Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(7), 763-770
Published Online September 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.97100

Hans汉斯

On Pythagorean Four-State and Isomorphism Field Equations between Orthogonal Spherical Centers

—Application of Pythagorean Theorem of Four Dimensional Volume (Formula 1)

Guowei Cai

Shanghai Huimei Property Co., Ltd., Shanghai
Email: yiersan@139.com

Received: Aug. 5th, 2019; accepted: Aug. 23rd, 2019; published: Aug. 30th, 2019

Abstract

A determinant of isomorphic equation of orthogonal spherical interphase field based on radius of each sphere is established for 15 kinds of orthogonal spherical interphase fields of 4 states, which consist of point, line, surface and body, and can be extended to any finite high dimension.

Keywords

Volume Pythagorean Theorem, Application, Field Equation, Determinant

论勾股四态、以及正交球心间同构的场方程

——四维体积勾股定理的应用(公式一)

蔡国伟

上海汇美房产有限公司，上海
Email: yiersan@139.com

收稿日期：2019年8月5日；录用日期：2019年8月23日；发布日期：2019年8月30日

摘　要

1球至4球正交构成点、线、面、体的勾股4态，对其4态15种正交球心间场，建立了基于各球半径的正交球心间场同构方程行列式，且以此可推广至任意有限高维。

文章引用: 蔡国伟. 论勾股四态、以及正交球心间同构的场方程[J]. 理论数学, 2019, 9(7): 763-770.
DOI: 10.12677/pm.2019.97100

关键词

体积勾股定理，应用，场方程，行列式

1. 引言

1 球至 4 球正交，构成的点(球)、线(勾股定理)、面(面积勾股定理[1])、体(体积勾股定理[2])均有各自的定理。那么这些各自的定理间，特别是球心间所围场是否存在同构的公式？

2. 正交球心间存在同构的场方程行列式的证明

1 球至 4 球正交，其球心间所围场方程行列式可分为繁式和简式 2 种，以及所有球半径均相等公式。

2.1. (繁式)正交球心场方程行列式

类似 Cayley-Menger 行列式[3]，或可称 2 点间距式， $\mathbb{R}^n$ 代表球心所围场(含所有子集)，行列式为：

$$\left(\mathbb{R}^n\right)^2=(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{(n-1)!}\right)^2\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 & \cdots & d_{1n}^2\\ 1 & d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 & \cdots & d_{2n}^2\\ 1 & d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 & \cdots & d_{3n}^2\\ 1 & d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 & \cdots & d_{4n}^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & d_{n1}^2 & d_{n2}^2 & d_{n3}^2 & d_{n4}^2 & \cdots & 0\end{vmatrix} \tag{1}$$

$n\in 1,2,3,4$ 表示参与正交球的数量，下标：$ij\in 1,2,3,4$ 表示各球心点，d_{ij} 是连接两个球心连线的长度。

2.1.1. 例：4 球正交球心间场为垂心四面体的体积的平方

$$\left(\mathbb{R}_{1234}^4\right)^2=(-1)^4\left(\frac{1}{2}\right)^{4-1}\left(\frac{1}{(4-1)!}\right)^2\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2\\ 1 & d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2\\ 1 & d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2\\ 1 & d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{288}\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & a^2+b^2 & a^2+c^2 & a^2+d^2\\ 1 & b^2+a^2 & 0 & b^2+c^2 & b^2+d^2\\ 1 & c^2+a^2 & c^2+b^2 & 0 & c^2+d^2\\ 1 & d^2+a^2 & d^2+b^2 & d^2+c^2 & 0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{36}\left(a^2b^2c^2+a^2b^2d^2+a^2c^2d^2+b^2c^2d^2\right)$$

各球半径 $\in a,b,c,d$ 。

2.1.2. 例：4 个 3 球正交球心间场为三角形的面积的平方

$$\left(\mathbb{R}_{123}^{3}\right)^{2}=(-1)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1}\left(\frac{1}{(3-1)!}\right)^{2}\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & d_{12}^{2} & d_{13}^{2}\\ 1 & d_{21}^{2} & 0 & d_{23}^{2}\\ 1 & d_{31}^{2} & d_{32}^{2} & 0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{16}\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & a^{2}+b^{2} & a^{2}+c^{2}\\ 1 & b^{2}+a^{2} & 0 & b^{2}+c^{2}\\ 1 & c^{2}+a^{2} & c^{2}+b^{2} & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{4}\left(a^{2}b^{2}+a^{2}c^{2}+b^{2}c^{2}\right)$$

