Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(7), 804-808
Published Online September 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.97105

Hans汉斯

The Solution of Analytical Formula for a Class of Differentiable Functions Satisfying Given Conditions

Zhihong Kong

Department of Mathematics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi
Email: kzh196408@126.com

Received: Aug. 19th, 2019; accepted: Sep. 9th, 2019; published: Sep. 16th, 2019

Abstract

Through several examples, the methods and steps of solving a class of differentiable functions that satisfy given conditions are given.

Keywords

Relationships, Functions, Differential Equations

一类满足给定条件的可微函数解析式的求法

孔志宏

太原师范学院数学系，山西 晋中
Email: kzh196408@126.com

收稿日期：2019年8月19日；录用日期：2019年9月9日；发布日期：2019年9月16日

摘 要

通过实例给出了求解一类满足给定条件的可微函数的解析式的方法和步骤。

关键词

关系式，函数，微分方程

文章引用: 孔志宏. 一类满足给定条件的可微函数解析式的求法[J]. 理论数学, 2019, 9(7): 804-808.
DOI: 10.12677/pm.2019.97105

1. 引言

已知某函数满足给定的关系式，要求出此函数，当这类问题作为独立的试题(或题目)出现时，不少人往往感觉到无从入手，解决这类问题也没有明确的思路。本文对几个实例进行了剖析解答。解答的过程本身给出了解决这类问题的思路和方法。

2. 几个实例

例 1：[1] 函数 $f(x)$ 满足条件

$$f(x+y)=\mathrm{e}^{x}f(y)+\mathrm{e}^{y}f(x),\ f'(0)=\mathrm{e}\text{，}$$

求 $f(x)$。

解：当 $y=0$ 时，有

$$f(x)=\mathrm{e}^{x}f(0)+f(x)\text{，}$$

得到

$$f(0)=0\text{。} \tag{1}$$

于是

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}\\
&=\lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}f(y)+\mathrm{e}^{y}f(x)-f(x)}{y}\\
&=\lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}f(y)-\mathrm{e}^{x}f(0)+\mathrm{e}^{y}f(x)-f(x)}{y}\text{，}\\
&=\mathrm{e}^{x}\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y}+f(x)\lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{e}^{y}-1}{y}\\
&=\mathrm{e}^{x}f'(0)+f(x)
\end{aligned}$$

即

$$f'(x)=f(x)+\mathrm{e}^{x+1}$$

$$f(x)=\mathrm{e}^{x}(x\mathrm{e}+c)\text{。} \tag{2}$$

将(1)代入(2)，得 $c=0$，所求 $f(x)=x\mathrm{e}^{x+1}$。

例 2：[2] 设函数 $\varphi(t)$ 于 $-\infty<t<+\infty$ 上连续，$\varphi'(0)$ 存在且满足关系式

$$\varphi(t+s)=\varphi(t)\varphi(s)\text{，}$$

试求此函数。

解：当 $t=0,s=0$ 时，有

$$\varphi(0)=\varphi^{2}(0)\text{，}$$

或

$$\varphi(0)\left[1-\varphi(0)\right]=0\text{。}$$

但 $\varphi(0)\neq 0$，否则取 $s=0$ 时，对任意 $t\in(-\infty,+\infty)$，有

$$\varphi(t+0)=\varphi(t)\varphi(0),$$

得出 $\varphi(t)=0$，无意义。所以

$$\varphi(0)=1 \tag{3}$$

于是

$$\begin{aligned}\varphi'(t)&=\lim_{s\to 0}\frac{\varphi(t+s)-\varphi(t)}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{\varphi(t)\varphi(s)-\varphi(t)}{s}\\&=\lim_{s\to 0}\frac{\varphi(t)\left[\varphi(s)-1\right]}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{\varphi(t)\left[\varphi(s)-\varphi(0)\right]}{s},\\&=\varphi(t)\varphi'(0)\end{aligned}$$

