Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(3), 323-329
Published Online May 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.93043

Hans汉斯

Exploration on the Isoperimetric Inequalities

Xin Chen, Xiang Gao*

School of Mathematical Sciences, Ocean University of China, Qingdao Shandong
Email: xinchen_na@163.com, *gaoxiangshuli@126.com

Received: Apr. 17th, 2019; accepted: Apr. 28th, 2019; published: May 9th, 2019

Abstract

The isometric inequality is one of the oldest geometric inequalities and is widely used in academic research and our daily life. This paper explores the historical development process of the iso-type inequalities and the development of the iso-type inequalities in recent years. In addition, this paper also makes a reasonable outlook and discussing on the future development trend of the iso-type inequalities.

Keywords

Isoperimetric Inequalities, Bonnesen-Type Inequalities, Integral Geometry, Fourier Series

关于等周型不等式的探索

陈　欣，高　翔*

中国海洋大学数学科学学院，山东 青岛
Email: xinchen_na@163.com, *gaoxiangshuli@126.com

收稿日期：2019年4月17日；录用日期：2019年4月28日；发布日期：2019年5月9日

摘　要

等周不等式是最古老的几何不等式之一并且被广泛地应用于学术研究和日常生活中。本文探索了等周型不等式的历史发展过程，以及近年来国内外关于等周型不等式的发展情况。此外，本文还对等周型不等式的未来发展趋势进行了合理的展望和探讨。

关键词

等周型不等式，Bonnesen-型不等式，积分几何，傅里叶级数

*通讯作者。

文章引用：陈欣，高翔．关于等周型不等式的探索[J]．理论数学, 2019, 9(3): 323-329.
DOI: 10.12677/pm.2019.93043

1. 引言

不等式是数学中非常重要的组成部分，很多复杂的数学问题需要借助不等式进行简化才能得以顺利求解。作为不等式家族的重要成员，几何不等式一直备受关注。一方面是由于很多几何不等式的证明都颇具挑战性，建立需要较强的数学技巧，另一方面是由于几何不等式往往都具有非常优美的表现形式和直观的几何意义。

20 世纪 80 年代杨路、张景中等教授对几何不等式研究的一系列开创性的工作成果，将我国几何不等式的研究推向高潮，涌现出一大批高产高水平的作者群，如杨学枝、陈计、王振等等。无论是就数量而言还是就研究水平而言，在国际上都可以说是处于领先地位。特别是中国科学院成都计算机研究所杨路研究员研究开发的不等式型机器证明软件 BOTTEMA 问世以来，借助这种软件可以发现并证明上千个新的几何不等式。这些开拓性的工作，更是在国际上处于领先地位[1]。

最早的几何不等式应该是著名的等周不等式，该不等式具有悠久的历史。等周问题最早由著名数学家 Joham Beynoulli 在 1679 年提出，从等周定理的提出到现在，人们关于等周问题的研究与讨论从未停止过，研究成果不断的推陈出新，使得等周型不等式的研究领域欣欣向荣，可以说等周定理是数学史上被证明次数最多的定理之一。

等周不等式还被广泛地应用于学术研究和生产生活中。一方面，20 世纪数学已经确认具有几何背景的不等式的力量已经上升到了一个全新的高度。等周型不等式作为几何不等式的一个重要分支，在几何问题的研究中，贯穿于二维欧式平面、n 维欧式空间、非欧平面、常曲率平面、黎曼流形空间以及仿射空间等其他情形，其形式的灵活性为几何不等式的研究注入源源不断的养分，使得人们对于等周问题的研究绵延不绝。另一方面，积分几何的发展使得等周型不等式成了为概率论、积分学、几何学等学科分支的联系纽带，对加强数学研究工作的整体性具有不可忽视的作用。

从实用性的角度来看，在数学家正式提出等周定理之前，人类乃至动物界已经在不自觉地使用这个定理了，比如：人们使用定长的绳子圈地的过程中，当绳子以圆形的方式圈地时，得到的土地面积最大[2]；在寒冷的冬季，人类或者动物会缩成一团，为的就是在体积一定的情况下，尽量缩小自己的表面积，减小热量的损失[3]；在物理中，等周不等式问题和跟所谓的最小作用量有关，一个直观的表现就是水珠的形状，在没有外力的情况下(如失重的太空舱里)，水珠的形状是完全对称的球体，这是因为当水珠体积一定时，表面张力会迫使水珠的表面积达到最小值，根据等周不等式的原理，最小值在水珠形状为球状时达到……

