Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(1), 62-70
Published Online January 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.91009

Hans汉斯

Classifications of 3-Order Composite Surfaces and Their Standard Equations

Jixing Wang

School of Mathematics and Statistics, Yunnan University, Kunming Yunnan
Email: kingwang@ynu.edu.cn

Received: Dec. 20th, 2018; accepted: Jan. 8th, 2019; published: Jan. 15th, 2019

Abstract

This paper carries out a general study of 3-order composite surfaces, and successfully divides 3-order composite surfaces into 5 major categories, 50 subclasses, and by the way presents all 150 standard equations.

Keywords

3-Order Surface, Classification, 3-Order Composite Surface, Standard Equation

3次复合曲面的分类及其标准方程

王继兴

云南大学，数学与统计学院，云南 昆明
Email: kingwang@ynu.edu.cn

收稿日期：2018年12月20日；录用日期：2019年1月8日；发布日期：2019年1月15日

摘 要

本文展开了对3次复合曲面的一般研究，并成功地把3次复合曲面分成了5个大类，50个小类，顺便给出了其所有的150个标准方程。

关键词

3次曲面，分类，3次复合曲面，标准方程

文章引用: 王继兴. 3 次复合曲面的分类及其标准方程[J]. 理论数学, 2019, 9(1): 62-70.
DOI: 10.12677/pm.2019.91009

1. 引言

一般来说，如果我们能把一个 n 次曲面分类成功，并得到其所有的标准方程，那么可以认为我们对这种曲面就认识清楚了。如几何学家们把二次曲面分成了 5 类，并成功地给出了其所有的 17 个标准方程[1]。这样任意给定一个二次曲面的方程，我们就知道它一定是 17 个方程之一，因此，在某种意义上，二次曲面对我们来说就没有任何秘密可言。对于三次曲面，有众多学者从不同角度进行了研究并取得了丰硕的成果[2] [3] [4] [5]，其中 Wanseok，Euisung 等研究了在任意特征的 k 代数闭合场下非正规三次超曲面的分类[4]；Bruce，Wall 等重建了复射影三次曲面的分类[5]。但到目前为止，还未见有文献对复合曲面进行了分类研究或给出了其标准方程。

复合曲面简单地说，就是多个函数乘积形成的方程所确定的曲面[6]，是生活中最常见应用最广的曲面，简单如书就是由多个平面复合而成，复杂一点如绝大多数建筑物也是由多个简单的曲面复合而成[7]。三次复合曲面是复合曲面中的重要组成部分，它由二次曲面与平面复合而成，是复合曲面中较基础的部分。本文为了对 3 次复合曲面的分类问题进行深入的系统的研究，先把平面分类，然后在此基础上，把 3 次复合曲面分类。把其分为了 5 个大类，50 个小类，并且在不对平面方程中的系数区分正负号的条件下，得到了三次复合曲面的所有 150 个标准方程。

本文研究的曲面方程都是指实系数方程。

2. 已有成果

为了阅读方便，我们先罗列一些本文常用到的概念及成果：

定义 2.1 [6]：由三元 $n\,(\geq 1)$次方程

$$\Phi_n\left(x,y,z\right)=\sum_{s=0}^{n}\sum_{\substack{i,j\\ i+j\leq s}} a_{(i,j,s-i-j)}x^i y^j z^{s-i-j}=0 \tag{1}$$

所表示的曲面叫做 ***n* 次曲面**，其中 i，j 及 s 都是非负整数，并且至少有一个 n 次项的系数不为 0，其中 $\Phi_n\left(x,y,z\right)$ 称为 ***n* 次曲面函数**。

当 $n=2$ 时，为了便于研究，通常把 2 次曲面的方程书写为

$$F\left(x,y,z\right)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0 \tag{2}$$