下标 $ij\in 1,2,3,4$ 表示各球心点。

或

$$\left(\mathbb{R}_{124}^{3}\right)^{2}=(-1)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1}\left(\frac{1}{(3-1)!}\right)^{2}\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & d_{12}^{2} & d_{14}^{2}\\ 1 & d_{21}^{2} & 0 & d_{24}^{2}\\ 1 & d_{41}^{2} & d_{42}^{2} & 0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{16}\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & a^{2}+b^{2} & a^{2}+d^{2}\\ 1 & b^{2}+a^{2} & 0 & b^{2}+d^{2}\\ 1 & d^{2}+a^{2} & d^{2}+b^{2} & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{4}\left(a^{2}b^{2}+a^{2}d^{2}+b^{2}d^{2}\right)$$

或

$$\left(\mathbb{R}_{134}^{3}\right)^{2}=(-1)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1}\left(\frac{1}{(3-1)!}\right)^{2}\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & d_{13}^{2} & d_{14}^{2}\\ 1 & d_{31}^{2} & 0 & d_{34}^{2}\\ 1 & d_{41}^{2} & d_{43}^{2} & 0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{16}\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & a^{2}+c^{2} & a^{2}+d^{2}\\ 1 & c^{2}+a^{2} & 0 & c^{2}+d^{2}\\ 1 & d^{2}+a^{2} & d^{2}+c^{2} & 0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\left(a^{2}c^{2}+a^{2}d^{2}+c^{2}d^{2}\right)$$

或

$$\left(\mathbb{R}_{234}^{3}\right)^{2}=(-1)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1}\left(\frac{1}{(3-1)!}\right)^{2}\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & d_{23}^{2} & d_{24}^{2}\\ 1 & d_{32}^{2} & 0 & d_{34}^{2}\\ 1 & d_{42}^{2} & d_{43}^{2} & 0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{16}\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & b^{2}+c^{2} & b^{2}+d^{2}\\ 1 & c^{2}+b^{2} & 0 & c^{2}+d^{2}\\ 1 & d^{2}+b^{2} & d^{2}+c^{2} & 0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\left(b^{2}c^{2}+b^{2}d^{2}+c^{2}d^{2}\right)$$

2.1.3. 例：6 个 2 球正交球心间场为 2 点间直线的平方

$$\left(\mathbb{R}_{12}^2\right)^2=(-1)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{2-1}\left(\frac{1}{(2-1)!}\right)^2\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&d_{12}^2\\1&d_{21}^2&0\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&a^2+b^2\\1&b^2+a^2&0\end{vmatrix}=a^2+b^2$$

或

$$\left(\mathbb{R}_{13}^2\right)^2=(-1)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{2-1}\left(\frac{1}{(2-1)!}\right)^2\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&d_{13}^2\\1&d_{31}^2&0\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&a^2+c^2\\1&c^2+a^2&0\end{vmatrix}=a^2+c^2$$

或

$$\left(\mathbb{R}_{14}^2\right)^2=(-1)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{2-1}\left(\frac{1}{(2-1)!}\right)^2\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&d_{14}^2\\1&d_{41}^2&0\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&a^2+d^2\\1&d^2+a^2&0\end{vmatrix}=a^2+d^2$$

或

$$\left(\mathbb{R}_{23}^2\right)^2=(-1)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{2-1}\left(\frac{1}{(2-1)!}\right)^2\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&d_{23}^2\\1&d_{32}^2&0\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&b^2+c^2\\1&c^2+b^2&0\end{vmatrix}=b^2+c^2$$

或

$$\left(\mathbb{R}_{24}^2\right)^2=(-1)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{2-1}\left(\frac{1}{(2-1)!}\right)^2\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&d_{24}^2\\1&d_{42}^2&0\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&b^2+d^2\\1&d^2+b^2&0\end{vmatrix}=b^2+d^2$$

或

$$\left(\mathbb{R}_{34}^2\right)^2=(-1)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{2-1}\left(\frac{1}{(2-1)!}\right)^2\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&d_{34}^2\\1&d_{43}^2&0\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&c^2+d^2\\1&d^2+c^2&0\end{vmatrix}=c^2+d^2$$

2.1.4. 例：4 个球正交球心为点的平方

$$\left(\mathbb{R}_1^1\right)^2=(-1)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1}\left(\frac{1}{(1-1)!}\right)^2\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=1$$

或

$$\left(\mathbb{R}_2^1\right)^2=(-1)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1}\left(\frac{1}{(1-1)!}\right)^2\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=1$$

