Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(6), 624-631
Published Online November 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.86083

On Anti-Hermitian Solutions of the Reduced Biquaternion Matrix Equation $AXA^H + BYB^H = C$

Yong Tian, Shifang Yuan*, Mingzhao Li

School of Mathematics and Computational Science, Wuyi University, Jiangmen Guangdong
Email: *yuanshifang305@163.com

Received: Oct. 15th, 2018; accepted: Oct. 27th, 2018; published: Nov. 8th, 2018

Abstract

In this paper, we discuss Anti-Hermitian solutions of reduced biquaternion matrix equation $AXA^H + BYB^H = C$, where *A*,*B* are known reduced biquaternion matrices with suitable size, *C* is a known reduced biquaternion anti-Hermitian matrix with suitable size, and *X*,*Y* are unknown reduced biquaternion anti-Hermitian square matrices with suitable size. The objective of this paper is to establish a necessary and sufficient condition for the existence of a solution and a solution expression.

Keywords

Matrix Equation, Reduced Biquaternion Matrices, Kronecker Product

弱双四元数矩阵方程$AXA^H + BYB^H = C$的反Hermite解

田　勇，袁仕芳*，李明照

五邑大学数学与计算科学学院，广东 江门
Email: *yuanshifang305@163.com

收稿日期：2018年10月15日；录用日期：2018年10月27日；发布日期：2018年11月8日

摘　要

在本文中，我们讨论弱双四元数矩阵方程 $AXA^H + BYB^H = C$ 的反Hermite解，其中矩阵*A*,*B*是已知的弱

*通讯作者。

文章引用: 田勇, 袁仕芳, 李明照. 弱双四元数矩阵方程 $AXA^H + BYB^H = C$ 的反 Hermite 解[J]. 理论数学, 2018, 8(6): 624-631. DOI: 10.12677/pm.2018.86083

双四元数矩阵，*C*是已知的弱双四元数反Hermite矩阵，*X,Y*是未知的弱双四元数反Hermite方阵。本文的目标是建立解存在的充分必要条件和通解表达式。

关键词

矩阵方程，弱双四元数矩阵，Kronecker积

1. 引言

矩阵方程是矩阵理论中的一个重要内容，在控制和系统理论、稳定性理论、神经网络等方面有着广泛的应用。例如，控制理论长期以来一直为矩阵方程提供丰富的动力来源，Lyapunov 方程 $A^H X + XA = B$ 有唯一的 Hermitian 解，当且仅当对于矩阵 A 的所有特征值 λ_i 和 λ_j 有 $\lambda_i + \overline{\lambda}_j \neq 0$ [1] [2]。由于它们的重要应用，实数、复数和四元数矩阵方程如 $AX = B$， $AXB = C$， $AXB + CYD = E$ 和

$$AXA^H + BYB^H = C \tag{1}$$

引起了许多研究者的极大关注。弱双四元数的概念最早是由 Schütte 和 Wenzel 提出的[3]。Sir William Rowan Hamilton 在 1843 年引入了四元数[4]，弱双四元数和四元数之间的主要区别是四元数的乘法是不可交换的，而弱双四元数的乘法是可交换的。此外，四元数矩阵和弱双四元数矩阵都可以用来表示彩色图像[5]。

本文用 $R^{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 阶实矩阵集合， $C^{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 阶复矩阵集合， $SR^{n\times n}$ 表示 $n\times n$ 阶实对称矩阵集合， $ASR^{n\times n}$ 表示 $n\times n$ 阶实反对称矩阵集合， Q_{RB} 表示弱双四元数矩阵集合， Q_{RB}^{n} 表示 n 维弱双四元数列向量集合， $Q_{RB}^{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 阶弱双四元数矩阵集合， $AHQ_{BR}^{n\times n}$ 表示 $n\times n$ 阶弱双四元数反 Hermite 矩阵集合。对于每一个 $A\in C^{m\times n}$， $\mathrm{Re}(A)$ 表示矩阵 A 的实部， $\mathrm{Im}(A)$ 表示矩阵 A 的虚部。对于 $A\in Q_{RB}^{m\times n}$， $\overline{A}$ 表示矩阵 A 的共轭矩阵，A^{T} 表示矩阵 A 的转置矩阵，A^H 表示 A 的共轭转置矩阵 A。I_n 表示 n 阶单位矩阵。$0_{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 阶零矩阵。对于 $A\in C^{m\times n}$， A^{+} 表示矩阵 A 的 Moore-Penrose 广义逆。

