Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(3), 304-307
Published Online May 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.83040

Hans汉斯

The Full Automorphism Group of a Nonnormal Arc-Transitive 7-Valent Cayley Graph on the Alternating Group A_{62}

Bo Ling

School of Mathematics and Computer Sciences, Yunnan Minzu University, Kunming, Yunnan
Email: bolinggxu@163.com

Received: May 9th, 2018; accepted: May 22nd, 2018; published: May 29th, 2018

Abstract

Pan *et al.* in [Arc-transitive Cayley graphs on non-ableian simple groups with soluble vertex stabilizers and valency seven, arXiv:1707.09785v1, 2017] constructed an example of a nonnormal arc-transitive 7-valent Cayley graph on the alternating group A_{62}. In this paper, we will prove that the full automorphism group of this graph is isomorphic to A_{63}.

Keywords

Arc-Transitive Graph, Simple Group, Automorphism Group, Nonnormal Cayley Graph

交错群A_{62}上的7度弧传递非正规Cayley图的全自同构群

凌 波

云南民族大学数学与计算机科学学院，云南 昆明
Email: bolinggxu@163.com

收稿日期：2018年5月9日；录用日期：2018年5月22日；发布日期：2018年5月29日

摘 要

潘江敏教授等人在文章[Arc-transitive Cayley graphs on non-ableian simple groups with soluble

文章引用: 凌波. 交错群 A_{62} 上的 7 度弧传递非正规 Cayley 图的全自同构群[J]. 理论数学, 2018, 8(3): 304-307.
DOI: 10.12677/pm.2018.83040

vertex stabilizers and valency seven, arXiv:1707.09785v1, 2017]中构造了交错群A_{62}上的一个7度弧传递非正规Cayley图。在本文中，我们将证明该图的全自同构群同构于A_{63}。

关键词

弧传递图，单群，自同构群，非正规Cayley图

1. 引言

设 Γ 是一个图。其顶点集，图的全自同构群分别记为 $V(\Gamma)$， $Aut(\Gamma)$。我们称图 Γ 为*弧传递图*，如果 $Aut(\Gamma)$ 在其弧集合上传递。

设 G 是一个有限群。取 $S \subseteq G-\{\mathbf{1}\}$，称它为 G 的 *Cayley* 子集。设 S 满足 $S=S^{-1}:=\{s^{-1} \mid s\in S\}$。定义群 G 关于 S 的 *Cayley* 无向图 $\Gamma:=\mathbf{Cay}(G,S)$，其中：

$$V(\Gamma):=G, E(\Gamma):=\{\{g,sg\}\} g\in G, s\in S\}.$$

由定义可知，Γ 的度为$|S|$。Γ 连通当且仅当 $G=\langle S\rangle$。G 的右正则表示 $R(G)\le Aut(\Gamma)$ 且作用在 $V(\Gamma)$ 上正则，即 Cayley 图是点传递图。为了方便，我们仍记这个正则子群为 G。我们称 Cayley 图 $\Gamma=\mathbf{Cay}(G,S)$ 关于 G 是*正规的*，如果 $G \lhd Aut(\Gamma)$，否则称 Γ 为*非正规的*。

单群上 Cayely 图的正规性问题一直都受到国内外学者们的极大关注。例如，李才恒教授在[1]中证明：除了 7 个例外，所有的有限非交换单群上的 3 度弧传递 Cayley 图都是正规的。基于这个工作，徐尚进教授等人在文献[2] [3]中证明：除交错群 A_{47} 上的两个例外，所有有限非交换单群的连通 3 度弧传递 Cayley 图都是正规的。2016 年方新贵教授等人在文献[4]中证明：除单群 $\mathbf{M}_{11}$ 上的两个例外，所有有限非交换单群上的 4 度 2-传递 Cayley 图都是正规的。对于 7 度图，潘江敏教授等人于 2017 年，在文献[5]中证明：除了交错群 A_6，A_{20}，A_{62}，A_{83}，所有有限非交换单群上具有可解点稳定子的 7 度弧传递 Cayley 图都是正规的，并且具体构造了这 4 个单群上的非正规 Cayley 图的例子。本文的一个工作将是计算交错群 $\mathbf{A}_{62}$ 上非正规弧传递 7 度 Cayley 图的全自同构群(即计算文献[5]中例子 5.2 中图的全自同构群)。

本文证明了如下定理：

定理 1.1：设 Γ 是 T 上 7 度 S-弧传递 Cayely 图，其中 S 同构于 A_{63}，T 同构于 A_{62}，则 $Aut(\Gamma)=S\cong A_{63}$。

2. 预备知识

设 G 是有限群，H 是 G 的子群，$\mathbf{C}_G(H)$ 是 H 在 G 中的中心化子，$\mathbf{N}_G(H)$ 是 H 在 G 中的正规化子。则有下面的引理，我们称之为‘N/C’定理，参见文献([6]第 I 章，定理 5.7)。