因此，等周型不等式的研究对于数学和物理学等领域的发展均具有重要的研究意义。

2. 经典等周不等式介绍

2.1. 平面情形

在几何问题的研究中，我们非常关心一些几何元素的几何不变量，如体积、表面积、周长、曲率等之间的关系。通常这些几何不变量满足一些等式或不等式关系，我们称之为几何等式或几何不等式。等周不等式是几何不等式的重要分支，其经典等周不等式可以表述为：

定理 2.1.1 若 γ 是二维欧氏平面上一简单严格闭凸曲线，γ 的周长为 L，曲线所围区域的面积为 A，

则有

$$L^2-4\pi A\geq 0$$

等号成立当且仅当曲线 γ 为圆。

2.2. 高维欧式空间情形

在平面等周不等式发展的过程中，人们将其推广到 n 维欧式空间中。空间等周不等式可表述为：在一切具有相同体积的立体形状中，球体具有最小的面积或者欧式空间 R^n 中表面积固定的域中，球所包围的体积最大。严格的表述为：

定理 2.2.1 设 K 为欧式空间 R^n 中表面积为 A，体积为 V 的域，则有不等式

$$A^n-n^n\omega_n V^{n-1}\geq 0$$

等号成立的充分必要条件是 K 为 R^n 中标准球。其中 ω_n 为 R^n 中单位球的体积，其计算公式为

$$\omega_n=\frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

3. 等周型不等式发展现状

等周问题是几何中一类最大最小值问题。早在古希腊时期，经典的等周不等式就已经被人们所知晓，等周问题最早由著名的数学家 Joham Beynoulli 在 1679 年提出，人们经历两千年的时间才完成它的证明，以经典等周不等式为中心，它的推广工作到如今还在不断地进行。

十九世纪时，Steiner 从直观上提出了平面等周不等式问题解的存在性[4]。直到 1870 年，Weistrass 才用变分法给出了等周定理的第一个完整严格的数学证明[5]。1902 年时，A. Hurwitz 利用 Fourier 级数和 Green 定理给出了等周不等式的第一个纯解析证明。1939 年，由 E. Schmidt 给出了等周不等式的一个简化证明。上世纪，等周不等式已经有了许多精巧的证明(参见[6] [7] [8] [9])，等周不等式还被推广到曲面上的曲线和区域、以及非欧平面上(参见[9] [10])。

数学研究者们最初借助微积分和变分学，建立平面等周不等式的一些严格的数学证明，其证明方法的复杂性使得学者们在将等周不等式从平面推广到空间时也存在一定的缺陷。上个世纪三十年代，德国数学家 Blaschke 等人首次提出了“积分几何”这一术语，“积分几何”的提出为等周不等式的研究打开了新的思路(参见[6] [11])。以周家足、任德麟为代表的中国几何学者，利用包含测度的思想，研究欧式空间中一域包含另一域的包含测度，在后来的研究中，该思想成为积分几何不等式的一个重要思想方法，并在二维以及高维欧式空间的情形得到了等周不等式和一系列重要的不等式[12]。

3.1. Bonnesen-型等周不等式

在研究经典等周不等式的同时，几何不等式的研究者们已经不再仅满足于对经典等周不等式的简化证明的探索，在 1920 年前后，Bonnesen 得到一系列具有下列性质的不等式：

$$L^2-4\pi A\geq B$$

其中 B 是与 γ 相关的几何不变量且满足：1) $B\geq 0$；2) $B=0$ 当且仅当 γ 为圆。平面中，最著名的 Bonnesen-型不等式为：

$$L^2-4\pi A\geq \pi^2\left(r_e-r_i\right)^2$$

其中 r_e 和 r_i 分别为曲线 γ 的最小外接圆半径和最大内接圆半径。

在过去的一个多世纪里，一系列的 Bonnesen-型等周不等式已经被发现[12] [13] [14] [15]。很久之后，学者们将 Bonnesen-型等周不等式推广到了 n 维欧式空间中，即数学家们对以下形式的不等式更感兴趣：

$$\Delta_n\left(K\right)=A^n-n^n\omega_nV^{n-1}\geq B_K$$

其中 B_K 非负且 B_K 为零时当且仅当 K 为球。$\Delta_n\left(K\right)$ 称为区域 K 的等周亏格，$\Delta_n\left(K\right)$ 刻画了区域 K 与标准球的差别程度。在 n 维情况下，Hadwiger 和 Dinghas [16]得到了如下结果：

$$\left(\frac{A}{A_r}\right)^{\frac{n}{n-1}}-\frac{V}{V_r}\geq\left(\left(\frac{A}{A_r}\right)^{\frac{1}{n-1}}-1\right)^n$$