定义 2.2 [1]：空间直角坐标变换的一般公式(直角坐标系的平移及转轴变换)：

$$\begin{cases} x=x'\cos\alpha_1+y'\cos\alpha_2+z'\cos\alpha_1+x_0 \\ y=x'\cos\beta_1+y'\cos\beta_2+z'\cos\beta_3+y_0 \\ z=x'\cos\gamma_1+y'\cos\gamma_2+z'\cos\gamma_3+z_0 \end{cases} \tag{3}$$

定理 2.1 [1]：对二次曲面，通过适当选区直角坐标系，即进行恰当的直角坐标系的平移及转轴变换(3)，二次曲面的一般方程(2)总可化为下列 5 个简化方程中的一个：

1) $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+a_{44}=0, a_{11}a_{22}a_{33}\neq 0;$

2) $a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{34}z=0, a_{11}a_{22}a_{34}\neq 0;$

3) $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{44}=0, a_{11}a_{22}\neq 0;$

4) $a_{11}x^2+2a_{24}y=0, a_{11}a_{24}\neq 0;$

5) $a_{11}x^2+a_{44}=0, a_{11}\neq 0$。

定理 2.2 [1]：适当选取坐标系，二次曲面的方程总可以写成下面十七种标准方程的一种形式：

(1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ (椭球面)；

(2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0$ (虚椭球面)；

(3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ (点或虚母线二次锥面)；

(4) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$ (单叶双曲面)；

(5) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$ (双叶双曲面)；

(6) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ (二次锥面)；

(7) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2z=0$ (椭圆抛物面)；

(8) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-2z=0$ (双曲抛物面)；

(9) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ (椭圆柱面)；

(10) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$ (虚椭圆柱面)；

(11) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ (相交于一条实直线的一对共轭虚平面)；

(12) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$ (双曲柱面)；

(13) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ (一对相交平面)；

(14) $x^2-2py=0$ (抛物柱面)；

(15) $x^2-a^2=0$ (一对平行平面)；

(16) $x^2+a^2=0$ (一对平行的共轭虚平面)；

(17) $x^2=0$ (一对重合平面)。

3. 三次复合曲面的分类

定义 3.1：如果一个 3 次曲面能写成如下形式

$$\Phi_3(x,y,z)=F(x,y,z)(a_1x+a_2y+a_3z+a_4)=0 \tag{4}$$

其中 $F(x,y,z)$ 是 2 次曲面函数，$a_1x+a_2y+a_3z+a_4$ 是一次曲面(即平面)函数，则称这个 3 次曲面为 3 次**复合曲面(或可分的 3 次曲面)**；并分别称 2 次曲面 $F(x,y,z)=0$ 与平面 $a_1x+a_2y+a_3z+a_4=0$ 为这个 3 次复合曲面的**二次分曲面**与**分平面**；如果不能，则称为**不可分的 3 次曲面**。

为了对三次复合曲面进行分类，下面先对平面的分类进行讨论：

定义 3.2：设平面的一般方程为

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{5}$$

其中实常数 A，B，C 不全为 0。如果在交换变元 x，y，z 及重新命名平面系数 A，B，C 与 D 的条件下，不能化为同一形式的任意两个平面方程，称为**不同类型的平面方程**。

定理 3.1：如果平面方程(5)中的变元 x，y，z 可以自由交换，则平面方程可以分为以下 6 类：

(i) $Ax+By+Cz+D=0, ABCD\neq 0$(与三个坐标轴都相交于非零点的平面)

(ii) $Ax+By+Cz=0, ABC\neq 0$(过原点的平面)

(iii) $Ax+By+D=0, ABD\neq 0$(平行于坐标轴的平面)

(iv) $Ax+By=0, AB\neq 0$(过坐标轴的平面)

(v) $Ax+D=0, AD\neq 0$(平行于坐标平面的平面)

(vi) $Ax=0$或$x=0, A\neq 0$(坐标平面)