或

$$\left(\mathbb{R}_3^1\right)^2=(-1)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1}\left(\frac{1}{(1-1)!}\right)^2\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=1$$

或

$$\left(\mathbb{R}_4^1\right)^2=(-1)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1}\left(\frac{1}{(1-1)!}\right)^2\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=1$$

2.2. (简式)正交球心场方程行列式

直接使用各正交球半径的行列式为：

$$\left(\mathbb{R}^{n}\right)^{2}=(-1)^{n}\left(\frac{1}{(n-1)!}\right)^{2}\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & r_2^2 & r_3^2 & r_4^2 & \cdots & r_n^2\\ 1 & r_1^2 & 0 & r_3^2 & r_4^2 & \cdots & r_n^2\\ 1 & r_1^2 & r_2^2 & 0 & r_4^2 & \cdots & r_n^2\\ 1 & r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 & 0 & \cdots & r_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 & r_4^2 & \cdots & 0\end{vmatrix} \tag{2}$$

下标：$n\in 1,2,3,4$ 表示参与正交球的数量，r_n 为各正交球半径。

2.2.1. 例：4 球正交球心间场为垂心四面体的体积的平方

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{R}_{1234}^{4}\right)^{2}&=(-1)^{4}\left(\frac{1}{(4-1)!}\right)^{2}\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & r_2^2 & r_3^2 & r_4^2\\ 1 & r_1^2 & 0 & r_3^2 & r_4^2\\ 1 & r_1^2 & r_2^2 & 0 & r_4^2\\ 1 & r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 & 0\end{vmatrix}\\ &=\frac{1}{36}\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & b^2 & c^2 & d^2\\ 1 & a^2 & 0 & c^2 & d^2\\ 1 & a^2 & b^2 & 0 & d^2\\ 1 & a^2 & b^2 & c^2 & 0\end{vmatrix}\\ &=\frac{1}{36}\left(a^2b^2c^2+a^2b^2d^2+a^2c^2d^2+b^2c^2d^2\right)\end{aligned}$$

各球半径 $\in a,b,c,d$ 。

2.2.2. 例：4 个 3 球正交球心间场为三角形的面积的平方

$$\left(\mathbb{R}_{123}^{3}\right)^{2}=(-1)^{3}\left(\frac{1}{(3-1)!}\right)^{2}\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & r_2^2 & r_3^2\\ 1 & r_1^2 & 0 & r_3^2\\ 1 & r_1^2 & r_2^2 & 0\end{vmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & b^2 & c^2\\ 1 & a^2 & 0 & c^2\\ 1 & a^2 & b^2 & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{4}\left(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\right)$$

下标 $\in 1,2,3,4$ 表示各球心点。

或

$$\left(\mathbb{R}_{124}^{3}\right)^{2}=(-1)^{3}\left(\frac{1}{(3-1)!}\right)^{2}\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & r_2^2 & r_4^2\\ 1 & r_1^2 & 0 & r_4^2\\ 1 & r_1^2 & r_2^2 & 0\end{vmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & b^2 & d^2\\ 1 & a^2 & 0 & d^2\\ 1 & a^2 & b^2 & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{4}\left(a^2b^2+a^2d^2+b^2d^2\right)$$

或

$$\left(\mathbb{R}_{134}^{3}\right)^{2}=(-1)^{3}\left(\frac{1}{(3-1)!}\right)^{2}\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&r_3^2&r_4^2\\1&r_1^2&0&r_4^2\\1&r_1^2&r_3^2&0\end{vmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&c^2&d^2\\1&a^2&0&d^2\\1&a^2&c^2&0\end{vmatrix}=\frac{1}{4}\left(a^2c^2+a^2d^2+c^2d^2\right)$$

或

$$\left(\mathbb{R}_{234}^{3}\right)^{2}=(-1)^{3}\left(\frac{1}{(3-1)!}\right)^{2}\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&r_3^2&r_4^2\\1&r_2^2&0&r_4^2\\1&r_2^2&r_3^2&0\end{vmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&c^2&d^2\\1&b^2&0&d^2\\1&b^2&c^2&0\end{vmatrix}=\frac{1}{4}\left(b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2\right)$$

2.2.3. 例：6 个 2 球正交球心间场为 2 点间直线的平方

$$\left(\mathbb{R}_{12}^{2}\right)^{2}=(-1)^{2}\left(\frac{1}{(2-1)!}\right)^{2}\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&r_2^2\\1&r_1^2&0\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&b^2\\1&a^2&0\end{vmatrix}=a^2+b^2$$