其中 A_r 和 V_r 分别为域 K 的内切球表面积和内切球体积。

自上世纪以来，数学家们已经得到了很多的不变量 B_K，且如今对 Bonnesen-型等周不等式的研究仍在继续(平面情形参见文献[17] [18] [19]；高维情况参见文献[20] [21] [22])。

3.2. 逆 Bonnesen-型等周不等式

与 Bonnesen-型等周不等式相对应，人们自然而然会考虑如下形式的逆 Bonnesen-型等周不等式，即

$$\Delta_n\left(K\right)=A^n-n^n\omega_nV^{n-1}\leq U_K$$

对于 K 为二维欧式平面上的严格闭凸曲线所围成的区域的情形，Bottema 于 1933 年得到如下著名的结果[23]：

$$\Delta_2\left(K\right)=L^2-4\pi A\leq\pi^2\left(\rho_M-\rho_m\right)^2$$

其中 ρ_M 和 ρ_m 分别为曲率半径 ρ 的最大值和最小值，等号成立当且仅当 $\rho_M=\rho_m$，即 K 为圆域。

1955 年，Pleijel 加强了 Bottema 的结果[24]：

$$\Delta_2\left(K\right)=L^2-4\pi A\leq\pi\left(4-\pi\right)\left(\rho_M-\rho_m\right)^2$$

近年来，逆 Bonnesen-型等周不等式的结果日益丰富，如潘生亮，周家足，Howard，Klain 等[12] [25] [26] [27] [28] [29]致力于逆向 Bonnesen-型等周不等式的研究，已经得到了很多有价值的结果。此外，国内还有大量学者，如高翔[30] [31] [32] [33]，何刚[34]，戴勇[35] [36] [37]，张增乐[38]等还在继续不懈努力地寻求那些未知的逆向 Bonnesen 型等周不等式，其中高翔，徐慧平等人还利用 Fourier 级数等相关性质对等周型不等式的稳定性进行了深入的探讨和研究。n 维空间中的逆向 Bonnesen-型等周不等式的研究在今年也得到了一定的发展，但结果相对较少，该研究方向在未来有待进一步的研究。

3.3. Gage-型等周不等式

在等周不等式的研究初期，对于很多经典等周不等式的加强和推广形式都没有涉及曲线的曲率。发展到 20 世纪 80 年代时，Gage 证明了一个涉及平面凸曲线曲率平方积分的不等式[39]

$$\int_\gamma k^2\mathrm{d}s\geq\frac{\pi L}{A}$$

我们将其称为 Gage 等周不等式。该不等式对于人们理解平面曲线缩短流以及研究平面曲线的其他演化问题起这重要的作用。在后续的研究中，几何不等式的研究者们推广和加强了该类不等式，得到一系列的 Gage 型−等周不等式和逆 Gage 型−等周不等式(如[40])。此类等周型不等式在数学物理，力学中应用广泛。

3.4. Ros-型等周不等式

与 Gage 等周不等式相对应，可得到平面 $\mathbb{R}^2$ 上的 Ros 定理：

$$\int_\gamma \frac{1}{k}\mathrm{d}s \ge 2A$$

近年来，周家足，马磊等人对 Ros-型等周不等式进行了深入地研究(参见[12] [41])。同样得到了一些强化结果，如[12]：

$$\int_\gamma \frac{1}{k}\mathrm{d}s \ge \frac{L^2}{2\pi},\quad \int_\gamma \frac{1}{k}\mathrm{d}s \ge \frac{7L^2-20\pi A}{4\pi}$$

3.5. 离散型等周不等式

对于等周不等式，我们通常讨论的都是它的连续形式，几何不等式的研究学者们对于由经典等周不等式问题衍生出来的更为基础的问题，“关于多边形或多面体的等周不等式问题”也充满了兴趣，该问题实际上可以看作是经典等周问题的离散形式。研究多面体的等周问题时有一定的难度，在 1884 年时，R. Sturm 给出了关于四面体的等周问题的解[5]，最近由马磊，戴勇等在[15] [42]中得到了一些新的结果。