对于 $A\in Q_{RB}^{n\times n}$，若 $A^H = -A$，则称它是反 Hermite 的。用 $AHQ_{BR}^{n\times n}$ 表示 $n\times n$ 阶弱双四元数反 Hermite 集合。本文主要考虑方程(1)的反 Hermite 解，使用的工具是弱双四元数矩阵的复表示，Kronecker 积，矩阵列拉直算子以及 Moore-Penrose 广义逆。研究的问题描述如下：

问题 1： 设 $A\in Q_{RB}^{m\times n}$， $B\in Q_{RB}^{m\times n}$ 和 $C\in AHQ_{RB}^{m\times m}$，求

$$H_E = \left\{X, Y \mid X, Y\in AHQ_{RB}^{n\times n}, AXA^H + BYB^H = C\right\} \tag{2}$$

对于 $q\in Q_{RB}$，则 q 可以表示为

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \tag{3}$$

其中 $q_0, q_1, q_2, q_3 \in R$， $i^2 = k^2 = -1, j^2 = 1, ij = ji = k, jk = kj = i, ki = ik = -j$ 。弱双四元数 q 的共轭为：

$$\overline{q} = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k \tag{4}$$

q 还可以表示为

$$q = c_1 + c_2 j,$$

其中 $c_1,c_2\in C$， $c_1=q_0+q_1i,c_2=q_2+q_3i$。对于弱双四元数 $q=c_1+c_2j,c_1,c_2\in C$， 定义弱双四元数。

q 的复数矩阵表示为

$$f(q)=\begin{bmatrix}c_1 & c_2\\ c_2 & c_1\end{bmatrix}.$$

对 $q,q'\in Q_{RB}$， 显然有 $f(qq')=f(q)f(q')$。

若矩阵 $A\in Q_{RB}^{m\times n}$， 则矩阵 A 可以唯一表示为 $A=A_1+A_2j$， 其中 $A_1,A_2\in C^{m\times n}$ 。

弱双四元数矩阵 A 的复表示为

$$F(A)=\begin{bmatrix}A_1 & A_2\\ A_2 & A_1\end{bmatrix}\in C^{2m\times 2n}.$$

$F(A)$ 是由 A 唯一决定。对于 $A\in Q_{RB}^{m\times n},B\in Q_{RB}^{n\times s}$， 有 $F(AB)=F(A)F(B)$。由定义易知，矩阵 A 可以唯一表示为

$$A=\mathrm{Re}(A_1)+\mathrm{Im}(A_1)i+\mathrm{Re}(A_2)j+\mathrm{Im}(A_2)k \tag{5}$$

其中 $\mathrm{Re}(A_1),\mathrm{Im}(A_1),\mathrm{Re}(A_2),\mathrm{Im}(A_2)\in R^{m\times n}$ 。弱双四元数矩阵 A 的共轭矩阵为

$$\overline{A}=\mathrm{Re}(A_1)-\mathrm{Im}(A_1)i-\mathrm{Re}(A_2)j-\mathrm{Im}(A_2)k.$$

对于 $A=(a_{ij})\in Q_{RB}^{m\times n}$， $B=(b_{ij})\in Q_{RB}^{p\times s}$， 矩阵 A 与矩阵 B 的 Kronecker 积 $A\otimes B=(a_{ij}B)\in Q_{RB}^{mp\times ns}$ 。对于弱双四元数矩阵 A,B,C,D,E,F,G,H,K， 有

$$(A,B,C)\otimes D=(A\otimes D,B\otimes D,C\otimes D)，\begin{pmatrix}E & F\\ G & H\end{pmatrix}\otimes K=\begin{pmatrix}E\otimes K & F\otimes K\\ G\otimes K & H\otimes K\end{pmatrix}.$$