引理 2.1：设 $H\le G$，则 $\mathbf{N}_G(H)/\mathbf{C}_G(H)$ 同构于 $Aut(H)$ 的一个子群。■

下面的引理给出了 7 度弧传递图的点稳定子群的结构，参考文献([7]定理 1.1]。

引理 2.2：设 Γ 是一个 7 度 (G,s)—传递图，其中 $G\le Aut(\Gamma)$ 且 $s\ge 1$。设 $\alpha\in V(\Gamma)$。则下列之一成立：

a) 如果 G_α 可解，则 $s\le 3$ 且 $|G_\alpha| \| 252$。此外，(s,G_α) 为下表之一(表 1)。

Table 1. The insoluble case
表 1. 可解情形的点稳定子

s	1	2	3
G_α	$\mathbf{Z}_7$，$\mathbf{D}_{14}$，$\mathbf{D}_{14}\times Z_2$，$F_{21}\times Z_3$	F_{42}，$F_{42}\times\mathbf{Z}_2$，$F_{42}\times\mathbf{Z}_3$	$F_{42}\times\mathbf{Z}_6$

Table 2. The insoluble case
表 2. 非可解情形的点稳定子

s	2	3
G_α	$PSL(3,2)$，$ASL(3,2)$，$ASL(3,2)\times Z_2$，A_7，S_7	$PSL(3,2)\times S_4$，$A_7\times A_6$，$S_7\times S_6$　$A_7\times A_6:Z_2$，$Z_2^6:(SL(2,2)\times SL(3,2))$，$[2^{20}]:(SL(2,2)\times SL(3,2))$
完成率	$2^3\cdot3\cdot7$，$2^6\cdot3\cdot7$，$2^7\cdot3\cdot7$，$2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7$，$2^4\cdot3^2\cdot5\cdot7$	$2^6\cdot3^2\cdot7$，$2^6\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$，$2^8\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$，$2^7\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$，$2^7\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$，$2^{10}\cdot3^2\cdot7$，$2^{24}\cdot3^2\cdot7$

b) 如果 G_α 非可解，则 $2\le s\le 3$ $|G_\alpha|\,\big|\,2^{24}\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$。此外，$(s,G_\alpha)$ 为下表之一(表 2)。

3. 定理 1.1 的证明

定理 1.1 的证明：设 Γ 是 T 上的 S-弧传递 Cayley 图，$A=Aut(\Gamma)$，$V=V(\Gamma)$，$S\cong A_{62}$，$T\cong A_{63}$。设 $v\in V$，则由引理 2.1，$|A_v|\,\big|\,2^{24}\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$。首先我们假设 A 在顶点集 V 上非拟本原。设 $N\ne1$ 是 A 的一个在 V 上非传递的极小正规子群。则 $N\cap S\lhd S$。因为 S 同构于 A_{63}，所以 $N\cap S=1$ 或者 S。若 $N\cap S=S$，则 $S\le N\lhd A$。这意味着 N 在 V 上作用传递，这与 N 的选取矛盾。若 $N\cap S=1$，则 $|N|$ 整除 $|A|/|S|$。注意到 $S_v\cong Z_3\times F_{20}$。由引理 2.2，得 $|A_v|/|S_v|\,\big|\,2^{24}\cdot3^2\cdot5$。因为 $|A|/|S|=|A_v|/|S_v|$，所以 $|N|$ 整除 $2^{24}\cdot3^2\cdot5$。

假设 N 非可解。因为 $|N|$ 整除 $2^{24}\cdot3^2\cdot5$ 且 A_5,A_6 和 $PSU(4,2)$ 是仅有的 3 个 $\{2,3,5\}-$ 单群，所以 N 只能同构于下列群之一：A_5,A_5^2,A_6。令 $F=NS$。则 $F=N:S$。因为 $|N||A_{63}|=|N||S|=|F|=|V||F_v|$，所以 $|F_v|=2^2\cdot3^3\cdot5\cdot7$，$2^4\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$ 或者 $2^3\cdot3^4\cdot5\cdot7$。然而由引理 2.1，不存在 7 度弧传递图的点稳定子具有这 3 种情况的阶，矛盾。