4. 等周型不等式发展趋势

现如今，等周不等式已经推广到了常曲率平面(例：[29] [43] [44])、黎曼流形空间以及仿射空间[46]等其他情形，同时数学家们也期望将等周不等式继续推广到高维欧式空间和非欧空间中，进一步加强对欧氏平面上等周亏格的上界估计和欧式空间 R^n 中等周亏格上界的估计。

此外，目前对于大多数等周型不等式而言，无论是在二维平面还是在高维空间中，都是在凸域的前提下进行的，对于非凸区域中等周不等式的研究结果相对较少，现已有部分学者致力于研究星形区域以及 Gauss 曲率星体上的等周问题[45]，得到了一些研究结果。在未来的研究进程中，这一研究思路也为等周型不等式的研究注入了新鲜的血液。

基金项目

本文由山东省自然科学基金(ZR2018MA006)及山东省研究生导师指导能力提升项目(SDYY17009)支持。

参考文献

[1] 匡继昌. 一般不等式研究在中国的新进展[J]. 北京联合大学学报(自然科学版), 2005, 19(1): 29-37.

[2] 胡方杰. 等周不等式初探[J]. 中学数学研究(华南师范大学版), 2018(15): 45-48.

[3] 朱建华, 赵微, 孟新柱. 等周问题求解新探索[J]. 大学数学, 2015, 31(2): 20-23.

[4] Steiner, J. (1842) Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sphere, et dans l'espace en general, I and II. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **24**, 93-152, 189-250. https://doi.org/10.1515/crll.1842.24.189

[5] Kazarinoff, N.D. (1986) Geometric Inequalities. Peking University Press, Beijing.

[6] 任德麟. 积分几何引论[M]. 上海: 上海科技技术出版社, 1988.

[7] Ren, D. (1992) Topics in Integral Geometry. World Scientific International Publisher, Singapore.

[8] Santalo, L.A. (1976) Integral Geometry and Geometric Probability. Addison-Wesley, Reading.

[9] Hsiung, C.C. (1997) A First Course in Differential Geometry. International Press, Somerville.

[10] Grinberg, E., Ren, D. and Zhou, J. (2000) The Symmetric Isoperimetric Deficit and the Containment Problem in a Plane of Constant Curvature.

[11] 周家足. 积分几何与等周不等式[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版), 2002, 20(2): 1-3.

[12] 周家足, 任德麟. 从积分几何的观点看几何不等式[J]. 数学物理学报, 2010, 30(5): 1322-1339.

[13] 周家足. 平面 Bonnesen 型不等式[J]. 数学学报, 2007, 50(6): 1397-1402.

[14] 郑高峰, 周阳. 几个关于极坐标的 Bonnesen 型不等式[J]. 数学杂志, 2018, 38(6): 1119-1122.

[15] 马磊, 戴勇. 关于四面体的 Bonnesen 型等周不等式[J]. 数学的实践与认识, 2013, 43(3): 232-235.

[16] Hadwiger, H. (1948) Die isoperimetrische Ungleichung im Raum. *Elemente der Mathematik*, **3**, 25-38.

[17] Burago, Y.D. and Zalgaller, V.A. (1988) Geometric Inequalities. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-07441-1

[18] Osserman, R. (1978) The Isoperimetric Inequality. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **84**, 1182-1238. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1978-14553-4

[19] Osserman, R. (1979) Bonnesen-Style Isoperimetric Inequalities. *The American Mathematical Monthly*, **86**, 1-29. https://doi.org/10.1080/00029890.1979.11994723

[20] Zhang, G. and Zhou, J. (2006) Containment Measures in Integral Geometry, Integral Geometry and Convexity. World Scientific, Singapore, 153-168. https://doi.org/10.1142/9789812774644_0011

[21] Zhang, G. (1994) Geometric Inequalities and Inclusion Measures of Convex Bodies. *Mathematika*, **41**, 95-116. https://doi.org/10.1112/S0025579300007208

[22] Zhou, J., Du, Y. and Cheng, F. (2012) Some Bonnesen-Style Inequalities for Higher Dimensions. *Acta Mathematica Sinica*, *English Series*, **28**, 2561-2568.