对于矩阵 $A=(a_{ij})\in Q_{RB}^{m\times n}$， 设 $a_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj}),(j=1,2,\cdots,n)$， 矩阵 A 的列拉直算子为：

$$vec(A)=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}.$$

对于任意弱双四元数 $q=c_1+c_2j\in Q_{RB}$， 我们定义一个算子 $\Phi_q=(c_1,c_2)$。定义弱双四元数矩阵对应的算子为

$$\Phi_A=[A_1,A_2].$$

对于算子 Φ_A， 它具有以下性质：

引理 1： 设 k 是一个实数， $A,B\in Q_{RB}^{m\times n}$， $C\in Q_{RB}^{n\times t}$， 有

i) $A=B$ 当且仅当 $\Phi_A=\Phi_B$； ii) $\Phi_{A+B}=\Phi_A+\Phi_B$， $\Phi_{kA}=k\Phi_A$； iii) $\Phi_{AC}=\Phi_A F(C)$。

2. $vec(\Phi_{AXB})$的结构

对于 $A\in C^{m\times n}$， $B\in C^{n\times s}$， $C\in C^{s\times t}$， 我们已知

$$vec(ABC)=(C^{\mathrm{T}}\otimes A)vec(B) \tag{6}$$

在弱双四元数矩阵中，(6)式不再成立。类似文献[6]引理 4 有

引理 2： 设 $A=A_1+A_2j\in Q_{RB}^{m\times n}$，$B=B_1+B_2j\in Q_{RB}^{n\times s}$，$C=C_1+C_2j\in Q_{RB}^{s\times t}$，其中 $A_1,A_2\in C^{m\times n}$，$B_1,B_2\in C^{n\times s}$，$C_1,C_2\in C^{s\times t}$ 。有

$$vec(\Phi_{ABC})=\begin{bmatrix}C_1^{\mathrm{T}}\otimes A_1+C_2^{\mathrm{T}}\otimes A_2 & C_2^{\mathrm{T}}\otimes A_1+C_1^{\mathrm{T}}\otimes A_2\\ C_2^{\mathrm{T}}\otimes A_1+C_1^{\mathrm{T}}\otimes A_2 & C_1^{\mathrm{T}}\otimes A_1+C_2^{\mathrm{T}}\otimes A_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}vec(B_1)\\ vec(B_2)\end{bmatrix} \tag{7}$$

定义 1：设 $A=\left(a_{ij}\right)\in Q_{RB}^{n\times n}$，设 $a_1=\left(a_{11},\sqrt{2}a_{21},\cdots,\sqrt{2}a_{n1}\right)$，$a_2=\left(a_{22},\sqrt{2}a_{32},\cdots,\sqrt{2}a_{n2}\right)$，…，$a_{n-1}=\left(a_{(n-1)(n-1)},\sqrt{2}a_{n(n-1)}\right)$，$a_n=a_{nn}$。定义一个列向量 $vec_S\left(A\right)$：

$$vec_S\left(A\right)=\left(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},a_n\right)^{\mathrm{T}}\in Q_{RB}^{\frac{n(n+1)}{2}} \tag{8}$$

定义 2：设 $B=\left(b_{ij}\right)\in Q_{RB}^{n\times n}$，设 $b_1=\left(b_{21},b_{31},\cdots,b_{n1}\right)$，$b_2=\left(b_{32},b_{42},\cdots,b_{n2}\right)$，…，$b_{n-2}=\left(b_{(n-1)(n-2)},b_{n(n-2)}\right)$，$b_{n-1}=b_{n(n-1)}$，定义一个列向量 $vec_A\left(B\right)$：

$$vec_A\left(B\right)=\sqrt{2}\left(b_1,b_2,\cdots,b_{n-2},b_{n-1}\right)^{\mathrm{T}}\in Q_{RB}^{\frac{n(n-1)}{2}} \tag{9}$$

引理 3 [6]：设 $X\in R^{n\times n}$，则

i)

$$X\in SR^{n\times n}\Leftrightarrow vec\left(X\right)=K_S vec_S\left(X\right) \tag{10}$$

