^{1/m}\right)}(y),$$

对任意的$x\in\chi$，令$f(x)=x$。则对任意的$t>0$，$A_tf(x)=x$且$\|f\|_{WBMO_A^p(\chi)}=0$，但$\|f\|_{WBMO^p(\chi)}\ne 0$。

因此，(8)的反向不等式不一定成立。

参考文献

[1] John, F. and Nirenberg, L. (1961) On Function of Bounded Mean Oscillation. *Communications on Pure & Applied Mathematics*, **14**, 415-426. https://doi.org/10.1002/cpa.3160140317

[2] Fefferman, C. and Stein, E.M. (1972) H^p Spaces of Several Variables. *Acta Mathematica*, **129**, 137-193. https://doi.org/10.1007/BF02392215

[3] 王定怀, 周疆. 一类新型 BMO 空间[J]. 数学学报, 2017, 60(5): 833-846.

[4] Doung, X.T. and Yan, L.X. (2005) New Function Spaces of BMO Type, the John-Nirenberg Inequality, Interpolation, and Applications. *Communications on Pure & Applied Mathematics*, **58**, 1375-1420. https://doi.org/10.1002/cpa.20080

[5] Coifman, R.R. and Weiss, G. (1977) Extensions of Hardy Spaces and Their Use in Analysis. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **83**, 569-645. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1977-14325-5

[6] Coifman, R.R. and Weiss, G. (1971) Analyse Hamonique Non-Commutative sur Certains Espaces Homogènes. Springer Berlin Heidelberg, 242. https://doi.org/10.1007/BFb0058946

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org