证明：在方程(5)中，当 A，B，C 与 D 都不为 0 就是第(i)类；当 A，B 与 C 都不为 0，且 D 为 0，则化为第(ii)类；当 A，B 与 C 中有一个为 0，而 D 不为 0，则化为第(iii)类；当 A，B 与 C 中有一个为 0，且 D 为 0，则化为第(iv)类；当 A，B 与 C 中有两个为 0，而 D 不为 0，则化为第(v)类；当 A，B 与 C 中有两个为 0，且 D 为 0，则化为第(vi)类。毫无疑问，(i)~(vi)属于不同的类，因为他们相互间在交换变元 x，y，z 及重新命名平面系数 A，B，C 与 D 的条件下，不能互化。 □

定理 3.2：适当选取坐标系，三次复合曲面的一般方程(4)总可化为下列 5 大类简化方程中的一个：

(I) $\left(a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+a_{44}\right)\left(Ax+By+Cz+D\right)=0, a_{11}a_{22}a_{33}\neq 0;$

(II) $\left(a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{34}z\right)\left(Ax+By+Cz+D\right)=0, a_{11}a_{22}a_{34}\neq 0;$

(III) $\left(a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{44}\right)\left(Ax+By+Cz+D\right)=0, a_{11}a_{22}\neq 0;$

(IV) $\left(a_{11}x^2+2a_{24}y\right)\left(Ax+By+Cz+D\right)=0, a_{11}a_{24}\neq 0;$

(V) $\left(a_{11}x^2+a_{44}\right)\left(Ax+By+Cz+D\right)=0, a_{11}\neq 0;$

其中 A，B，C 不全为 0。

证明：根据 3 次复合曲面(4)的 2 次分曲面 $F(x,y,z)=0$ 的特点，由定理 2.1 知，适当选取坐标系，即进行恰当的坐标的转轴与平移变换(3)，可以把 $F(x,y,z)=0$ 化为定理 2.1 中的 5 种形式，同时此变换把平面方程 $a_1x+a_2y+a_3z+a_4=0$ 化为了 $Ax+By+Cz+D=0$ 形式。由于平面方程在任何坐标系下都是一次方程，因此 A，B，C 不全为 0。所以，适当选取坐标系后，任一 3 次复合曲面(4)都可以化为本定理描述的 5 大类形式之一。 □

定理 3.2 的分类是在平面方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 中的系数 A，B，C 不全为 0 的条件下得到的，并没有考虑 A，B，C 及 D 的具体情况。为了得到标准方程，我们有必要加以考虑。由定理 3.1 知，平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 可以分为 6 类，是否意味着能利用乘法原理，得到由定理 3.2 的 5 大类扩展成 30 小类的结论呢？我们说不能，因为定理 3.1 有一个先决条件：能自由交换变元 x，y，z，而定理 3.2 中的平面方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 中的变元及其系数是不自由的，是被动得到的，因此如果仅考虑 A，B，C，D 中有几个为 0 而不考虑他们的正负号的条件下，我们有

定义 3.3：在定理 3.2 的 5 大分类方程中，如果进一步考虑 A，B，C，D 中有几个为 0 而不考虑他们的正负号的条件下得到的方程称为三次复合曲面(4)的**小类方程**；如果在交换变元 x，y，z 及重新命名二次分曲面函数系数 a_{ij} (不同大类有不同的 a_{ij})与平面系数 A，B，C 的条件下，不能化为同一形式的两个小类方程称为**不同类型的小类方程**。

从而，在进一步考虑 A，B，C，D 中有几个为 0 而不考虑他们的正负号的条件下，我们有下面引理 3.1~3.5：

引理 3.1：适当选取坐标系，定理 3.2 中的(I)式可化为下列 6 小类简化方程中的一个：

(1-1) $\left(a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+a_{44}\right)\left(Ax+By+Cz+D\right)=0, ABCD\neq 0;$

(1-2) $\left(a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+a_{44}\right)\left(Ax+By+Cz\right)=0, ABC\neq 0;$

(1-3) $\left(a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+a_{44}\right)\left(Ax+By+D\right)=0, ABD\neq 0;$

(1-4) $\left(a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+a_{44}\right)\left(Ax+By\right)=0, AB\neq 0;$