其中 $vec_S\left(X\right)$ 定义参照(8)式定义。$K_S\in R^{n^2\times\frac{n(n+1)}{2}}$，

$$K_S=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \sqrt{2}e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-1} & e_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_1 & \cdots & 0 & 0 & \sqrt{2}e_2 & e_3 & \cdots & e_n & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & e_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \sqrt{2}e_{n-1} & e_n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e_1 & 0 & 0 & \cdots & e_2 & \cdots & 0 & e_{n-1} & \sqrt{2}e_n \end{bmatrix},$$

其中 e_i 是 n 阶单位矩阵 I_n 的第 i 个列向量。

ii)

$$X\in ASR^{n\times n}\Leftrightarrow vec\left(X\right)=K_A vec_A\left(X\right) \tag{11}$$

其中 $vec_A\left(X\right)$ 定义参照(9)式定义。$K_A\in R^{n^2\times\frac{n(n-1)}{2}}$，

$$K_A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} e_2 & e_3 & \cdots & e_{n-1} & e_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -e_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & e_3 & \cdots & e_{n-1} & e_n & \cdots & 0 \\ 0 & -e_1 & \cdots & 0 & 0 & -e_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -e_1 & 0 & 0 & \cdots & -e_2 & 0 & \cdots & e_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -e_1 & 0 & \cdots & 0 & -e_2 & \cdots & -e_{n-1} \end{bmatrix},$$

其中 e_i 是 n 阶单位矩阵 I_n 的第 i 个列向量。显然，有 $K_S^{\mathrm{T}}K_S=I_{\frac{n(n+1)}{2}}$，$K_A^{\mathrm{T}}K_A=I_{\frac{n(n-1)}{2}}$。

对于任意 $X=X_1+X_2j\in Q_{RB}^{n\times n}$，$X_1,X_2\in C^{n\times n}$，有

$$X\in AHQ_{RB}^{n\times n}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{Re}\left(X_1\right)^{\mathrm{T}}=-\mathrm{Re}\left(X_1\right),\mathrm{Im}\left(X_1\right)^{\mathrm{T}}=\mathrm{Im}\left(X_1\right)\\ \mathrm{Re}\left(X_2\right)^{\mathrm{T}}=\mathrm{Re}\left(X_2\right),\mathrm{Im}\left(X_2\right)^{\mathrm{T}}=\mathrm{Im}\left(X_2\right)\end{cases}。$$

设

$$M=\begin{bmatrix} K_A & iK_S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_S & iK_S \end{bmatrix}.$$

引理 4：对于 $X = X_1 + X_2 j \in AHQ_{RB}^{n\times n}$，那么

$$\begin{bmatrix} vec(X_1) \\ vec(X_2) \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} vec_A(\mathrm{Re}(X_1)) \\ vec_s(\mathrm{Im}(X_1)) \\ vec_s(\mathrm{Re}(X_2)) \\ vec_s(\mathrm{Im}(X_2)) \end{bmatrix}. \tag{12}$$

证明：设 $X = X_1 + X_2 j \in AHQ_{RB}^{n\times n}$，我们有

$$\begin{bmatrix} vec(X_1) \\ vec(X_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} vec(\mathrm{Re}(X_1)) + ivec(\mathrm{Im}(X_1)) \\ vec(\mathrm{Re}(X_2)) + ivec(\mathrm{Im}(X_2)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_A vec_A(\mathrm{Re}(X_1)) + iK_S vec_S(\mathrm{Im}(X_1)) \\ K_S vec_S(\mathrm{Re}(X_2)) + iK_S vec_S(\mathrm{Im}(X_2)) \end{bmatrix}$$

$$= M \begin{bmatrix} vec_A(\mathrm{Re}(X_1)) \\ vec_s(\mathrm{Im}(X_1)) \\ vec_s(\mathrm{Re}(X_2)) \\ vec_s(\mathrm{Im}(X_2)) \end{bmatrix}.$$