或

$$\left(\mathbb{R}_{13}^{2}\right)^{2}=(-1)^{2}\left(\frac{1}{(2-1)!}\right)^{2}\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&r_3^2\\1&r_1^2&0\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&c^2\\1&a^2&0\end{vmatrix}=a^2+c^2$$

或

$$\left(\mathbb{R}_{14}^{2}\right)^{2}=(-1)^{2}\left(\frac{1}{(2-1)!}\right)^{2}\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&r_4^2\\1&r_1^2&0\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&d^2\\1&a^2&0\end{vmatrix}=a^2+d^2$$

或

$$\left(\mathbb{R}_{23}^{2}\right)^{2}=(-1)^{2}\left(\frac{1}{(2-1)!}\right)^{2}\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&r_2^2\\1&r_2^2&0\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&c^2\\1&b^2&0\end{vmatrix}=b^2+c^2$$

或

$$\left(\mathbb{R}_{24}^{2}\right)^{2}=(-1)^{2}\left(\frac{1}{(2-1)!}\right)^{2}\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&r_4^2\\1&r_2^2&0\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&d^2\\1&b^2&0\end{vmatrix}=b^2+d^2$$

或

$$\left(\mathbb{R}_{34}^{2}\right)^{2}=(-1)^{2}\left(\frac{1}{(2-1)!}\right)^{2}\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&r_4^2\\1&r_3^2&0\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&d^2\\1&c^2&0\end{vmatrix}=c^2+d^2$$

2.2.4. 例：4 个球正交球心为点的平方

$$\left(\mathbb{R}_{1}^{1}\right)^{2}=(-1)^{1}\left(\frac{1}{(1-1)!}\right)^{2}\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=1$$

或

$$\left(\mathbb{R}_{2}^{1}\right)^{2}=(-1)^{1}\left(\frac{1}{(1-1)!}\right)^{2}\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=1$$

或

$$\left(\mathbb{R}_3^1\right)^2=(-1)^1\left(\frac{1}{(1-1)!}\right)^2\begin{vmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{vmatrix}=1$$

或

$$\left(\mathbb{R}_4^1\right)^2=(-1)^1\left(\frac{1}{(1-1)!}\right)^2\begin{vmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{vmatrix}=1$$

2.3. 所有正交球半径均等于 a 时，正交球心场方程可简化为分式型公式为

$$\left(\mathbb{R}^n\right)^2=\frac{na^{2(n-1)}}{(n-1)!^2} \tag{3}$$

例：

$$\left(\mathbb{R}^4\right)^2=\frac{4a^{2(4-1)}}{(4-1)!^2}=\frac{a^6}{9}$$

$$\left(\mathbb{R}^3\right)^2=\frac{3a^{2(3-1)}}{(3-1)!^2}=\frac{3a^4}{4}$$

$$\left(\mathbb{R}^2\right)^2=\frac{2a^{2(2-1)}}{(2-1)!^2}=2a^2$$

$$\left(\mathbb{R}^1\right)^2=\frac{1a^{2(1-1)}}{(1-1)!^2}=1$$

3. 场方程行列式方程的非空子集数量，均符合杨辉三角关系[4]

3.1. 勾股 4 态

根据表 1，我们可以认知，勾股除了线、面、体之外，球属于勾股的点态子集，由此证明了勾股的点、线、面、体 4 态。

Table 1. Quantitative table of determinant equation subsets of field equation between orthogonal spherical centers
表 1. 正交球心间场方程行列式方程子集的数量表

集	球心点	球心间连线	球心构成的面	球心构成的体	子集数
1					
1	1				1
1	2	1			3
1	3	3	1		7
1	4	6	4	1	15

3.2. 正交球心场方程可以推广至任意有限高维

根据正交球心场：公式(1)，公式(2)，公式(3)，不但证明了勾股点、线、面、体 4 态；更可推广至任意有限高维。

参考文献

[1] 陶杰, 编译. 勾股定理的新探索——把勾股定理推广到三维空间[J]. 中等数学, 1983, 2: 44.
[2] 蔡国伟. 体积勾股定理的证明[J]. 理论数学, 2019, 9(6): 723-729.
[3] 朱建新, 高蕾娜, 张新访. 基于距离几何约束的二次加权质心定位算法[J]. 计算机应用, 2009, 29(2): 480-483.
[4] 张悦, 赖生建, 王晓琼, 张瑾. 杨辉三角的又一性质及 MATLAB 计算[J]. 实验科学与技术, 2011, 9(6): 189-192.