(1-5) $\left(a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+a_{44}\right)\left(Ax+D\right)=0, AD\neq 0;$

(1-6) $\left(a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+a_{44}\right)x=0,$

其中 $a_{11}a_{22}a_{33}\neq 0$。

证明：在(I)式中的二次分曲面函数 $F\left(x,y,z\right)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+a_{44}$ 关于 x,y,z 对称，使得 $Ax+By+Cz+D$ 中的 x,y,z 可以自由交换，满足定理 3.1 的条件，因此组合分配一下就可得到本引理中的 6 类简化方程。 □

引理 3.2：适当选取坐标系，定理 3.2 中的(II)式可化为下列 10 小类简化方程中的一个：

(2-1) $\left(a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{34}z\right)\left(Ax+By+Cz+D\right)=0, ABCD\neq 0;$

(2-2) $\left(a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{34}z\right)\left(Ax+By+Cz\right)=0, ABC\neq 0;$

(2-3) $\left(a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{34}z\right)\left(Ax+By+D\right)=0, ABD\neq 0;$

(2-4) $\left(a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{34}z\right)\left(Ax+Cz+D\right)=0, ACD\neq 0;$

(2-5) $\left(a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{34}z\right)\left(Ax+By\right)=0, AB\neq 0;$

(2-6) $\left(a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{34}z\right)\left(Ax+Cz\right)=0, AC\neq 0;$

(2-7) $\left(a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{34}z\right)\left(Ax+D\right)=0, AD\neq 0;$

(2-8) $\left(a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{34}z\right)\left(Cz+D\right)=0, CD\neq 0;$

(2-9) $\left(a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{34}z\right)x=0,$

(2-10) $\left(a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{34}z\right)z=0,$

其中 $a_{11}a_{22}a_{34}\neq 0$。

证明：(2-1)与(2-2)是显然的，因为分平面函数关于 x,y,z 对称，因此只能形成这两个类。但(2-3)以下的方程与引理 3.1 中的(1-3)以下的有些不同，因为二次函数 $F\left(x,y,z\right)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{34}z$ 仅关于 x,y 对称，关于 x 与 z,y 与 z 都不对称，且定理 3.1 中的(iii)式中的平面函数 $Ax+By+D$ 也仅关于 x,y 对称，关于 x 与 z,y 与 z 不对称，因此 x 与 z 或 y 与 z 不能交换，这就造成(2-3)与(2-4)是不一样的类，因为通过交换变元及重新命名系数不能实现两个方程的互化，但曲面方程 $\left(a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{34}z\right)\left(By+Cz+D\right)=0$，$BCD\neq 0$，不是全新的类，因为它中的 x 与 y 交换，并重新命名系数就可以得到(2-4)。因此，在二次分曲面函数为 $F\left(x,y,z\right)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{34}z$ 及平面函数 $Ax+By+Cz+D$ 中的系数 A,B,C 中仅有一个为 0 的条件下，会产生两个完全不同的类(2-3)与(2-4)。同理我们可以得到(2-5)~(2-10)等 6 个不同的类。 □

引理 3.3：适当选取坐标系，定理 3.2 中的(III)式可化为下列 10 小类简化方程中的一个：

(3-1) $\left(a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{44}\right)\left(Ax+By+Cz+D\right)=0, ABCD\neq 0;$

(3-2) $\left(a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{44}\right)\left(Ax+By+Cz\right)=0, ABC\neq 0;$

(3-3) $\left(a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{44}\right)\left(Ax+By+D\right)=0, ABD\neq 0;$

(3-4) $\left(a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{44}\right)\left(Ax+Cz+D\right)=0, ACD\neq 0;$

(3-5) $\left(a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{44}\right)\left(Ax+By\right)=0, AB\neq 0;$

(3-6) $\left(a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{44}\right)(Ax+Cz)=0, AC\neq 0;$

(3-7) $\left(a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{44}\right)(Ax+D)=0, AD\neq 0;$