由引理 2 和引理 4 得

引理 5：设 $A = A_1 + A_2 j \in Q_{RB}^{m\times n}$， $X = X_1 + X_2 j \in AHQ_{RB}^{n\times n}$， $B = B_1 + B_2 j \in Q_{RB}^{n\times s}$，其中 $A_1, A_2 \in C^{m\times n}$，$X_1, X_2 \in C^{n\times n}$， $B_1, B_2 \in C^{n\times s}$。

$$vec(\Phi_{AXB}) = \begin{bmatrix} B_1^{\mathrm{T}} \otimes A_1 + B_2^{\mathrm{T}} \otimes A_2 & B_2^{\mathrm{T}} \otimes A_1 + B_1^{\mathrm{T}} \otimes A_2 \\ B_2^{\mathrm{T}} \otimes A_1 + B_1^{\mathrm{T}} \otimes A_2 & B_1^{\mathrm{T}} \otimes A_1 + B_2^{\mathrm{T}} \otimes A_2 \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} vec_A(\mathrm{Re}(X_1)) \\ vec_s(\mathrm{Im}(X_1)) \\ vec_s(\mathrm{Re}(X_2)) \\ vec_s(\mathrm{Im}(X_2)) \end{bmatrix} \tag{13}$$

3. 矩阵方程(1)的解

引理 6 [7]：设 $A \in R^{m\times n}$， $b \in R^n$，则矩阵方程 $Ax = b$ 有解的充要条件是

$$AA^+ b = b \tag{14}$$

当它相容时，其通解可以表示为

$$x = A^+ b + (I_n - A^+ A) y \tag{15}$$

其中 $y \in R^n$ 是一个任意的向量。当 $rank(A) = n$ 时， $x = A^+ b$ 是方程 $Ax = b$ 的唯一解。

对于 $A = A_1 + A_2 j \in Q_{RB}^{m\times n}$， $B = B_1 + B_2 j \in Q_{RB}^{m\times n}$ 和 $C = C_1 + C_2 j \in AHQ_{RB}^{m\times m}$，令

$$P_1 = \begin{bmatrix} \overline{A_1} \otimes A_1 - A_2 \otimes A_2 & -A_2 \otimes A_1 + \overline{A_1} \otimes A_2 \\ -A_2 \otimes A_1 + \overline{A_1} \otimes A_2 & \overline{A_1} \otimes A_1 - A_2 \otimes A_2 \end{bmatrix} M,$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} \overline{B_1} \otimes B_1 - B_2 \otimes B_2 & -B_2 \otimes B_1 + \overline{B_1} \otimes B_2 \\ -B_2 \otimes B_1 + \overline{B_1} \otimes B_2 & \overline{B_1} \otimes B_1 - B_2 \otimes B_2 \end{bmatrix} M, \quad e = \begin{bmatrix} vec(\mathrm{Re}(C_1)) \\ vec(\mathrm{Re}(C_2)) \\ vec(\mathrm{Im}(C_1)) \\ vec(\mathrm{Im}(C_2)) \end{bmatrix}.$$

定理 7：对于 $A \in Q_{RB}^{m\times n}$，$B \in Q_{RB}^{m\times p}$，$C \in Q_{RB}^{m\times m}$，$X \in AHQ_{RB}^{n\times n}$，$Y \in AHQ_{RB}^{p\times p}$，设 $M_n = diag(K_A, K_S, K_S, K_S)$，

$K_A \in R^{n^2 \times \frac{n(n-1)}{2}}$，$K_s \in R^{n^2 \times \frac{n(n+1)}{2}}$，$M_n \in R^{4n^2 \times (2n^2+n)}$，$M_p = diag(K'_A, K'_S, K'_S, K'_S)$，$K'_A \in R^{p^2 \times \frac{p(p-1)}{2}}$，$K'_S \in R^{p^2 \times \frac{p(p+1)}{2}}$，$M_p \in R^{4p^2 \times (2p^2+p)}$。

则方程(1)有反 Hermite 解的充要条件是：

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Re}(P_1) & \mathrm{Re}(P_2) \\ \mathrm{Im}(P_1) & \mathrm{Im}(P_2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{Re}(P_1) & \mathrm{Re}(P_2) \\ \mathrm{Im}(P_1) & \mathrm{Im}(P_2) \end{bmatrix}^+ e = e.$$

