Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(1), 49-53
Published Online January 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.91007

Function Characterizations of Some Spaces with Compact G_δ-Property

Congcong Wu
School of Mathematics & Physics, Anhui University of Technology, Ma'anshan Anhui
Email: ccwu95@126.com

Received: Dec. 12th, 2018; accepted: Jan. 1st, 2019; published: Jan. 9th, 2019

Abstract

Real-valued functions are useful tools for the characterizations of some topological spaces. Many classes of spaces can be characterized with real-valued functions that satisfy certain conditions, such as stratifiable spaces, *k*-semi-stratifiable spaces, etc. In this paper, we present some characterizations of spaces with compact G_δ-property in terms of real-valued functions, such as γ-spaces, *c*-stratifiable spaces, *kc*-stratifiable spaces, etc. The results obtained generalize some corresponding results for stratifiable spaces, *k*-semi-stratifiable spaces in the literature.

Keywords

γ-Spaces, *C*-Stratifiable Spaces, *Kc*-Stratifiable Spaces, Semi-Continuous Functions

某些具有紧-G_δ性质的空间的函数刻画

吴聪聪
安徽工业大学，数理科学与工程学院，安徽 马鞍山
Email: ccwu95@126.com

收稿日期：2018年12月12日；录用日期：2019年1月1日；发布日期：2019年1月9日

摘　要

实值函数是刻画某些拓扑空间的有用工具，许多空间类都可以用满足一定条件的实值函数刻画，如：层空间、*k*-半层空间等。本文利用实值函数给出了某些具有紧-G_δ性质的空间的函数刻画，如：γ-空间、*c*-层空间、*kc*-半层空间等，推广了已有文献中关于层空间，*k*-半层空间等的一些结果。

关键词

γ-空间，*C*-层空间，*Kc*-半层空间，半连续函数

文章引用: 吴聪聪. 某些具有紧-G_δ性质的空间的函数刻画[J]. 理论数学, 2019, 9(1): 49-53.
DOI: 10.12677/pm.2019.91007

1. 前言

本文提到的空间均为T_2空间，用$\mathbf{N}$表示正整数集。空间X上的实值函数f称为下半连续(上半连续) [1]，如果对任意实数r，集合$\{x\in X: f(x)>r\}$ $(\{x\in X: f(x)<r\})$为开集。记$L(X)(U(X))$为X到闭区间[0, 1]上所有下半连续(上半连续)函数的集合。

设X为拓扑空间，用τ表示X上的拓扑，τ^c为X的所有闭集构成的集族，$C(X)$表示X的所有紧集的集族。设$A\subset X$，记χ_A为A的特征函数。

设f为半连续函数，在什么条件下存在连续函数列$\{f_n\}$使得这一$\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$问题称为实值函数的函数列逼近问题。Tong 在文献[2]证明了空间X是完备正规当且仅当对X上的任意下半连续函数f，存在X上的递增连续函数列$\{f_n\}$使得$\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$。张国芳在文献[3]证明了空间 X 是 k-半层空间当且仅当对每一$U\in\tau$，存在递增函数列$\{\delta_{nU}\in L(X): n\in\mathbf{N}\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}\delta_{nU}=\chi_U$；若$U,V\in\tau$且$U\subset V$，则对每一$n\in\mathbf{N}$，$\delta_{nU}\le\delta_{nV}$；对每一紧集$K\in X$，$U$为开集且$K\subset U$，则存在$n\in\mathbf{N}$使得对任意$x\in U$有$\delta_{mU}(x)=1$。完备正规空间，$k$-半层空间均为具有闭-$G_\delta$性质的空间，由于具有紧-$G_\delta$性质的空间与具有闭-$G_\delta$性质的空间在结构上相似，一个自然的问题是具有紧-$G_\delta$性质的空间是否也有类似的函数刻画。给出某些具有紧-G_δ性质空间如γ-空间、c-层空间、kc-半层空间的函数刻画。

设X为拓扑空间，若映射$g: N\times X\to\tau$，满足：对每一$x\in X$及$n\in\mathbf{N}$，$x\in g(n,x)$；$g(n+1,x)\subset g(n,x)$；则称g为X上的一个g-函数。对于一个子集$A\subset X$，$g(n,A)=\cup\{g(n,x): x\in A\}$。

定义 1.1 [4]：空间 X 称为γ-空间。若存在 X 上的 g-函数 g，使得若对每一$n\in\mathbf{N}$，$y_n\in g(n,x)$且$x_n\in g(n,y_n)$，则x为$\langle x_n\rangle$的聚点。