即

$$\varphi'(t)=\varphi'(0)\varphi(t),$$

$$\varphi(t)=c\mathrm{e}^{\varphi'(0)t}\text{。} \tag{4}$$

将(3)代入(4)，得 $c=1$，所求函数 $\varphi(t)=\mathrm{e}^{\varphi'(0)t}$。

例 3：[2] 求具有性质

$$x(t+s)=\frac{x(t)+x(s)}{1-x(t)x(s)}$$

的函数 $x(t)$，已知 $x'(0)$ 存在。

解：当 $t=0,s=0$ 时，有

$$x(0)=\frac{2x(0)}{1-x^2(0)},$$

则

$$x(0)=0\text{。} \tag{5}$$

于是

$$\begin{aligned}x'(t)&=\lim_{s\to 0}\frac{x(t+s)-x(t)}{s}\\&=\lim_{s\to 0}\frac{\left[x(t)+x(s)\right]-x(t)\left[1-x(t)x(s)\right]}{s\left[1-x(t)x(s)\right]}\text{。}\\&=\lim_{s\to 0}\frac{x(s)\left[1+x^2(t)\right]}{s\left[1-x(t)x(s)\right]}\end{aligned}$$

而

$$\lim_{s\to 0}\frac{x(s)}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{x(s)-x(0)}{s}=x'(0),$$

$$\lim_{s\to0}\left[1-x(t)x(s)\right]=1-x(t)x(0)=1,$$

所以

$$x'(t)=x'(0)\left[1+x^2(t)\right],$$

$$\arctan x(t)=x'(0)t+c。\tag{6}$$

将(5)代入(6)，得 $c=0$， $\arctan x(t)=x'(0)t$， $x(t)=\tan\left[x'(0)t\right]$。

例 4：[3] 求满足关系式

$$f(x+a)=\frac{f(x)+f(a)}{1+f(x)f(a)},\ f'(0)=1$$

的可微函数 $f(x)$。

解：当 $x=0$ 时，有

$$f(0)\left[1-f^2(a)\right]=0,$$

则

$$f(0)=0\text{ 或 }f(a)=\pm1。$$

当 $f(a)=\pm1$ 时，由关系式得

$$f(x+a)=\pm1,\quad f'(x+a)=0,$$

因此 $f'(0)=0$，这与题设 $f'(0)=1$ 矛盾，所以

$$f(0)=0。\tag{7}$$

于是

$$\begin{aligned}f'(a)&=\lim_{x\to0}\frac{f(x+a)-f(a)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)\left[1-f^2(a)\right]}{x\left[1+f(x)f(a)\right]}\\&=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\lim_{x\to0}\frac{1-f^2(a)}{1+f(x)f(a)}\\&=f'(0)\left[1-f^2(a)\right]=1-f^2(a)\end{aligned}。$$

这样，问题相当于

$$y'=1-y^2,\ y(0)=0,\tag{8}$$

(8)的通解为

$$\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|=2x+\tilde{c},$$

即

$$y=\frac{c\mathrm{e}^{2x}-1}{c\mathrm{e}^{2x}+1},\tag{9}$$

将(8)中初值条件代入(9)，得 $c=1$，于是所求函数

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}。$$

例 5：[4] 证明：函数方程 $f(5x)=5f(x)$ 有解 $f(x)=cx$。

证：方程 $f(\alpha x)=\alpha f(x)$ 两端对 α 求导，得

$$x\frac{\mathrm{d}f(\alpha x)}{\mathrm{d}(\alpha x)}=f(x) \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}f(\alpha x)}{\mathrm{d}(\alpha x)}=\frac{f(x)}{x},$$

令 $\alpha=5$，即有

$$\frac{\mathrm{d}f(5x)}{\mathrm{d}(5x)}=\frac{f(x)}{x},$$

则

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{f(x)}{x},$$

此方程的解为 $f(x)=cx$。

参考文献

[1] 郑立飞, 陈小蕾. 从一道考研题浅析一切研究从最简状态开始的思维方法[J]. 高等数学研究, 2015, 18(3): 59-60.

[2] 王高雄, 周之铭, 朱思铭, 等. 常微分方程[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2006: 43, 49.

[3] 丁崇文. 常微分方程典型题解法和技巧[M]. 福州: 福建教育出版社, 2001: 561.

[4] 周尚仁, 权宏顺. 常微分方程习题集[M]. 北京: 高等教育出版社, 1980: 19.