在有解的条件下，记方程(1)的解集合 AH_E。则

$$AH_E = \left\{ X, Y \middle| \begin{array}{l} \vec{X} = \begin{pmatrix} M_n & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{Re}(P_1) & \mathrm{Re}(P_2) \\ \mathrm{Im}(P_1) & \mathrm{Im}(P_2) \end{bmatrix}^+ e + \begin{pmatrix} M_n & 0 \end{pmatrix}\left(I_{2n^2+n+2p^2+p} + \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(P_1) & \mathrm{Re}(P_2) \\ \mathrm{Im}(P_1) & \mathrm{Im}(P_2) \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(P_1) & \mathrm{Re}(P_2) \\ \mathrm{Im}(P_1) & \mathrm{Im}(P_2) \end{bmatrix} \right) y, \\ \vec{Y} = \begin{pmatrix} 0 & M_p \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{Re}(P_1) & \mathrm{Re}(P_2) \\ \mathrm{Im}(P_1) & \mathrm{Im}(P_2) \end{bmatrix}^+ e + \begin{pmatrix} 0 & M_p \end{pmatrix}\left(I_{2n^2+n+2p^2+p} + \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(P_1) & \mathrm{Re}(P_2) \\ \mathrm{Im}(P_1) & \mathrm{Im}(P_2) \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(P_1) & \mathrm{Re}(P_2) \\ \mathrm{Im}(P_1) & \mathrm{Im}(P_2) \end{bmatrix} \right) y \end{array} \right\}$$

y 是有合适维数的任意向量。进一步，当

$$rank\begin{bmatrix} \mathrm{Re}(P_1) & \mathrm{Re}(P_2) \\ \mathrm{Im}(P_1) & \mathrm{Im}(P_2) \end{bmatrix} = 2n^2 + n + 2p^2 + p$$

时，

$$AH_E = \left\{ X, Y \middle| \vec{X} = \begin{pmatrix} M_n & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{Re}(P_1) & \mathrm{Re}(P_2) \\ \mathrm{Im}(P_1) & \mathrm{Im}(P_2) \end{bmatrix}^+ e, \vec{Y} = \begin{pmatrix} 0 & M_p \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{Re}(P_1) & \mathrm{Re}(P_2) \\ \mathrm{Im}(P_1) & \mathrm{Im}(P_2) \end{bmatrix}^+ e \right\}.$$

证明：矩阵方程(1)可变为

$$AXA^H + BYB^H = C \Leftrightarrow \Phi_{AXA^H} + \Phi_{BYB^H} = \Phi_C \Leftrightarrow P_1\begin{bmatrix} vec_A(\mathrm{Re}(X_1)) \\ vec_s(\mathrm{Im}(X_1)) \\ vec_s(\mathrm{Re}(X_2)) \\ vec_s(\mathrm{Im}(X_2)) \end{bmatrix} + P_2\begin{bmatrix} vec_A(\mathrm{Re}(Y_1)) \\ vec_s(\mathrm{Im}(Y_1)) \\ vec_s(\mathrm{Re}(Y_2)) \\ vec_s(\mathrm{Im}(Y_2)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} vec(C_1) \\ vec(C_2) \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(P_1) & \mathrm{Re}(P_2) \\ \mathrm{Im}(P_1) & \mathrm{Im}(P_2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} vec_A(\mathrm{Re}(X_1)) \\ vec_s(\mathrm{Im}(X_1)) \\ vec_s(\mathrm{Re}(X_2)) \\ vec_s(\mathrm{Im}(X_2)) \\ vec_A(\mathrm{Re}(Y_1)) \\ vec_s(\mathrm{Im}(Y_1)) \\ vec_s(\mathrm{Re}(Y_2)) \\ vec_s(\mathrm{Im}(Y_2)) \end{bmatrix} = e.$$