(3-8) $\left(a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{44}\right)(Cz+D)=0, CD\neq 0;$

(3-9) $\left(a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{44}\right)x=0,$

(3-10) $\left(a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{44}\right)z=0,$

其中 $a_{11}a_{22}a_{44}\neq 0$ 。

证明：与引理 3.2 的证明类似。 □

引理 3.4：适当选取坐标系，定理 3.2 中的(IV)式可化为下列 14 小类简化方程中的一个：

(4-1) $\left(a_{11}x^2+2a_{24}y\right)(Ax+By+Cz+D)=0, ABCD\neq 0;$

(4-2) $\left(a_{11}x^2+2a_{24}y\right)(Ax+By+Cz)=0, ABC\neq 0;$

(4-3) $\left(a_{11}x^2+2a_{24}y\right)(Ax+By+D)=0, ABD\neq 0;$

(4-4) $\left(a_{11}x^2+2a_{24}y\right)(Ax+Cz+D)=0, ACD\neq 0;$

(4-5) $\left(a_{11}x^2+2a_{24}y\right)(By+Cz+D)=0, BCD\neq 0;$

(4-6) $\left(a_{11}x^2+2a_{24}y\right)(Ax+By)=0, AB\neq 0;$

(4-7) $\left(a_{11}x^2+2a_{24}y\right)(Ax+Cz)=0, AC\neq 0;$

(4-8) $\left(a_{11}x^2+2a_{24}y\right)(By+Cz)=0, BC\neq 0;$

(4-9) $\left(a_{11}x^2+2a_{24}y\right)(Ax+D)=0, AD\neq 0;$

(4-10) $\left(a_{11}x^2+2a_{24}y\right)(By+D)=0, BD\neq 0;$

(4-11) $\left(a_{11}x^2+2a_{24}y\right)(Cz+D)=0, CD\neq 0;$

(4-12) $\left(a_{11}x^2+2a_{24}y\right)x=0,$

(4-13) $\left(a_{11}x^2+2a_{24}y\right)y=0,$

(4-14) $\left(a_{11}x^2+2a_{24}y\right)z=0,$

其中 $a_{11}a_{24}\neq 0$ 。

证明：(4-1)与(4-2)是显然的。二次分曲面函数 $F(x,y,z)=a_{11}x^2+2a_{24}y$ 关于 x,y,z 都不对称，且定理 3.1 中的(iii)式中的平面函数 $Ax+By+D$ 仅关于 x,y 对称，关于 x 与 z,y 与 z 不对称，因此总体而言，x 与 y，x 与 z 或 y 与 z 都不能交换，因此(4-3)与(4-4)是不一样的；另外，与引理 3.2 不一样的是(4-5) $\left(a_{11}x^2+2a_{24}y\right)(By+Cz+D)=0, BCD\neq 0$ 是全新的类，因为通过交换变元及重新命名系数不能与(4-3)或(4-4)中的任意一个互换。同理我们可以得到(4-6)~(4-14)。 □