定义 1.2 [5]：空间X称为c-半层空间(c-层空间)。若存在X上的g-函数g，使得对每一$K\in C(X)$，$K=\bigcap\limits_{n\in N} g(n,K)$ $\left(K=\bigcap\limits_{n\in N}\overline{g(n,K)}\right)$。

定义 1.3 [6]：空间X称为kc-半层空间。若存在g-函数g，使得对任意$K,H\in C(X)$且$K\cap H=\Phi$，则存在$m\in\mathbf{N}$使得$K\cap g(m,H)=\Phi$。

2. 主要结果

本节中，我们将利用实值函数给出γ-空间，c-层空间，kc-半层空间的若干等价刻画。

引理 2.1 [7]：X为γ-空间当且仅当存在X上的g-函数g使得若$K\in C(X)$，$F\in\tau^c$且$K\cap F=\Phi$，则存在$m\in\mathbf{N}$使得$F\cap g(m,K)=\Phi$。

定理 2.2：X为γ-空间当且仅当对每一$K\in C(X)$，存在递减函数列$\{\delta_{nK}\in L(X): n\in\mathbf{N}\}$满足

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_{nK}=\chi_K$；

(2) 若$K_1,K_2\in C(X)$且$K_1\subset K_2$，则对每一$n\in\mathbf{N}$，$\delta_{nK_1}\le\delta_{nK_2}$；

(3) 对每一紧集$K\in X$及$F\in\tau^c$且$K\cap F=\Phi$，存在$m\in\mathbf{N}$使得对任意$x\in F$有$\delta_{mK}(x)=0$。

证： 设X为γ-空间，g 为引理 2.1 中的 g-函数，对每一$n\in\mathbf{N}$及$K\in C(X)$，令$\delta_{nK}=\chi_{g(n,K)}$，则$\{\delta_{nK}: n\in\mathbf{N}\}$关于$n$递减且$\delta_{nK}\in L(X)$。

(1) 设$K\in C(X)$，对每一$x\in X$，若$x\in K$，则对每一$n\in\mathbf{N}$，$x\in g(n,K)$，于是$\lim\limits_{n\to\infty}\delta_{nk}(x)=1=\chi_k(x)$；

若 $x\notin K$，则存在 $m\in\mathbf{N}$ 使得 $\{x\}\cap g(m,K)=\Phi$，于是当 $n\ge m$ 时，有 $x\notin g(n,K)$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_{nK}(x)=0=\chi_K(x)$。

(2) 设 $K_1,K_2\in C(X)$ 且 $K_1\subset K_2$，则对每一 $n\in\mathbf{N}$，有 $g(n,K_1)\subset g(n,K_2)$，由此可得 $\delta_{nK_1}\le\delta_{nK_2}$。

(3) 设 $K\in C(X)$，$F\in\tau^c$ 且 $K\cap F=\Phi$，由引理 2.1，存在 $m\in\mathbf{N}$ 使得 $F\cap g(m,K)=\Phi$，故对任意 $x\in F$，有 $x\notin g(m,K)$，则 $\delta_{mk}(x)=0$。

反之，对每一 $x\in X$ 及 $n\in\mathbf{N}$，令 $g(n,x)=\{y\in X:\delta_{n\{x\}}(y)=1/2\}$。由(1)，对每一 $x\in X$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_{n\{x\}}(x)=\chi_{\{x\}}(x)=1>1/2$，故存在 $m\in\mathbf{N}$ 使得对任意 $n\ge m$，$\delta_{n\{x\}}(x)>1/2$。由于 $\{\delta_{n\{x\}}:n\in\mathbf{N}\}$ 关于 n 递减，故对每一 $n\in\mathbf{N}$，$\delta_{n\{x\}}(x)>1/2$，则 $x\in g(n,x)$。显然对每一 $x\in X$ 及 $n\in\mathbf{N}$，有 $g(n+1,x)\subset g(n,x)$，故 g 为 X 上的 g-函数。