由定理 7 有

$$\begin{bmatrix} vec_A\left(\mathrm{Re}\left(X_1\right)\right) \\ vec_s\left(\mathrm{Im}\left(X_1\right)\right) \\ vec_s\left(\mathrm{Re}\left(X_2\right)\right) \\ vec_s\left(\mathrm{Im}\left(X_2\right)\right) \\ vec_A\left(\mathrm{Re}\left(Y_1\right)\right) \\ vec_s\left(\mathrm{Im}\left(Y_1\right)\right) \\ vec_s\left(\mathrm{Re}\left(Y_2\right)\right) \\ vec_s\left(\mathrm{Im}\left(Y_2\right)\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\left(P_1\right) & \mathrm{Re}\left(P_2\right) \\ \mathrm{Im}\left(P_1\right) & \mathrm{Im}\left(P_2\right) \end{bmatrix}^{+} e + \left[I_{2n^2+n} - \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\left(P_1\right) & \mathrm{Re}\left(P_2\right) \\ \mathrm{Im}\left(P_1\right) & \mathrm{Im}\left(P_2\right) \end{bmatrix}^{+} \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\left(P_1\right) & \mathrm{Re}\left(P_2\right) \\ \mathrm{Im}\left(P_1\right) & \mathrm{Im}\left(P_2\right) \end{bmatrix} \right] y.$$

其中 $y \in R^{2n^2+n}$ 是一个任意的向量，当

$$rank\left(\begin{bmatrix} \mathrm{Re}\left(P_1\right) & \mathrm{Re}\left(P_2\right) \\ \mathrm{Im}\left(P_1\right) & \mathrm{Im}\left(P_2\right) \end{bmatrix} \right) = 2n^2 + n,$$

$$\begin{bmatrix} vec_A\left(\mathrm{Re}\left(X_1\right)\right) \\ vec_s\left(\mathrm{Im}\left(X_1\right)\right) \\ vec_s\left(\mathrm{Re}\left(X_2\right)\right) \\ vec_s\left(\mathrm{Im}\left(X_2\right)\right) \\ vec_A\left(\mathrm{Re}\left(Y_1\right)\right) \\ vec_s\left(\mathrm{Im}\left(Y_1\right)\right) \\ vec_s\left(\mathrm{Re}\left(Y_2\right)\right) \\ vec_s\left(\mathrm{Im}\left(Y_2\right)\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\left(P_1\right) & \mathrm{Re}\left(P_2\right) \\ \mathrm{Im}\left(P_1\right) & \mathrm{Im}\left(P_2\right) \end{bmatrix}^{+} e$$

是方程矩阵方程(1)的唯一解。

4. 结论

本文利用弱双四元数矩阵的复数表示，Kronecker 积，矩阵列拉直算子以及 Moore-Penrose 广义逆研究了矩阵方程 $AXA^H + BYB^H = C$ 的解。本论文没有解决弱双四元数矩阵方程的最小二乘解，它是我们未来研究的一个方向。

基金项目

本研究得到广东省自然科学基金项目(No. 2015A030313646, 2018A030313063)资助。

参考文献

[1] Hammarling, S.J. (1982) Numerical Solution of the Stable, Non-Negative Definite Lyapunov Equation. *IMA Journal of Numerical Analysis*, **2**, 303-323. https://doi.org/10.1093/imanum/2.3.303

[2] Khatri, C.G. and Mitra, S.K. (1976) Hermitian and Nonnegative Definite Solutions of Linear Matrix Equations. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **31**, 579-585. https://doi.org/10.1137/0131050

[3] Schütte, H.D. and Wenzel, J. (1990) Hypercomplex Numbers in Digital Signal Processing. *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, **2**, 1557-1560. https://doi.org/10.1109/ISCAS.1990.112431

[4] Hamilton, W.R. (1866) Elements of Quaternions. Longmans, London.

[5] Pei, S.C., Chang, J.H., Ding, J.J. and Chen, M.Y. (2008) Eigenvalues and Singular Value Decompositions of Reduced Biquaternion Matrices. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, **55**, 2673-2685. https://doi.org/10.1109/TCSI.2008.920068

[6] Yuan, S.F., Liao, A.P. and Lei, Y. (2008) Least Squares Hermitian Solution of the Matrix Equation (AXB, CXD) = (E, F) with the Least Norm over the Skew Field of Quaternions. *Mathematical and Computer Modelling*, **48**, 91-100. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2007.08.009

[7] Ben-Israle, A. and Greville, T.N.E. (2003) Generalized Inverses: Theory and Applications. Springer, New York.