[23] Bottema, O. (1933) Eine obere Grenze fur das isoperimetrische Defizit ebener Kurven. *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings*. *Series A*, **66**, 442-446.

[24] Pleijel, A. (1955) On konvexa kurvor. *Nordisk Matematisk Tidskrift*, **3**, 57-64.

[25] Pan, S. and Xu, H. (2008) Stability of a Reverse Isoperimetric Inequality. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **350**, 348-353. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.09.047

[26] Pan, S.L. and Zhang, H. (2007) A Reverse Isoperimetric Inequality for Convex Plane Curves. *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, **48**, 303-308.

[27] Pan, S.L., Tang, X.Y. and Wang, X.Y. (2010) A Refined Reverse Isoperimetric Inequality in the Plane. *Mathematical Inequalities & Applications*, **13**, 329-338. https://doi.org/10.7153/mia-13-26

[28] Howard, R. (1998) The Sharp Sobolev Inequality and the Banchoff-Pohl Inequality on Surfaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **126**, 2779-2787.

[29] Klain, D. (2007) Bonnesen-Type Inequalities for Surfaces of Constant Curvature. *Advances in Applied Mathematics*, **39**, 143-154. https://doi.org/10.1016/j.aam.2006.11.004

[30] Gao, X. (2011) A Note on the Reverse Isoperimetric Inequality. *Results in Mathematics*, **59**, 83-90. https://doi.org/10.1007/s00025-010-0056-y

[31] Gao, X. (2011) A Note on the Isoperimetric Inequality and Its Stability. *Journal of Mathematical Inequalities*, **5**, 371-381. https://doi.org/10.7153/jmi-05-33

[32] Gao, X. (2012) A New Reverse Isoperimetric Inequality and Its Stability. *Mathematical Inequalities & Applications*, **15**, 733-743. https://doi.org/10.7153/mia-15-64

[33] Gao, X. and Li, C.J. (2015) The Isoperimetric Inequality and Its Stability. *Journal of Mathematical Inequalities*, **9**, 897-912. https://doi.org/10.7153/jmi-09-74

[34] 何刚, 姜德烁. 平面凸体的等周亏格的上界估计[J]. 数学杂志, 2013, 33(2): 349-353.

[35] 戴勇, 姚惠. 关于平面卵形区域的等周亏格上界的几点注记[J]. 数学的实践与认识, 2013, 43(1): 188-191.

[36] 戴勇, 吴现荣, 刘朝军. 几个与 Ros 等周亏格相关的逆 Bonnesen 型不等式[J]. 数学的实践与认识, 2016, 46(18): 193-196.

[37] 戴勇, 邓玲芳. 关于 R~3 中卵形区域的等周亏格的上界估计的注记[J]. 数学杂志, 2013, 33(1): 153-156.

[38] 张增乐, 罗淼, 陈方维. 平面上的新凸体与逆 Bonnesen-型不等式[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2015, 40(4): 27-30.

[39] Gage, M.E. (1983) An Isoperimetric Inequality with Applications to Curve Shortening. *Duke Mathematical Journal*, **50**, 1225-1229. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-83-05052-4

[40] 潘生亮, 唐学远, 汪小玉. Gage 等周不等式的加强形式[J]. 数学年刊 A 辑(中文版), 2008, 29(3): 301-306.

[41] 周家足, 姜德烁, 李明, 陈方维. 超曲面的 Ros 定理[J]. 数学学报, 2009, 52(6): 1075-1084.

[42] 马磊. 关于平面凸多边形的一个 Bonnesen 型不等式[J]. 数学杂志, 2015, 35(1): 154-158.

[43] Xia, Y.W., Xu, W.X., Zhou, J.Z. and Zhu, B.C. (2013) Reverse Bonnesen Style Inequalities in a Surface of Constant Curvature. *Science China* (*Mathematics*), **56**, 1143-1152. https://doi.org/10.1007/s11425-013-4578-0

[44] Li, M. and Zhou, J. (2010) An Isoperimetric Deficit Upper Bound of the Convex Domain in a Surface of Constant Curvature. *Science China* (*Mathematics*), **53**, 1941-1946. https://doi.org/10.1007/s11425-010-4018-3

[45] 张增乐. 关于 Gauss 曲率星体的几何不等式及其相关问题[D]: [博士学位论文]. 重庆: 西南大学, 2018.