对每一 $n\in\mathbf{N}$ 及 $K\in C(X)$，令 $G(n,K)=\{y\in X:\delta_{nK}(y)>1/2\}$。设 $y\in g(n,K)$，则存在 $x\in K$ 使得 $y\in g(n,x)$，则 $\delta_{n\{x\}}(y)>1/2$，由条件(2)得 $1/2<\delta_{n\{x\}}(y)\le\delta_{nK}(y)$，故 $y\in G(n,K)$，这表明 $g(n,K)\subset G(n,K)$。设 $x\in F$，$F\in\tau^c$ 且 $K\cap F=\Phi$，由条件(3)，存在 $m\in\mathbf{N}$ 使得对任意 $x\in F$ 有 $\delta_{mK}(x)=0$，故 $F\cap G(m,K)=\Phi$，从而 $F\cap g(m,K)=\Phi$。由引理 2.1，X 为 γ-空间。

定理 2.3：X 为 γ-空间当且仅当对每一 $K\in C(X)$，存在递减函数列 $\{\delta_{nK}\in L(X):n\in\mathbf{N}\}$ 满足：

(1) 对每一 $n\in\mathbf{N}$ 及 $K\in C(X)$，若 $x\in K$，则 $\delta_{nK}(x)=1$；

(2) 若 $K_1,K_2\in C(X)$ 且 $K_1\subset K_2$，则对每一 $n\in\mathbf{N}$，有 $\delta_{nK_1}\le\delta_{nK_2}$；

(3) 若 $K\in C(X)$，$F\in\tau^c$ 且 $K\cap F=\Phi$，则 $\langle\delta_{nK}\rangle$ 在 F 上一致收敛于 0。

证： 设 X 为 γ-空间，g 为引理 2.1 中的 g-函数，对每一 $n\in\mathbf{N}$ 及 $K\in C(X)$，令 $\delta_{nK}=\chi_{g(n,K)}$ 则 $\{\delta_{nK}:n\in\mathbf{N}\}$ 关于 n 递减且 $\delta_{nK}\in L(X)$。(1)，(2)显然成立。

(3)设 $K\in C(X)$，$F\in\tau^c$ 且 $K\cap F=\Phi$，由引理 2.1，存在 $m\in\mathbf{N}$ 使得 $F\cap g(m,K)=\Phi$。对 $\forall\varepsilon>0$，当 $n\ge m$ 时，对任意 $x\in F$ 有 $x\notin g(n,K)$，故 $|\delta_{nk}(x)-0|<\varepsilon$，这说明 $\langle\delta_{nK}\rangle$ 在 F 上一致收敛于 0。

反之，对每一 $x\in X$ 及 $n\in\mathbf{N}$，令 $g(n,x)=\{y\in X:\delta_{n\{x\}}(y)>1/2\}$。由(1)知，每一 $x\in X$ 及 $n\in\mathbf{N}$，$x\in g(n,x)$，又 $g(n+1,x)\subset g(n,x)$，故 g 为 X 上的 g-函数。对每一 $n\in\mathbf{N}$ 及 $K\in C(X)$，令 $G(n,K)=\{y\in X:\delta_{nK}(y)>1/2\}$，由定理 2.2 的充分性的证明知 $g(n,K)\subset G(n,K)$。设 $K\in C(X)$，$F\in\tau^c$ 且 $K\cap F=\Phi$，由条件(3)，$\langle\delta_{nK}\rangle$ 在 F 上一致收敛于 0，则存在 $m\in\mathbf{N}$，对任意 $x\in F$，有 $\delta_{mK}(x)=0$，于是 $F\cap G(m,K)=\Phi$，故 $F\cap g(m,K)=\Phi$，则 X 为 γ-空间。

定理 2.4：X 为正则 γ-空间当且仅当对每一 $K\in C(X)$，存在递减函数列 $\{\delta_{nK}\in L(X):n\in\mathbf{N}\}$，满足：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_{nK}=\chi_K$；

(2) 若 $K_1,K_2\in C(X)$ 且若 $K_1\subset K_2$，则对每一 $n\in\mathbf{N}$，有 $\delta_{nK_1}\le\delta_{nK_2}$；

(3) 若 $K\in C(X)$，$F\in\tau^c$ 且 $K\cap F=\Phi$，则存在开集 $V\supset F$ 及 $m\in\mathbf{N}$ 使得对任意 $x\in V$ 有 $\delta_{mK}(x)=0$。

