Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(4), 360-364
Published Online July 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.84048

A Correspondence between Solutions of a Fractional System and Solutions of a Specific Fractional Equation

Qihan He, Chenxi Li*, Wenshan Ruan

College of Mathematics and Information Sciences, Guangxi University, Nanning Guangxi
Email: *heqihan277@163.com

Received: Jun. 19th, 2018; accepted: Jul. 3rd, 2018; published: Jul. 10th, 2018

Abstract

To better understand the existence and behavior of the solution to the following fractional equations

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u = f(u,v), x\in\Omega,\\ (-\Delta)^s u = g(u,v), x\in\Omega,\\ u=v=0, \Re^N\setminus\Omega,\end{cases}$$

where $0<s<1$, $(-\Delta)^s$ is the fractional Laplacian operator, $\Omega\subset\Re^N(N\geq 1)$ is a region with a smooth boundary (which can be a full space) and f,g satisfy some certain conditions. In this paper, we will prove a correspondence between the solutions of the above system and the solutions of a particular fractional equation, which, combining the non-existence, existence, and uniqueness of the solutions of a particular fractional equation, can give out the non-existence, existence and uniqueness of the solutions of the above system.

Keywords

System of Equation, Correspondence

分数阶方程组的解与特定分数阶方程的解之间的一个对应关系

何其涵，李晨曦*，阮雯钐

广西大学，数学与信息科学学院，广西 南宁

*通讯作者。

文章引用: 何其涵, 李晨曦, 阮雯钐. 分数阶方程组的解与特定分数阶方程的解之间的一个对应关系[J]. 理论数学, 2018, 8(4): 360-364. DOI: 10.12677/pm.2018.84048

Email: *heqihan277@163.com

收稿日期：2018年6月19日；录用日期：2018年7月3日；发布日期：2018年7月10日

摘 要

为了更好地了解下述分数阶方程组

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u = f(u,v), x\in\Omega,\\ (-\Delta)^s u = g(u,v), x\in\Omega,\\ u=v=0, \Re^N\setminus\Omega,\end{cases}$$

的解的存在性及其性态，其中 $0<s<1$，$(-\Delta)^s$ 是分数阶拉普拉斯算子，$\Omega\subset\Re^N\,(N\ge 1)$ 是一个有光滑边界的区域(可以是全空间)且 f,g 满足某些特定条件，我们在本文中将证明上述方程组的解与某个特定的分数阶方程的解之间的一个对应关系以便于通过特定的分数阶方程组的解的非存在性、存在性以及唯一性来得到上述方程组的解的非存在性、存在性和唯一性。

关键词

方程组，对应关系

1. 引言

在本文中，我们将研究以下分数阶椭圆型方程组

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u = f(u,v), x\in\Omega,\\ (-\Delta)^s u = g(u,v), x\in\Omega,\\ u=v=0, \Re^N\setminus\Omega,\end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $0<s<1$，$(-\Delta)^s$ 是分数阶拉普拉斯算子，$\Omega\in\Re^N$ 是一个边界光滑的区域且 f,g 满足如下条件：

(C$_1$) $\exists x_0>0$ 使得 $f(1,x_0)x_0-g(1,x_0)=0$ 且下述分数阶方程

$$\begin{cases}(-\Delta)^s = f(u,x_0u), x\in\Omega,\\ u=0, \Re^N\setminus\Omega,\end{cases} \tag{1.2}$$

存在至少一个非零解 u_0；

(C$_2$) 对于任意的 $t\in\Re$，有 $F(tu,tu)=t^{p+1}F(u,v)$，其中 $F(u,v):=f(u,v)v-g(u,v)u$；

(C$_3$) $\exists x_0>0$ 使得 $f(1,x_0)x_0-g(1,x_0)=0$，当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f(1,x)x-g(1,x)<0$ 且当 $x\in(x_0,+\infty)$，$f(1,x)x-g(1,x)>0$。

He 和 Peng 在文献[1]中考虑了下述合作的，可能不具有变分结构的方程组

$$\begin{cases} -\Delta u+\lambda u=\mu_1|u|^{2p}u+\beta_1|v|^{q_1}|u|^{p_1-1}u, x\in\Omega, \\ -\Delta v+\lambda v=\mu_2|v|^{2p}v+\beta_2|u|^{q_2}|v|^{p_2-1}u, x\in\Omega, \\ u=v=0, x\in\partial\Omega, \end{cases}$$