假设 N 可解，则 $N\cong\mathbf{Z}_2^r$，$\mathbf{Z}_3^l$ 或者 $\mathbf{Z}_5^k$，其中 $1\le r\le24$，$1\le l\le2$，$1\le k\le2$。由引理 2.1，得 $F/\mathbf{C}_F(N)\le Aut(N)\cong\mathbf{GL}(r,2)$，$\mathbf{GL}(l,3)$ 或者 $\mathbf{GL}(k,5)$。注意到 $N\le\mathbf{C}_F(N)$。如果 $N=\mathbf{C}_F(N)$，那么 $F/\mathbf{C}_F(N)=F/N\cong S\le\mathbf{GL}(r,2)$，$\mathbf{GL}(l,3)$ 或者 $\mathbf{GL}(k,5)$。而 $\mathbf{GL}(r,2)$，$\mathbf{GL}(l,3)$ 或者 $\mathbf{GL}(k,5)$ 中不包含同构于 A_{63} 的子群，其中 $1\le r\le24$，$1\le l\le2$，$1\le k\le2$。所以，$N<\mathbf{C}_F(N)$，$1\ne\mathbf{C}_F(N)/N\lhd F/N\cong S$。进而得，$S=\mathbf{C}_F(N)/N$，即，$S$ 中心化 N。所以 $F=N\times S$。因此，$F_v/S_v\cong F/S\cong N$。这意味着 $F_v=S_v\cdot N$，由引理 2.2，$F_v\cong F_{42}\times Z_3$ 或者 $F_{42}\times Z_6$。由 Magma 的计算，不存在具有这两种点稳定子的 F-弧传递的 7 度 Cayley 图，矛盾。

因此 A 在顶点集 V 上作用是拟本原的。因为 $|V|=|G|$ 不是一个素数的方幂，所以 A 不是 **HA** 型的。设 M 是 A 的基柱。则因为 A 在 V 上是拟本原的，得 M 在 V 上作用传递。又因为 $A=TA_v$，所以 $|T|\,\big|\,|M|\,\big|\,2^{24}\cdot3^4\cdot5\cdot7\cdot|T|$。因为 $T\cong A_{62}$，所以必存在一个素数 p，使得 p 恰好整除 $|M|$。进而得，M 不同构于 D^d，其中 $d\ge2$，D 为一个非交换单群。这可以推出 A 不是 **HS**，**HC**，**CD**，**SD**，**TW** 或者 **PA** 型的。因此，A 只能是 **AS** 型，即 A 是几乎单的。因为 $M\cap S\lhd S$，S 是非交换单群，所以 $M\cap S=1$ 或者 S。如果 $M\cap S=1$，则 $|M|\,\big|\,|A|/|S|\,\big|\,2^{24}\cdot3^2\cdot5^2$。这与 $|T|\,\big|\,|M|$ 矛盾。因此，$M\cap S=S$，进而 $S\le M$。这意味着 $|M:S|\,\big|\,|A:S|\,\big|\,2^{24}\cdot3^2\cdot5^2$。因为 **A** 是几乎单群，所以 M 是一个非交换单群。由([8] p.135-136)，我们可以推出 $M=S$。因此，$A\le Aut(M)\cong S_{63}$。如果 $A\cong S_{63}$，则 $|A_v|=|A|/|T|=126$。由引理 2.2，$A_v\cong F_{42}\times Z_3$。由 Mamga 的计算，不

存在具有点稳定子 $F_{42}\times Z_3$ 的 S_{63}-弧传递的 7 度 Cayley 图，矛盾。所以 $A\cong A_{63}$ 证毕。■

基金项目

国家自然科学基金项目(11701503)；云南省教育厅科学研究基金项目(2017ZZX086)。

参考文献

[1] Li. C.H. (1996) Isomorphisms of Finite Cayley Graphs. The University of Western Australia, Perth.

[2] Xu, S.J., Fang, X.G., Wang, J., *et al.* (2005) On Cubic *s*-Arc Transitive Cayley Graphs of Finite Simple Groups. *European Journal of Combinatorics*, **26**, 133-143. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2003.10.015

[3] Xu, S.J., Fang, X.G., Wang, J., *et al.* (2007) 5-Arc Transitive Cubic Cayley Graphs on Finite Simple Groups. *European Journal of Combinatorics*, **28**, 1023-1036. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2005.07.020

[4] Fang, X.G., Wang, J. and Zhou, S.M. (2016) Tetravalent 2-Transitive Cayley Graphs of Finite Simple Groups and Their Automorphism Groups. arXiv:1611.06308v1.

[5] Pan, J.M., Yin, F.G. and Ling, B. (2017) Arc-Transitive Cayley Graphs on Non-Ableian Simple Groups with Soluble Vertex Stabilizers and Valency Seven. arXiv:1707.09785v1.

[6] 徐明曜. 有限群导引(上) [M]. 第二版. 北京: 科学出版社, 1999.

[7] Guo, S.T., Li, Y.T. and Hua, X.H. (2016) (G,s)-Transitive Graphs of Valency 7. *Algebra Colloquium*, **23**, 493-500. https://doi.org/10.1142/S100538671600047X

[8] Gorenstein, D. (1982) Finite Simple Groups. Plenum Press, New York.