引理 3.5：适当选取坐标系，定理 3.2 中的(V)式可化为下列 10 小类简化方程中的一个：

(5-1) $\left(a_{11}x^2+a_{44}\right)(Ax+By+Cz+D)=0, ABCD\neq 0;$

(5-2) $\left(a_{11}x^2+a_{44}\right)(Ax+By+Cz)=0, ABC\neq 0;$

(5-3) $\left(a_{11}x^2+a_{44}\right)(Ax+By+D)=0, ABD\neq 0;$

(5-4) $\left(a_{11}x^2+a_{44}\right)(By+Cz+D)=0, BCD\neq 0;$

(5-5) $\left(a_{11}x^2+a_{44}\right)(Ax+By)=0, AB\neq 0;$

(5-6) $\left(a_{11}x^2+a_{44}\right)(Ay+Cz)=0, AC\neq 0;$

(5-7) $\left(a_{11}x^2+a_{44}\right)(Ax+D)=0, AD\neq 0;$

(5-8) $\left(a_{11}x^2+a_{44}\right)(By+D)=0, BD\neq 0;$

(5-9) $\left(a_{11}x^2+a_{44}\right)x=0,$

(5-10) $\left(a_{11}x^2+a_{44}\right)y=0,$

其中 $a_{11} \neq 0$。

证明：(5-1)与(5-2)是显然的。由于二次分曲面函数 $F(x,y,z)=a_{11}x^2+a_{44}$ 仅关于 y 与 z 对称，且定理 3.1 中的(iii)式中的平面函数 $Ax+By+D$ 关于 x,y 对称，关于 x 与 z,y 与 z 不对称，因此 x 与 y 及 x 与 z 都不能交换，这就造成(5-3)与(5-4)是不一样的类，因为通过交换变元及重新命名系数不能互换，但曲面方程 $(a_{11}x^2+a_{44})(Ax+Cz+D)=0, ACD\neq 0$，不是全新的类，因为它中的 y 与 z 交换，并重新命名系数就可以得到(5-3)。同理我们可以得到(5-5)~(5-10)。 □

定理 3.3：适当选取坐标系，三次复合曲面的一般方程(4)总可化为引理 3.1~3.5 中的 50 小类简化方程中的一个。

证明：由引理 3.1~3.5 知。 □

4. 标准方程

本节将探讨 3 次复合曲面的所有可能的标准方程。这里我们对平面方程中的实系数 A，B，C 及 D 仅考虑他们是否为 0，而不考虑他们的正负号。

引理 4.1：当引理 3.1 中的 2 次分曲面函数 $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+a_{44}$ 具体变为定理 2.2 中的方程(1)~(6)中的二次曲面函数时，共形成 36 个标准方程。

证明：当 $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+a_{44}$ 变为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$ 时，由引理 3.1 有下面 6 个标准方程：

(1) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)(Ax+By+Cz+D)=0$；

(2) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)(Ax+By+Cz)=0$；

(3) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)(Ax+By+D)=0$；

(4) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)(Ax+By)=0$；

(5) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)(Ax+D)=0$；

(6) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)x=0$。

同理，当 $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+a_{44}$ 被二次曲面函数(2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1$，(3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$，(4) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1$，(5) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1$，(6) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}$ 依次代替后，我们可以再得到 30 个标准方程，不妨依次编号为(7)~(36)。 □

引理 4.2：当引理 3.2 中的 2 次分曲面函数 $a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{34}z$ 具体变为定理 2.2 中的方程(7) (8)中的二次曲面函数，或当引理 3.3 中的 2 次分曲面函数 $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{44}$ 具体变为定理 2.2 中的方程(9)~(13)的二次曲面函数时，共形成 70 个标准方程。

证明：当 $F(x,y,z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{34}z$ 具体变为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2z$ 时，由引理 3.2 有下面 10 标准方程：

(37) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2z\right)(Ax+By+Cz+D)=0$；

(38) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2z\right)(Ax+By+Cz)=0$。

(39) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2z\right)(Ax+By+D)=0$；

(40) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2z\right)(Ax+Cz+D)=0$。

(41) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2z\right)(Ax+By)=0$；

(42) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2z\right)(Ax+Cz)=0$；

(43) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2z\right)(Ax+D)$；

(44) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2z\right)(Az+D)$；

(45) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2z\right)x=0$；

(46) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2z\right)z=0$。

当 $F(x,y,z)$ 依次被二次曲面函数(8) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-2z$，(9) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$，(10) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1$，(11) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$，(12) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1$，(13) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ 代替时，我们可以再得到编号为(47)~(106)共 60 个标准方程。 □

引理 4.3： 当引理 3.4 中的 2 次分曲面函数 $a_{11}x^2+2a_{24}y$ 具体变为定理 2.2 中的(14)时，共形成 14 个标准方程。