其中，$\lambda\in\Re,\beta_i>0,\mu_i<0,q_i>0,1<p_i+q_i=2p+1(i=1,2),\Omega\subset\Re^N(N\geq 1)$ 既可以是有界区域也可以是无界区域，并得到了其正解与其所对应的单个方程的正解之间的一个关系。最近，何其涵等考虑了下述椭圆方程组

$$\begin{cases} -\Delta u=f(u,v), x\in\Omega, \\ -\Delta v=g(u,v), x\in\Omega, \\ u=v=0, x\in\partial\Omega \end{cases}$$

并在其非线性项 f,g 满足(C_1) (C_2) (C_3)条件下证明了上述方程组的解与其所对应的单个方程的解之间的一个对应关系以及应用此对应关系和其所对应的单个方程的解的情况来得到方程组的解的非存在性、存在性和唯一性[2]。但是，关于分数阶方程组的类似于[2]的结果仍没有。因此，我们想研究分数阶方程组(1.1)的解与其所对应的单个分数阶方程的解之间的一个对应关系。

2. 主要结果及其证明

我们可以得出关于解的存在性的结论：

定理 1. 若假设(C_1) (C_2)成立，则 (u_0,x_0u_0) 一定是分数阶方程组(1.1)的一个非零解。

证明： 假设(C_1)成立，那么不妨假设问题(1.2)有一个非零解 u_0。即 u_0 满足方程

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u=f(u,x_0u), x\in\Omega, \\ u=0, x\in\Re^N\setminus\Omega \end{cases}$$

又因为(C_2)成立，所以 $\frac{F(u_0,x_0u_0)}{u_0x_0}=\frac{u^p(F(1,x_0))}{u_0x_0}=0$ 从而，$(-\Delta)^s u_0=\frac{g(u_0,x_0u_0)}{x_0}, x\in\Omega$。这说明 $v_0=x_0u_0$ 是问题 $\begin{cases} (-\Delta)^s v=g(u_0,v), x\in\Omega, \\ v=0, x\in\partial\Omega, \end{cases}$ 的一个非零解。因此，$(u_0,v_0):=(u_0,x_0u_0)$ 是分数阶方程组(1.1)的一个非零解。

定理 1 告诉我们：若分数阶方程(1.2)存在非零解，则分数阶方程组(1.1)也必定有一个解。但是，下面定理却告诉我们：如果分数阶方程组(1.1)有一个正解，则分数阶方程(1.2)也一定存在一个正解，从而得到它们的正解之间的一个一一对应关系。

定理 2. 若(C_2) (C_3)成立，那么分数阶方程组(1.1)的每一个正的经典解 (u_0,v_0) 一定满足：$\frac{v_0}{u_0}=x_0$。因此，在此情况下，u_0 就是单个分数阶方程问题(1.2)的一个正解。

证明：假设 (u_0,v_0) 是分数阶方程组(1.1)的一个正的经典向量解。令 $(u,v):=\left(u_0,\frac{1}{x_0}v_0\right)$，其中，$x_0$ 是方程 $f(1,x)x-g(1,x)=0$ 的唯一正根。那么，(u,v) 是以下分数阶方程组

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u=f(u,x_0v), x\in\Omega, \\ (-\Delta)^s v=\frac{1}{x_0}g(u,x_0v), x\in\Omega, \\ u=v=0, x\in\Re^N\setminus\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

的一个正的经典解。记$\Omega_+ := \{x\in\Omega : u(x) > v(x)\}$，$\Omega_- := \{x\in\Omega : u(x) < v(x)\}$，那么区域$\Omega_+$和$\Omega_-$显然是$C^1$光滑的。(2.1)中的一式乘$v$，二式乘$u$，在区域$\Omega_+$上进行积分并相减，可以得到

$$\int_{\Omega_+}\left[(-\Delta)^s u\cdot v-(-\Delta)^s v\cdot u\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{x_0}\int_{\Omega_+}u^{p+1}\left(f\left(1,x_0\frac{v}{u}\right)x_0\frac{v}{u}-g\left(1,x_0\frac{v}{u}\right)\right)\mathrm{d}x \tag{2.2}$$