证： 设 X 为 γ-空间，g 为引理 2.1 中的 g-函数，对每一 $n\in\mathbf{N}$ 及 $K\in C(X)$，令 $\delta_{nK}=\chi_{g(n,K)}$，则 $\{\delta_{nK}:n\in\mathbf{N}\}$ 关于 n 递减且 $\delta_{nK}\in L(X)$。(1) (2)的证明同定理 2.2。设 $K\in C(x)$，$F\in\tau^c$ 且 $K\cap F=\Phi$，由于 X 为正则空间，故 X 的无交开集 U，V 使得 $K\subset U,F\subset V$，存在 $m\in\mathbf{N}$ 使得 $g(m,K)\subset U$，则 $V\cap g(m,K)=\Phi$，故对任意一 $x\in V$，有 $\delta_{mK}(x)=0$。

反之，由定理 2.2 知 X 为 γ-空间，下证 X 为正则空间。对每一 $x\in X$ 及 $n\in\mathbf{N}$，令 $U_n(x)=\{y\in X:\delta_{n\{x\}}(y)>1/2\}$。设 $x\notin F\in\tau^c$，由(3)得，存在开集 $V\supset F$ 及 $n\in\mathbf{N}$ 使得对任意 $y\in V$，$\delta_{m\{x\}}(y)=0$，则 $y\notin U_m(x)$，故 $V\cap U_m(x)=\Phi$，这说明 X 为正则空间。

定理 2.5：X 为 c-层空间当且仅当对每一 $K\in C(x)$，存在递减函数列 $(\delta_{nK}\in L(X):n\in\mathbf{N})$ 及 $\{\zeta_{nK}\in U(X):n\in\mathbf{N}\}$ 满足：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_{nK}=\lim\limits_{n\to\infty}\zeta_{nK}=\chi_K$；

(2) 若 $K_1,K_2\in C(x)$ 且 $K_1\subset K_2$，则对每一 $n\in\mathbf{N}$， $\delta_{nK_1}\le\delta_{nK_2}$；

(3) 对每一 $K\in C(X)$ 及 $n\in\mathbf{N}$， $\delta_{nK}\le\zeta_{nK}$ 。

证： 设 g 为 X 的 c-层函数，对每一 $n\in\mathbf{N}$ 及 $K\in C(X)$，令 $\delta_{nK}=\chi_{g(n,K)}$， $\zeta_{nK}=\chi_{\overline{g(n,k)}}$，则 $\{\delta_{nK}\in L(X):n\in\mathbf{N}\}$ 关于 n 递减且 $\zeta_{nK}(X)\in U(X)$。(2) (3)显然成立。

(1) 设 $x\in X$，若 $\chi_K(x)=1$，则 $x\in K$，则对每一 $n\in\mathbf{N}$，有 $x\in g(n,K)\subset\overline{g(n,K)}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_{nK}(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\zeta_{nK}(x)=1=\chi_K(x)$；若 $\chi_K(x)=0$，则 $x\notin K$，故存在 $m\in\mathbf{N}$ 使得对任意 $n\ge m$，有 $x\notin\overline{g(n,K)}\supset g(n,K)$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_{nK}(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\zeta_{nK}(x)=0=\chi_K(x)$。

反之，对每一 $x\in X$ 及 $n\in\mathbf{N}$，令 $g(n,x)=\{y\in X:\delta_{n\{x\}}(y)>1/2\}$，则 g 为 X 上的 g-函数。对每一 $n\in\mathbf{N}$ 及 $K\in C(X)$，令 $F(n,K)=\{x\in X:\zeta_{nK}(x)\ge 1/2\}$，则 $F(n,K)\in\tau^c$。设 $y\in g(n,K)$，则存在 $x\in K$ 使得 $y\in g(n,x)$。由条件(2)，(3)得 $1/2<\delta_{n\{x\}}(y)\le\delta_{nk}(y)\le\zeta_{nk}(y)$，故 $y\in F(n,K)$，这表明 $g(n,K)\subset F(n,K)$，故 $\overline{g(n,K)}\subset F(n,K)$。

设 $x\in\bigcap\limits_{n\in N}\overline{g(n,K)}$，则对每一 $n\in\mathbf{N}$， $x\in\overline{g(n,K)}\subset F(n,K)$，则 $\chi_K(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\zeta_{nK}(x)\ge 1/2$，故 $x\in K$，这说明 $\bigcap\limits_{n\in N}\overline{g(n,K)}\subset K$，于是 $K=\bigcap\limits_{n\in N}\overline{g(n,K)}$。故 X 为 c-层空间。

定理 2.6：X 为 kc-半层空间当且仅当对每一 $K\in C(x)$，存在递减函数列 $\{\delta_{nK}\in L(X):n\in\mathbf{N}\}$ 满足