证明： 当 $F(x,y,z)=a_{11}x^2+2a_{24}y$ 具体变为 x^2-2py 时，由引理 3.4 有下面 14 个标准方程：

(107) $(x^2-2py)(Ax+By+Cz+D)=0$；

(108) $(x^2-2py)(Ax+By+Cz)=0$。

(109) $(x^2-2py)(Ax+By+D)=0$；

(110) $(x^2-2py)(Ax+Cz+D)=0$；

(111) $(x^2-2py)(By+Cz+D)=0$；

(112) $(x^2-2py)(Ax+By)=0$；

(113) $(x^2-2py)(Ax+Cz)=0$；

(114) $(x^2-2py)(By+Cz)=0$；

(115) $(x^2-2py)(Ax+D)=0$；

(116) $(x^2-2py)(By+D)=0$；

(117) $(x^2-2py)(Cz+D)=0$；

(118) $\left(x^2-2py\right)x=0$；

(119) $\left(x^2-2py\right)y=0$；

(120) $\left(x^2-2py\right)z=0$。

引理 4.4：当引理 3.5 中的 2 次分曲面函数 $a_{11}x^2+a_{44}$ 具体变为定理 2.2 中的方程(15)~(17)中的二次分曲面函数时，共形成 30 个标准方程。

证明：当 $F(x,y,z)=a_{11}x^2+a_{44}$ 具体变为 x^2-a^2 时，由引理 3.5 有下面 10 标准方程：

(121) $\left(x^2-a^2\right)\left(Ax+By+Cz+D\right)=0$；

(122) $\left(x^2-a^2\right)\left(Ax+By+Cz\right)=0$。

(123) $\left(x^2-a^2\right)\left(Ax+By+D\right)=0$；

(124) $\left(x^2-a^2\right)\left(By+Cz+D\right)=0$；

(125) $\left(x^2-a^2\right)\left(Ax+By\right)=0$；

(126) $\left(x^2-a^2\right)\left(By+Cz\right)=0$；

(127) $\left(x^2-a^2\right)\left(Ax+D\right)=0$；

(128) $\left(x^2-a^2\right)\left(By+D\right)=0$；

(129) $\left(x^2-a^2\right)x=0$；

(130) $\left(x^2-a^2\right)y=0$。

当 $F(x,y,z)$ 依次被二次曲面函数(16) x^2+a^2，(17) x^2 代替时，可以再得到编号为(131)~(150)共 20 个标准方程。 □

定理 4.1：三次复合曲面(4)，在适当选取坐标系，并不考虑平面系数的正负号条件下，共有 150 个标准方程。

证明：由引理 4.1 得 36 个标准方程；由引理 4.2 得 70 个；由引理 4.3 得 14；由引理 4.4 得 30 个；故共有 150 个标准方程。 □

基金项目

本研究得到云南省高校科技创新团队支持计划资助。

参考文献

[1] 吕林根, 许子道. 解析几何[M]. 第四版. 北京: 高等教育出版社, 2006: 278-281.

[2] Bajaj, C.L., Holt, R.J. and Netravali, A.R. (1998) Rational Parametrization of Non-Singular Real Cubic Surfaces. *ACM Transactions on Graphics*, **17**, 1-31. https://doi.org/10.1145/269799.269800

[3] Berry, T.G. and Patterson, R.R. (2001) Implicitization and Parametrization of Nonsingular Cubic Surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, **18**, 723-738. https://doi.org/10.1016/S0167-8396(01)00048-6

[4] Wanseok, L., Euisung, P. and Peter, S. (2011) On the Classification of Non-Normal Cubic Hypersurfaces. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **215**, 2034-2042. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2010.12.007

[5] Bruce, J.W. and Wall, C.T.C. (1979) On the Classification of Cubic Surfaces. *Journal of the London Mathematical Society*, **19**, 245-256. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-19.2.245

[6] 王继兴, 赵越. *n* 次直纹曲面及其分类[J]. 理论数学, 2018, 8(5): 534-541.

[7] 李兴刚. 作为"介质"的结构-天津大学新校区综合体育馆设计[J]. 建筑学报, 2016(12): 62-65.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org