由$(-\Delta)^s$，Ω_+和Ω_-的定义有

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_+}\left[(-\Delta)^s u\cdot v-(-\Delta)^s v\cdot u\right]\mathrm{d}x\\
&=\int_{\Omega_+}\int_{\mathfrak{R}^N}\frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}y\cdot v(x)\mathrm{d}x-\int_{\Omega_+}\int_{\mathfrak{R}^N}\frac{v(x)-v(y)}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}y\cdot u(x)\mathrm{d}x\\
&=\int_{\Omega_+}\int_{\mathfrak{R}^N}\frac{u(x)v(x)-u(y)v(x)}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x-\int_{\Omega_+}\int_{\mathfrak{R}^N}\frac{v(x)u(x)-v(y)u(x)}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
&=\int_{\Omega_+}\int_{\mathfrak{R}^N}\frac{u(x)v(y)-u(y)v(x)}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
&=\int_{\Omega_+}\int_{\Omega_+\cup\Omega_-}\frac{u(x)v(y)-u(y)v(x)}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
&=\int_{\Omega_+}\int_{\Omega_+\cup\Omega_-}\frac{(u(x)-v(x))v(y)+(v(y)-u(y))v(x)}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
&=\int_{\Omega_+}\int_{\Omega_+}\frac{(u(x)-v(x))v(y)+(v(y)-u(y))v(x)}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_{\Omega_+}\int_{\Omega_-}\frac{(u(x)-v(x))v(y)+(v(y)-u(y))v(x)}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
&=\int_{\Omega_+}\int_{\Omega_+}\frac{(u(x)-v(x))v(y)}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\int_{\Omega_+}\int_{\Omega_+}\frac{(v(y)-u(y))v(x)}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_{\Omega_+}\int_{\Omega_-}\frac{(u(x)-v(x))v(y)}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\int_{\Omega_+}\int_{\Omega_-}\frac{(v(y)-u(y))v(x)}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{2.3}$$

由富比尼定理，我们可以得到

$$\int_{\Omega_+}\int_{\Omega_+}\frac{(u(x)-v(x))v(y)}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\int_{\Omega_+}\int_{\Omega_+}\frac{(v(y)-u(y))v(x)}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x=0 \tag{2.4}$$

且有

$$\int_{\Omega_+}\int_{\Omega_-}\frac{(u(x)-v(x))v(y)}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\int_{\Omega_+}\int_{\Omega_-}\frac{(v(y)-u(y))v(x)}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x>0 \tag{2.5}$$

所以由(2.2)~(2.5)得到

$$\frac{1}{x_0}\int_{\Omega_+}u^{p+1}\left(f\left(1,x_0\frac{v}{u}\right)x_0\frac{v}{u}-g\left(1,x_0\frac{v}{u}\right)\right)\mathrm{d}x>0 \tag{2.6}$$

由条件(C_3)，Ω_+的定义以及u,v的正性，我们得到：对于任意的$x\in\Omega_+$，都有

$$\frac{1}{x_0}u^{p+1}\left(f\left(1,x_0\frac{v}{u}\right)x_0\frac{v}{u}-g\left(1,x_0\frac{v}{u}\right)\right)<0$$

因此，

$$\frac{1}{x_0}\int_{\Omega_+}u^{p+1}\left(f\left(1,x_0\frac{v}{u}\right)x_0\frac{v}{u}-g\left(1,x_0\frac{v}{u}\right)\right)\mathrm{d}x<0$$

这与(2.6)矛盾。因此，可以推出 $\Omega_+=\Phi$ 。

类似地，在区域 Ω_- 上重复上面的过程可以推出 $\Omega_+=\Phi$ 。

因此， $u=v$ 证毕。

致 谢

感谢国家自然科学基金和广西自然科学基金的支持(国家自科基金号：11701107，广西自科基金号：2017GXNSFBA198190)。

参考文献

[1] He, Q. and Peng, S. (2016) Synchronized Vector Solutions to an Elliptic System. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **144**, 4055-4063. https://doi.org/10.1090/proc/13160

[2] 何其涵, 李彦哲, 阮雯钐. 一类椭圆问题的解的存在性以及唯一性[J]. 广西大学学报(自然科学版), 2018, 43(2): 855-859.