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_{nK}=\chi_K$；

(2) 若 $K_1,K_2\in C(x)$ 且 $K_1\subset K_2$，则对每一 $n\in\mathbf{N}$，有 $\delta_{nK_1}\le\delta_{nK_2}$；

(3)若 $K,H\in C(x)$ 且 $K\cap H=\Phi$，则存在 $m\in\mathbf{N}$ 使得对任意 $x\in H$ 有 $\delta_{mK}(x)=0$。

证： 设 g 为 kc-半层函数，对每一 $n\in\mathbf{N}$ 及 $K\in C(X)$，令 $\delta_{nk}(X)=\chi_{g(n,K)}$，则 $\{\delta_{nK}:n\in\mathbf{N}\}$ 关于 n 递减且 $\delta_{nK}\in L(X)$。(1) (2)的证明同定理 2.2。设 $K,H\in C(x)$ 且 $K\cap H=\Phi$，则存在 $m\in\mathbf{N}$ 使得 $H\cap g(m,K)=\Phi$，故对任意 $x\in H$， $\delta_{mK}(x)=0$。

反之，对每一 $x\in X$ 及 $n\in\mathbf{N}$，令 $g(n,x)=\{y\in X:\delta_{n\{x\}}(y)>1/2\}$，则 g 为 X 上的 g-函数。对每一 $n\in\mathbf{N}$ 及 $K\in C(X)$，令 $G(n,K)=\{y\in X:\delta_{nk}(y)>1/2\}$，则 $g(n,K)\subset G(n,K)$。设 $K,H\in C(X)$ 且 $K\cap H=\Phi$，由条件(3)，存在 $m\in\mathbf{N}$ 使得对任意 $x\in H$ 有 $\delta_{mK}(x)=0$，故 $H\cap G(m,K)=\Phi$，从而 $H\cap g(m,K)=\Phi$。故 X 为 kc-半层空间。

由定理 2.2 的证明可得：

定理 2.7：X 为 kc-半层空间当且仅当对每一 $K\in C(x)$，存在递减函数列 $\{\delta_{nK}\in L(X):n\in\mathbf{N}\}$ 满足

(1) 对每一 $n\in\mathbf{N}$ 及 $K\in C(x)$，若 $x\in K$，则 $\delta_{nK}(x)=1$；

(2) 若 $K_1,K_2\in C(x)$ 且 $K_1\subset K_2$，则对每一 $n\in\mathbf{N}$，有 $\delta_{nK_1}\le\delta_{nK_2}$；

(3) 若 $K,H\in C(x)$，且 $K\cap H=\Phi$，则 $\langle\delta_{nK}\rangle$ 在 H 上一致收敛于 0。

由定理 2.5 的证明可得：

命题 2.8：X 为 c-半层空间当且仅当对每一 $K\in C(x)$，存在递减函数列 $\{\delta_{nK}\in L(X):n\in\mathbf{N}\}$ 满足

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_{nK}=\chi_K$；

(2) 若 $K_1,K_2\in C(x)$ 且 $K_1\subset K_2$，则对每一 $n\in\mathbf{N}$，有 $\delta_{nK_1}\le\delta_{nK_2}$。

参考文献

[1] Engelking, R. (1977) General Topology. Polish Scientific Publishers, Warszawa.

[2] Tong, H. (1952) Some Characterizations of Normal and Perfectly Normal Spaces. *Duke Mathematical Journal*, **19**,

289-292. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-52-01928-5

[3] 张国芳, 杨二光. *k*-半层空间的函数刻画[J]. 山东大学学报(理学报), 2006, 26(2): 213-218.

[4] Hodel, R.E. (1972) Hodel, Spaces Defined by Sequence of Open Covers Which Guarantee that Certain Sequences Have Cluster Points. *Duke Mathematical Journal*, **39**, 253-263. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-72-03930-0

[5] Martin, H.W. (1973) Metrizability of M-Spaces. *Canadian Journal of Mathematics*, **25**, 840-841. https://doi.org/10.4153/CJM-1973-086-0

[6] Martin II, H.W. (1973) Metrization and Submetrization of Topological Spaces. Ph D Thesis, University of Pittsburgh, Pittsburgh, PA.

[7] Lindgren, W.F. and Fletcher, P. (1974) Locally Quasi-Uniform Spaces with Countable Bases. *Duke Mathematical Journal*, **41**, 231-240. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-74-04125-8